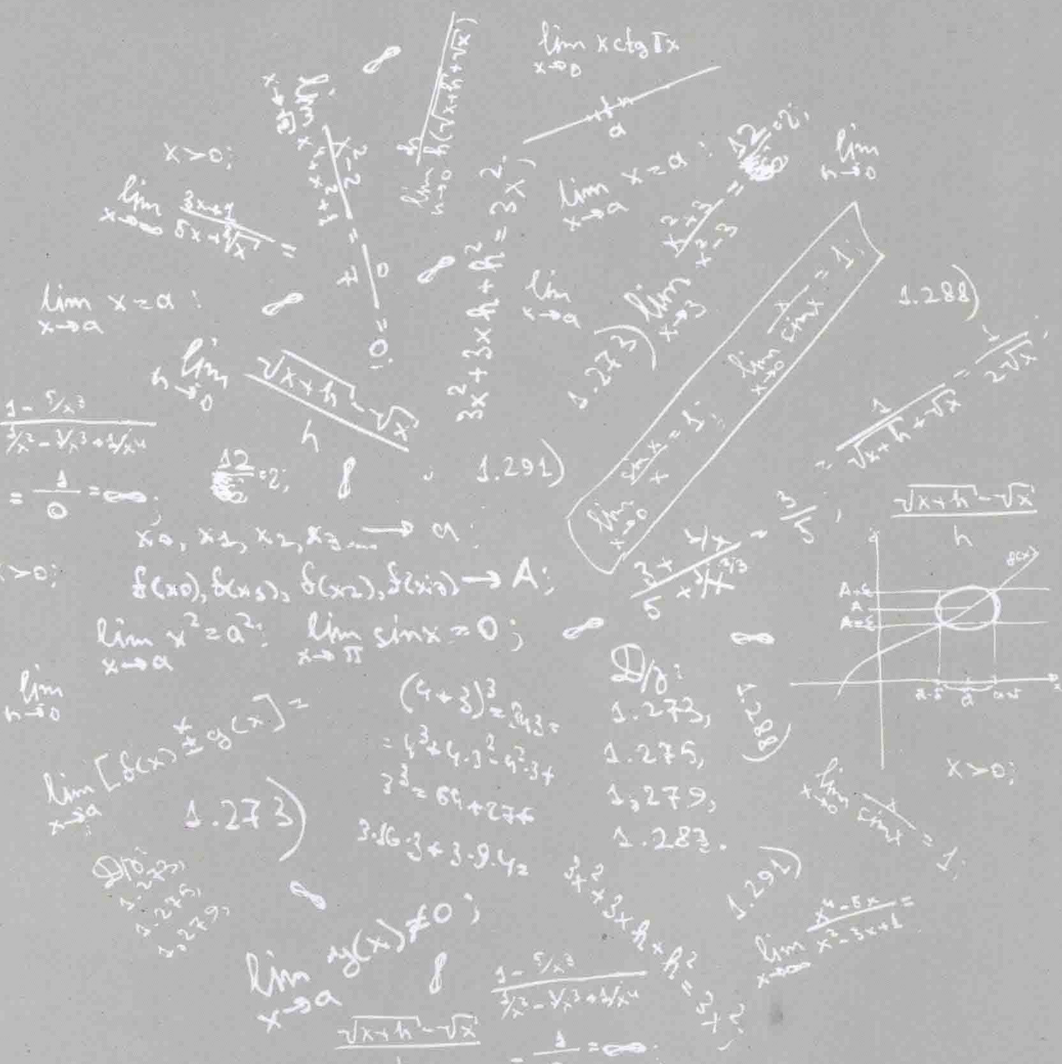
应用型本科规划教材

简明微积分

（上）

主编　莫国良　唐志丰



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

应用型本科规划教材

简明微积分

（上）

主　编　莫国良　唐志丰

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材是按照教育部最新的“工科类数学基础课程教学基本要求”，同时结合应用型本科院校的教学实际，为应用型本科院校微积分课程而编写的教材。

全书分上下两册，主要内容包括：一元函数微积分、无穷级数、常微分方程初步、向量代数与空间解析几何简介、多元函数微积分学。本书为上册，共七章，内容包括：函数、极限与连续、导数和微分、导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数。以上内容为独立学院本科学生学习微积分课程时所必须掌握的基础知识，其中标“*”号的章节仅供选学。

本书可作为应用型本科院校理、工、经、管、医等各专业微积分课程教材，也可作为其他本科院校或相关专业微积分课程的选用教材。

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分. 上/莫国良，唐志丰主编. —上海：
上海交通大学出版社，2014
ISBN 978-7-313-11773-1

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①莫… ②唐… Ⅲ. ①微积分 Ⅳ.
①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第159442号

简明微积分(上)

主　　编：莫国良　唐志丰
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：杭州余杭人民印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：18.25
字　　数：449千字
版　　次：2014年7月第1版　　印　　次：2014年7月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-11773-1/O
定　　价：32.00元

前　言

微积分是人类智力创造的最大成就之一。它有两方面巨大的功能。其一，它是解决数学物理世界、经济社会领域、工程领域与生物科学等领域中各种复杂问题的强有力的方法论工具；其二，它是锻炼与培养人类严密精确思维，逻辑抽象思维与几何直观思维的卓有成效的手段。正因为这样，普通高校的各个系甚至文科系一般都在新生一年级开设微积分课程。

但是，在高等教育大发展的今天，微积分的学习又面临两种学习价值取向：一种是学术型价值取向；另一种是应用型价值取向。

学术型价值取值取向的微积分学习要求学生全面、系统、精深地掌握微积分的知识，建构起高度复杂的微积分知识体系，为后继的学术研究奠定良好的理学基础。

应用型价值取向的微积分学习要求学生掌握微积分的核心知识，它强调直观，而不求理论体系的完备，相应的教学要求主要达到两种目的，一是使学生在后继课程的学习上无障碍之虞，二是让学生受到应用性学习尤其是研究性学习的训练与熏陶。

应用型本科院校的教育目标主要是培养应用型、复合型与创新型人才，它的教育内容介于学术性教育与职业技能性教育之间，因此它的课程体系在结构上向应用型倾斜。这种教育的性质也影响着微积分的教学环节，主要表现在一定程度的课时的精简。

浙江大学城市学院作为独立学院的典范，一直注重于课程的教学改革和实践。最近几年，公共数学教研室组织力量对微积分课程各个教学环节作了深入的研究和探讨，并取得了一系列教学成果。为了更好地满足应用型本科院校微积分课程的教学需要，我们在多年的微积分教学实践基础上编写了本教材，其主要特点包括：

一、教材的主体内容只涉及微积分课程中最基本、最重要、学生务必力求熟练掌握的内容和方法，部分逻辑思维要求较高的经典内容，则以仿宋体印刷（大多同时以*号标注）或以附录形式出现，作为选学内容。这样的安排，一方面照顾了独立学院学生数学基础参差不齐的特点，满足了不同层次学生的学习需要，

体现了以人为本的思想；另一方面也可适用于不同专业、不同要求的教学安排。

二、每章设置了与该章内容相关联的应用性学习与研究性学习的例题，且在习题部分也相应地配备了研究性学习问题，以此培养学生的微积分应用能力，适应应用型本科院校的培养要求。部分问题来自于我们历年来辅导学生的研究性学习实践，具有独立学院的学习特色。

三、教材有较多的典型例题和习题，并在每章最后配备了自测题，以期举一反三，熟能生巧。

四、为满足教学需要，我们还编写了与本书配套的练习册，供有需要的读者选用。

全书共分上、下册。上册主要讲述一元函数微积分学与无穷级数，主体部分适用于80学时的教学安排。下册主要讲述常微分方程初步、空间解析几何简介和多元函数微积分学，按不同专业教学要求，作适当的增删，可适用于48学时到96学时的微积分(下)课程教学安排。

本教材可作为理、工、经、管、医类各专业微积分课程之教材。上册也可作为文科类对数学要求较高的专业的高等数学教材。

本教材由莫国良、唐志丰编写，其中第一章、第二章、第六章、第七章、第十章、第十一章和第十二章由莫国良执笔，第三章、第四章、第五章、第八章、第九章、第十三章和第十四章由唐志丰执笔。

在本书编写过程中，浙江大学城市学院教务部、浙江大学城市学院计算学院领导给予了全方位的支持；吴明华老师等同仁提供了许多帮助和指导；同时得到了上海交通大学出版社编辑热忱的支持与帮助。作者一并深表感谢！

由于作者的水平有限，书中难免存在不当之处，敬请读者批评、指正。

编　者

2014年4月7日

目　录

第一章　函　数

现实世界总是处在不断的变化过程中，各种各样的变化又总与量的变化联系在一起，而各种量的变化又往往不是相互独立的，而是有着这样那样的联系的，描述这种量与量之间联系的数学抽象就是我们所说的函数. 从字面上讲，函数就是"函寄"数，就是把一个数集中的任一数"函寄"到另一个数集中，由于数集的多样性及"函寄"方式的多样性，就形成了函数的多样性，在中学期间，我们已初步接触到函数的概念及相关的问题，在微积分课程中，我们将用更高级的工具更细致地研究函数，随着微积分各章节的展开，函数更丰富的内涵会逐渐呈现在我们面前.

第一节　函数的概念

我们已经学过函数概念，叙述如下：

定义 1.1　设 A,B 是非空实数集，如果按某个确定的对应关系 f，使对于集 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 至 B 的一个**函数**，记作 $y=f(x),x\in A$.

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，x 的取值范围 A 称为函数 f 的**定义域**；与 x 的值相对应的 y 的值叫做**函数值**，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的**值域**，记作 $f(A)$. 一般 $f(A)\subseteq B$.

对定义域 A 中每一个 x_0，都有值域中的 $y_0=f(x_0)$ 与之对应，这样就形成了平面直角坐标系上的点 (x_0,y_0)，当 x_0 取遍定义域 A 后，就形成了一个平面点集 $\{(x,f(x))\mid x\in A\}$，这个平面点集，我们称之为函数 f 的**图形**，常见函数的图形是曲线，但也可以是难以描画的点集.

函数有两大要素：一是定义域；二是对应关系. 这两大要素一旦确定，值域必跟着确定.

两个函数相同，必须且只须定义域相同且对应关系相同.

注　一个函数的定义域可以是特别规定的，比如函数 $y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 就与函数 $y=\sin x$ 不同，前者的定义域是特别规定的，后者的没有专门规定，一个函数 $y=f(x)$ 的定义域没有专门规定时，它的定义域就取为使该函数有意义的所有 x 的集合，这时，这个集合称为该函数的自然定义域，简称为定义域.

表达一个函数有多种方法,常见的有:

1. 用表格表示

例如,某班学生的英语统考成绩如下:

编号	01	02	03	04	05	06	07	08	09
成绩	67	89	68	90	65	45	87	77	45

编号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
成绩	60	79	68	69	75	58	80	70	55

编号	19	20	21	22	23	24	25	26	27
成绩	72	78	84	87	75	90	65	68	57

这里,函数的定义域就是编号为 1 至 27 的自然数,值域就是英语成绩的全体,而对应关系就是编号与其下面英语成绩配对的全体.

2. 用图形表示

例如,某人的心电图如图 1-1 所示.

这里,x 表示时间,y 表示电流的活动强度,函数的定义域是正数集合,而对应关系则由图形表出(如图 1-1 中,x_0 对应 y_0).

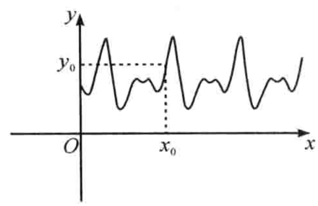


图 1-1

3. 用解析式表示

例如,半径为 R 的球的体积公式为 $V=\frac{4\pi R^3}{3}$,则 V 是 R 的函数,定义域为$(0,+\infty)$,对应关系是 $f:R\to\frac{4\pi R^3}{3}$.

注 有时为了方便,我们也用语言来表示函数,如某人身高是年龄的函数,某人的支出是收入的函数,某厂的利润是产量的函数等.

函数的各种表示法各有其特点,一般地,表格法较适用于定义域为有限数集的函数,图形法比较直观清楚,解析法比较精确严密且易于运算,而用语言表示一种函数则常常是对对象的一种定性的描述.

一般地,能用解析法表示出来的函数也能用图形法表示出来,但也有例外,如下面的函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数;}\\ 0, & x\text{ 为无理数,}\end{cases}$$

就很难用图形法完整地表示出来.反之一个能用图形法表示出来的函数也不一定能用解析法表示出来,比如一个人的心电图函数就很难用解析式表示出来.

本书所述的函数一般既能用解析法表示出来,也能用图形法表示出来(虽然有的函数用图形法表示出来还是比较困难).

第二节　复合函数与反函数

一、复合函数

对定义域分别为 A 与 B 的函数 f 与 g，如果 g 的值域与 A 之交集非空，即 $A\cap g(B)\neq\varnothing$，令 $C=\{x|x\in B$ 且 $g(x)\in A\}$，则对任意 $x\in C$，定义函数 fg 为

$$(fg)(x)=f[g(x)],x\in C.$$

函数 fg 称为函数 f 与 g 的**复合函数**.

习惯上，我们用 $f[g(x)](x\in C)$ 直接表示复合函数 $(fg)(x)$.

例如，设
$$y=f(x)=e^x,x\in[0,+\infty),$$
$$y=g(x)=\sin x,x\in[-\pi,\pi],$$
则
$$(fg)(x)=f[g(x)]=e^{\sin x},x\in[0,\pi],$$
$$(gf)(x)=g[f(x)]=\sin(e^x),x\in[0,\ln\pi].$$

由此例可见，两函数复合，一般不仅 $f[g(x)]\neq g[f(x)]$，而且它们的定义域都可以与原来的不一样.

函数经复合可以变得很复杂，其图形也难画得多.

如 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$ 是两个简单的函数，但其复合函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 就复杂得多. 它的图形如图 1-2 所示.

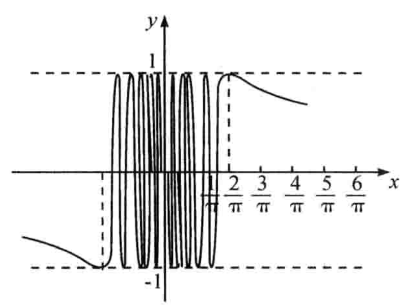


图 1-2

两个函数复合后仍是函数，它可与其他函数再次复合，于是就可能出现多重复合的情况，例如，
$$f(x)=e^x;g(x)=\sin x,h(x)=x+4;$$
则
$$f(gh)=f\{g[h(x)]\}=e^{\sin(x+4)}.$$

反之也可以把一个复合函数视为由几个简单函数复合而成的函数.

例如，函数 $y=\ln[\sin(x^2+1)]$ 可以看作是由 $y=\ln u,u=\sin v$ 与 $v=x^2+1$ 复合后表示的函数，并称 u,v 为**中间变量**，以区别于自变量 x，因变量 y.

二、反函数

一个函数自变量取不同的值但对应的函数值有可能相同. 如函数 $y=x^2,x\in[-4,4]$，它的值域为 $[0,16]$，则 $\forall\, y_0\in(0,16]$（这里 $\forall$ 表示“对任意的”，下同）都有定义域中的两个数 $x_0=\sqrt{y_0}$ 与 $x_1=-\sqrt{y_0}$ 与之对应.

但如果我们把函数 $y=x^2$ 的定义域限制在 $[0,4]$，则 $\forall\, y_0\in[0,16]$，都只有唯一的 $x_0=\sqrt{y_0}\in[0,4]$ 与之对应. 此时，就可以建立一个从 $[0,16]$ 到 $[0,4]$ 的对应关系：
$$x=\sqrt{y},y\in[0,16].$$

函数 $x=\sqrt{y}$ 就称为函数 $y=x^2, x\in[0,4]$ 的反函数. 它的定义域为 $[0,16]$，值域为 $[0,4]$.

习惯上，总是用 x 表示自变量，y 表示因变量，于是 $x=\sqrt{y}$ 可以改写成 $y=\sqrt{x}$，并称函数 $y=\sqrt{x}, x\in[0,16]$ 为函数 $y=x^2, x\in[0,4]$ 的反函数（我们今后讲的反函数都采用这种改写了的形式）. 但是经过改写后的函数 $y=\sqrt{x}$ 的图形与 $y=x^2$ 的图形已不一样，它们关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-3 所示.

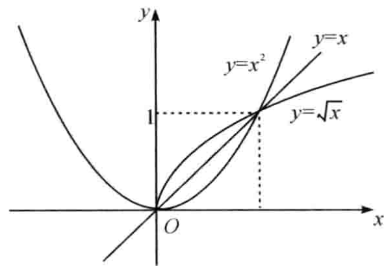


图 1-3

一般地，我们有下面反函数的定义：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 B，如果对任意 $y\in B$，都有唯一的 $x\in A$，使 $y=f(x)$，则可以定义一个从数集 B 到数集 A 的对应关系：

$$f^{-1}: y\to x，满足\ y=f(x)，$$

由此得到一个新的函数 $x=f^{-1}(y), y\in B$. 习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此此函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为数集 B，值域为数集 A，称它为函数 $y=f(x), x\in A$ 的**反函数**（此时就称 $y=f(x)$ 为 $y=f^{-1}(x)$ 的**直接函数**）.

对某个函数 $y=f(x)(x\in A)$ 来说，它的反函数未必存在. 在后面一节中，我们将叙述一个反函数存在的充分性定理.

但是对某个函数 $y=f(x)$（其定义域为 A，值域为 B）来说，如果其反函数 $y=f^{-1}(x)$（定义域为 B，值域为 A）存在，则有下列结论成立：

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图形与函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称.

(2) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数，即

$$f[f^{-1}(y)]=y, y\in B;$$

$$f^{-1}[f(x)]=x, x\in A.$$

注 上面的等式特别重要，由它衍生的特殊的等式如下：

当 $a>0$，且 $a\neq 1$ 时，由于 $y=a^x$（定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$）与 $y=\log_a x$（定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$）互为反函数，故有等式：

$$a^{\log_a y}=y, y\in(0,+\infty);$$

$$\log_a a^x=x, x\in(-\infty,+\infty).$$

又函数 $y=\sin x$（定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域为 $[-1,1]$）与函数 $y=\arcsin x$（定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 互为反函数，故有等式：

$$\sin[\arcsin(y)]=y, y\in[-1,1];$$

$$\arcsin[\sin(x)]=x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

对于函数 $y=\cos x$ 与 $y=\arccos x$、函数 $y=\tan x$ 与 $y=\arctan x$ 也有类似的等式.

第三节 函数的特性

函数的特性就是函数所具有的特殊的性质,研究一个函数的重要任务之一就是要研究这个函数的特性,如果对某一个函数的各种特性都把握好了,那么对这个函数也就大致“心中有数”了.

常见函数的特性有:单调性、奇偶性、周期性、有界性等.其中单调性、奇偶性、周期性在中学课本中已有所介绍,为完整起见这里再叙述一下,请注意一下某些地方的区别.

一、单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 A,$A_1\subseteq A$,若 $\forall x_1,x_2\in A_1$,且 $x_1<x_2$ 时,都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\,(f(x_1)<f(x_2)),$$

则称 $f(x)$在 A_1 上**单调增加(严格单调增加)**.

类似地,有**单调减少**与**严格单调减少**的概念.

一个函数如果在某集合 C 上单调增加或单调减少,就称这个函数在集合 C 上具有单调性.一个函数如果在集合 C 上是严格单调增加或严格单调减少的,就称这个函数在集合 C 上具有严格的单调性.如果此时 C 是区间,就称 C 是单调区间.

要注意一个函数的单调性与所考虑的区间密切相关,一个函数可以不在它的定义域里单调增加或单调减少,但它可以在它的定义域的一个子集合上单调增加或单调减少.比如 $y=x^2$ 在它的定义域里不具有单调性,但它却在$(-\infty,0]$上严格单调减少,在$[0,+\infty)$上严格单调增加.

在整个实轴上既单调增加又单调减少的函数是常值函数 $y=c$.

按定义出发判断一个函数在哪些区间上是单调的并不容易,但本书第四章会提供给我们一个较方便的判断方法.

在集合 A 上单调的函数未必有反函数,但在集合 A 上严格单调的函数一定有反函数,我们有下面的定理.

定理 1.1 设函数 $f(x)$的定义域为 A,值域为 B,如果 $f(x)$在 A 上严格单调增加(或减少),则在值域 B 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$,$y\in B$,且 f^{-1} 在 B 上也是严格单调增加(或减少).

证 $\forall y\in B$,$\exists x\in A$(这里符号$\exists$表示“存在”,下同),使 $y=f(x)$,定义 $f^{-1}(y)=x$,我们证明这样定义的 f^{-1}确实是一个函数,这只要证明 f^{-1}的单值性就可以了.事实上,如果另有 x_1 使 $f^{-1}(y)=x_1$,则亦有 $y=f(x_1)$,这样 $f(x)=f(x_1)$,由于 f 是严格单调的,因此 $x=x_1$,即 f^{-1}确实是一个函数.

又假若 $f(x)$在 A 上是严格单调增加的,我们证明 f^{-1}在 B 上也严格单调增加.如若不然,则存在 y_1,y_2,虽有 $y_1<y_2$,但 $f^{-1}(y_1)\geqslant f^{-1}(y_2)$.现设 $x_1=f^{-1}(y_1)$,$x_2=f^{-1}(y_2)$,则 $x_1\geqslant x_2$,而 $y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$,由于 $f(x)$在 A 上是严格单调增加的,故又有 $y_1\geqslant y_2$,这与 $y_1<y_2$ 相矛盾.

二、奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，A 关于原点对称，如果 $\forall x\in A$，都有

$$f(-x)=f(x)\ (f(-x)=-f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 在定义域 A 上为**偶函数**(**奇函数**).

在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

在集合 A 上既是偶函数又是奇函数的函数是常数函数 $y=0$.

三、周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，若存在非零常数 T，使 $\forall x\in A$，都有 $x+T\in A$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**，显然如果 T 是 $f(x)$ 的周期，则 $2T$、$3T$ 等也是它的周期，在这些周期中，如果存在一个最小的正数，则这个最小的正数称为**最小正周期**，平时我们所说的函数的周期都是指最小正周期.

一个周期函数也许不存在一个最小的正周期，比如常值函数以任意非零数为周期，但它没有最小正周期.

设有集合 A，如果对任意非负常数 M，$\exists x\in A$，使不等式 $|x|\geqslant M$ 成立，则称集合 A 称为**无界集**.

任意一个周期函数的定义域必是一个无界集.

四、有界性

在中学期间，函数的有界性并没有作特别的强调，在高等数学里，函数的有界性却是一个非常重要的概念.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，$A_1\subseteq A$，若存在常数 M_1，使 $\forall x\in A_1$，都有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**有上界**，并称 M_1 是 $f(x)$ 在 A_1 上的一个上界. 如果若存在常数 M_2，使 $\forall x\in A_1$，都有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**有下界**，并称 M_2 是 $f(x)$ 在 A_1 上的一个下界. 如果若存在正常数 M，使 $\forall x\in A_1$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 A_1 上**有界**.

与函数的单调性一样，一个函数的有界性与所考虑的区间有关，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域中是无界的，但当 $a>0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$ 上有界. 又若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在数集 S 上有界，则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)\cdot g(x)$ 均在 S 上有界，但 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 就不一定在 S 上有界了.

不难证明，$f(x)$在A_1上有界的充分必要条件是$f(x)$在A_1上既有上界又有下界.

一个在其自然定义域上有界的函数称为**有界函数**.

关于复合函数的有界性，我们有下面的命题：

如果$f(x)$在数集A上有界，又$g(x)$在B上有定义，且$g(B)\subseteq A$，则$f[g(x)]$在B上有界.

因为函数$\sin x,\cos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$在整个实轴上有界，故对任意函数$g(x)$，复合函数$\sin[g(x)],\cos[g(x)],\arctan[g(x)],\operatorname{arccot}[g(x)]$都在$g(x)$的定义域上有界. 特别我们常用到下面的不等式：

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1,x\neq 0,x\in\mathbf{R};$$

$$\left|\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant 1,x\neq 0,x\in\mathbf{R};$$

$$\left|\arctan\frac{1}{x}\right|<\frac{\pi}{2},x\neq 0,x\in\mathbf{R};$$

$$\left|\operatorname{arccot}\frac{1}{x}\right|<\pi,x\neq 0,x\in\mathbf{R}.$$

设$\delta>0$，以2δ为区间长度，以x_0为中心的开区间称为x_0的δ**邻域**，用$U(x_0,\delta)$表示，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

称集合$\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$为$x_0$的**去心**$\delta$**邻域**，记为$\mathring{U}(x_0,\delta)$.

第四节　初等函数

在初中时，学习了正比例函数、反比例函数、一次函数与二次函数.

在高中时，又学习了指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

下列函数称为**基本初等函数**：

(1)常值函数$y=c,c\in\mathbf{R}$.

(2)幂函数$y=x^{\alpha},\alpha\in\mathbf{R}$.

(3)指数函数$y=a^{x},a>0,a\neq 1$.

(4)对数函数$y=\log_a x,a>0,a\neq 1$.

(5)三角函数$y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.

(6)反三角函数$y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$.

其中指数函数、对数函数、三角函数($y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$)的图形与性质在中学的教材中已有详述，这里不再重复. 下面将就其余函数的图形与性质作一概述.

1. 常值函数$y=c,c\in\mathbf{R}$.

常值函数的定义域为$\mathbf{R}$，值域为单元素集$\{c\}$，其图形是通过点$(0,c)$且平行于x轴的直线，其斜率为0.

2. 幂函数$y=x^{\alpha},\alpha\in\mathbf{R}$.

幂函数是“内容”最丰富的函数，由于α取值的不同，其图形与性质都有显著的不同. 某

“类”α 值对应着某“类”幂函数，搞清楚每一“类”幂函数的“代表性函数”，对于全盘掌握该函数有好处，对于后面内容的学习也大有裨益. 下面将对 α 作分“类”讨论.

(1)$\alpha=0$，此时幂函数为 $y=x^{0}$，由于 0^{0} 无意义，故此时的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 值域为 $\{1\}$.

(2)如果 α 是正有理数，即 $\alpha=\frac{m}{n}$(m,n 是互质的正整数).

1°. n 为奇数，而 m 也是奇数时，幂函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$. 且此幂函数为奇函数；n 为奇数，而 m 是偶数时，幂函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域 $[0,+\infty)$，且此幂函数为偶函数. 代表性函数为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$，此时指数小于 1，或 $y=x^{\frac{5}{3}}$，$y=x^{\frac{4}{3}}$，此时指数大于 1.

2°. n 为偶数时，此时 m 只能是奇数，幂函数 $y=x^{\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$. 代表性函数为 $y=x^{\frac{1}{2}}$，此时指数小于 1，或 $y=x^{\frac{3}{2}}$，此时指数大于 1.

(3)如果 α 是负有理数，即 $\alpha=-\frac{m}{n}$(m,n 是互质的正整数).

1°. n 为奇数，而 m 也是奇数时，此时幂函数 $y=x^{-\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且此幂函数是奇函数，代表性函数为 $y=x^{-\frac{1}{3}}$. n 为奇数，而 m 是偶数时，幂函数 $y=x^{-\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域 $(0,+\infty)$，且此幂函数是偶函数，代表性函数为 $y=x^{-\frac{2}{3}}$.

2°. n 为偶数时，此时 m 必是奇数，此时幂函数 $y=x^{-\frac{m}{n}}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，代表性函数为 $y=x^{-\frac{1}{2}}$.

(4)如果 α 是无理数，$y=x^{\alpha}$ 就定义为指数函数 $y=10^{x}$ 与对数函数 $\alpha\lg x$ 的复合函数，即 $y=x^{\alpha}\overset{def}{=}10^{\alpha\lg x}$(这里符号 $\overset{def}{=}$ 表示“定义为”或“记为”，下同)，此时定义域为 $(0,+\infty)$.

注　函数 $y=x^{2}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而值域为 $[0,+\infty)$，函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，值域亦为 $[0,+\infty)$，故 $y=x^{2}$ 与 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 不互为反函数. 但如果把函数 $y=x^{2}$ 的定义域定取为 $[0,+\infty)$，则此时 $y=x^{2}$ 与 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 就互为反函数.

由于任何幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\neq0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上都有定义，故当定义域取为 $(0,+\infty)$ 时，函数 $y=x^{\alpha}$ 就与 $y=x^{\frac{1}{\alpha}}$ 互为反函数.

幂函数的反函数还是幂函数.

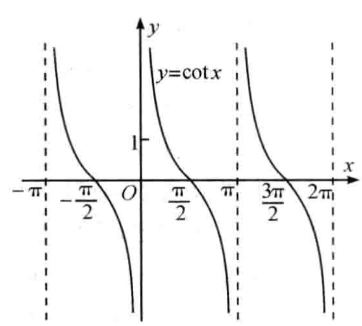


图 1-4

3. $\cot x$ 称为余切函数，定义为 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，其定义域为 $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(k\pi,(k+1)\pi)$，其图形如图 1-4 所示.

$\sec x$ 称为正割函数，定义为 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，其定义域为

$\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，其图形如 1-5 所示.

$\csc x$ 称为余割函数，定义为 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其定义域与余切函数的定义域一样，其图形如图 1-6 所示.

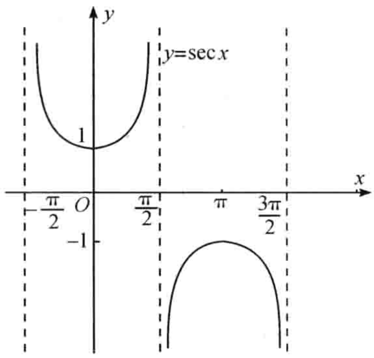


图 1-5

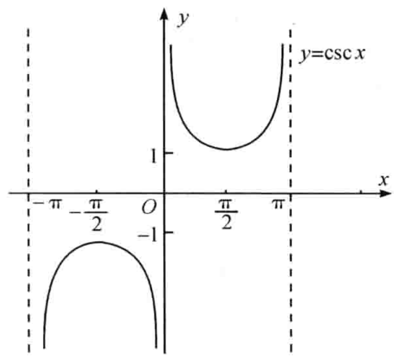


图 1-6

4. 当 $\sin x$ 的定义域限制在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，则 $\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调，此时 $\sin x$ 存在反函数，记为 $\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，其图形如图 1-7 所示.

当 $\cos x$ 的定义域限制在 $[0,\pi]$ 时，则 $\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调，此时 $\cos x$ 存在反函数，记为 $\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，其图形如图 1-8 所示.

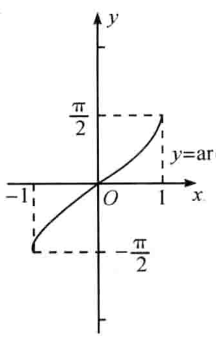


图 1-7

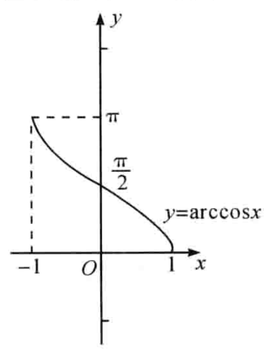


图 1-8

当 $\tan x$ 的定义域限制在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，则 $\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调，此时 $\tan x$ 存在反函数，记为 $\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，其图形如图 1-9 所示.

当 $\cot x$ 的定义域限制在 $(0,\pi)$ 时，则 $\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上严格单调，此时 $\cot x$ 存在反函数，记为 $\operatorname{arccot} x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$，其图形如图 1-10 所示.