普通高等教育“十二五”规划教材

概率统计学习指导

主　编　李长青　张野芳

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

概率统计学习指导

主　编　李长青　张野芳

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是为“概率论与数理统计”课程的学习而编写的指导性教材,全书总结归纳了“概率论与数理统计”课程的基本概念、基本理论与基本方法。对课程中一些容易混淆的概念与问题以问答的形式给出了详细的分析与阐述。通过对不同类型与数量众多的例题的解析,使读者能够较好地掌握概率论与数理统计的思想方法与解题技巧。本书对历年硕士研究生入学考试中概率统计部分的试题作了详细的分析。此外,本书还配备了自测练习题和综合测试题供读者选用。

本书可作为高等学校理工科“概率论与数理统计”课程的配套教材,也可作为考研复习的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计学习指导/李长青,张野芳主编. —杭州:浙江大学出版社,2013.8

ISBN 978-7-308-11976-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①李… ②张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 184453 号

概率统计学习指导

主　编　李长青　张野芳

责任编辑　邹小宁

文字编辑　吴琦骏

封面设计　朱　琳

出　　版　浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)

(网址:http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州教联文化发展有限公司

印　　刷　杭州钱江彩色印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　19

字　　数　462 千

版 印 次　2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-11976-4

定　　价　35.00 元

前 言

“概率论与数理统计”是高等院校理工科专业的一门重要的基础课,也是全国硕士研究生理工专业入学考试数学科目的重要组成部分。

为了帮助读者更好地学习这门课程,我们根据多年的教学经验编写了本书。本书旨在帮助广大读者理解基本概念,掌握基本知识点,学会解题方法,掌握解题技巧,提高分析问题与解决问题的能力,为后续课程的学习和将来的硕士研究生入学考试打下良好的数学基础。

本书共分8章,与一般的“概率论与数理统计”教材前8章相对应,为了配合教学过程,内容编排与教材基本一致,分章节展开,使读者在使用上更加方便。内容的选取充分参考了硕士研究生入学考试大纲,使之能够覆盖考研大纲对概率统计部分所要求全部知识点。在每节的例题解析部分对大部分题目都给出了解题分析,帮助读者分析解题思路。在疑难问题解析部分,对一些较难理解的概念、方法等给出了详细的解释,以便帮助学生准确理解和掌握这些概念和方法。此外,本书还对历年硕士研究生入学考试中概率统计部分的试题及考点进行了分析。

掌握数学概念与方法的最好途径就是做题,为此,每章都配备了自测练习题。在使用本书时,学生应尽力多做一些练习题,通过练习真正掌握每章的内容。对于本书提供的例题,读者应先对题目进行独立思考,然后再查阅解答过程,最好能够提出不同于书中的解题方法。本书最后附有5套综合测试题,读者可以通过这些测试题进行自我测试检查,以检验对本课程的掌握程度。

本书由李长青、张野芳主编。参加本书编写的老师还有李同军、曹金亮、沈最意、陈丽燕、卢海玲等。本书编写过程中,数理与信息学院领导及数学系的各位同仁给予了热情的关怀与帮助,杨晓平教授审阅了全书并提出了许多宝贵的建议。在编写中我们参考了大量同类教材、学习指导书和网络资料,在此不一一列出,谨对这些参考书及资料的原作者表示衷心感谢。

感谢浙江海洋学院教务处对本书在立项及出版等各方面的大力支持与帮助。

编　者

2013年5月于浙江舟山群岛新区浙江海洋学院

目 录

第1章　事件与概率

基本要求

1. 理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握随机事件之间的关系与运算.

2. 理解事件频率、概率的概念,掌握概率的基本性质,会用这些性质进行概率的计算.

3. 理解概率的古典定义,会计算简单的古典概率.

4. 理解条件概率的概念,掌握概率的乘法定理、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式,会用这些公式进行概率的计算.

5. 理解事件的独立性的概念,会用事件的独立性进行乘积事件的概率计算.理解重复独立试验的概念,掌握计算有关事件概率方法.

重点与难点

☞**重点:**

1. 随机事件及事件间的运算关系.

2. 概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

3. 乘法定理及条件概率公式.

4. 事件的独立性及其应用.

☞**难点:**

1. 概率的公理化定义及概率的基本性质的应用.

2. 古典概率的计算及条件概率、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式的应用.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　内容提要

1. 随机试验

在概率论中,试验是一种广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也可以认为是一种试验.它具有以下三个特征,通常用记号 E 表示.

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)每次试验的可能结果不止一个,但能事先明确试验的所有可能的结果;

(3)进行一次试验之前,不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间

随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为样本空间,记为 Ω.样本空间的元素,也就是 E 的每个结果(也就是基本事件),称为样本点,一般用小写字母 ω 表示.

3. 随机事件

样本点的某个集合称为随机事件,简称为事件,并用大写字母 A, B, C 等表示.称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现.通常把事件分为两大类,第一类是不可能再分的事件(样本点的单点集),这类事件称为基本事件;另一类是由基本事件复合而成的事件,称之为复合事件.在每次试验中,一定发生的事件叫作必然事件,记作 Ω.而一定不发生的事件叫作不可能事件,记作 $\varnothing$.

应该指出的是:无论是必然事件、随机事件还是不可能事件,都是相对于"一定条件"而言的.条件发生变化,事件的性质也发生变化.例如:抛掷两颗骰子,"出现的点数之和为3"及"出现的点数之和大于3"都是随机事件.若同时抛掷4颗骰子,"出现的点数之和为3"则是不可能事件,而"出现的点数之和大于3"则是必然事件了.

必然事件和不可能事件虽然不具备随机性,但是为了讨论问题方便,通常将必然事件和不可能事件看成是特殊的随机事件.

4. 事件间的运算关系

(1)包含关系:若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称 A 为 B 的子事件,记作 $A \subset B$.

(2)相等关系:若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3)和事件:事件 A 与事件 B 至少有一个发生,记为 $A \cup B$,称为 A 与 B 的和事件.它是由 A 与 B 中的所有样本点构成的集合.有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,即 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生;可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,表示事件 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少有一个发生.

(4)积事件:事件 A 与事件 B 同时发生,记为 $A \cap B$,称为 A 与 B 的积事件.它是由事件 A 和 B 中公共的样本点构成的集合.有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,即 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$,表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生;可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i \cap \cdots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,表示事件 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生.

(5)差事件:事件 A 与 B 的差事件记作 $A-B$,表示事件 A 发生而事件 B 不发生.

(6)互不相容(互斥)事件:若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容.一般的,若 $\forall i \neq j$,

$A_iA_j=\varnothing$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$,则称 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots$ 为两两互不相容.

(7)互逆事件:若事件 A , B 满足: $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称事件 A 与 B 为互逆事件(或对立事件).称 B 为 A 的逆事件,记作 $\bar{A}$.

(8)事件间的运算所满足的规律.

①交换律: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.

②结合律: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

③分配律: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(9)德·摩根律(对偶原理): $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$,$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.对于任意有限多个随机事件,有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\bar{A}_i;\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\bar{A}_i .$$

熟练掌握事件间的运算关系是正确计算随机事件概率的基础.在研究实际问题时,往往需要考虑各种可能的事件,而这些事件通常是相互关联的.研究事件之间的关系,进而研究这些事件概率之间的关系,就能够利用简单事件的概率去推算较复杂事件的概率.因此,读者应当正确理解事件间的关系及运算,对具体问题具体分析,善于把某些复杂事件用若干个简单事件的和或积来表示.

1.1.2　典型例题解析

例 1-1-1　写出下列随机试验的样本空间及表示下列事件的样本点集合:

(1)5 件产品中有 2 件是不合格品,从中任取 3 件,所取产品中至少有两件合格品;

(2)一口袋中装有 4 个红球、3 个黑球及 2 个白球,从中任取一球,(ⅰ)取得的是黑球.(ⅱ)取得的是红球.

【分析】　在写出样本空间时要注意不能遗漏样本点也不能多列样本点,表示具体事件时要根据事件的定义把符合条件的样本点列出来.

解　(1)由样本空间的定义知,试验的所有可能结果构成样本空间,设 1,2,3 分别表示 3 件合格品,4,5 分别代表 2 件不合格品,以 $(i,\ j,\ k)$ ($1\leqslant i<j<k\leqslant 5$)表示取出的三件产品,则样本空间可表示为

$$\Omega=\{(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 3,\ 5),(1,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 5),\ (3,\ 4,\ 5)\},$$

若用 A 表示“取出的 3 件产品中至少有两件合格品”,则有

$$A=\{(1,\ 2,\ 3),\ (1,\ 2,\ 4),\ (1,\ 2,\ 5),\ (1,\ 3,\ 4),\ (1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)\} .$$

(2)设 1,2,3,4 分别表示 4 个红球,5,6,7 分别表示 3 个黑球,8,9 分别表示 2 个白球,则样本空间为

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

设 A 表示事件“任取一球得黑球”, B 表示事件“任取一球得红球”,则有

$$A=\{5,\ 6,\ 7\},\ B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} .$$

例 1-1-2　设试验 E :抛掷一枚硬币三次.写出该试验的样本空间,若用 A 表示事件“正面至多出现一次”,写出 A 的表达式.

解 本试验的结果有“正面向上”和“反面向上”两种,用 H 表示“正面向上”,用 T 表示“反面向上”,则试验结果是由正面 (H) 和反面 (T) 组成的长度为 3 的序列,样本空间为

$$\Omega=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}, A=\{HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

例 1-1-3 设 E 为观察舟山地区 10 月份的平均气温.写出该试验的样本空间,若用 A 表示事件“平均气温小于 20 ℃”,写出 A 的表达式.

解 用 ω_x 表示 10 月份平均气温为 x ℃,则有

$$\Omega=\{\omega_x|-\infty<x<+\infty\}, A=\{\omega_x|-\infty<x<20\}.$$

例 1-1-4 在数学系的学生中任意选取一名学生,若用 A 表示事件“被选出的学生是男生”,B 表示事件“被选出的学生是三年级学生”,C 表示事件“被选出的学生是运动员”.

(1)叙述事件 $AB\bar{C}$ 的意义;

(2)在什么条件下 $ABC=C$ 成立?

(3)何时关系式 $C\subset B$ 是正确的?

(4)在什么情况下 $\bar{A}=B$ 成立?

【分析】 用简单事件表示复杂事件时要充分考虑事件的运算关系及事件运算所满足的规律,例如事件的包含关系、相等关系、互逆关系,事件运算的结合律、分配律、对偶原理等.

解 (1)事件 $AB\bar{C}$ 表示选出的学生是三年级的男生,但不是运动员.

(2) $ABC=C$ 成立等价于 $C\subset AB$,这表示全体运动员都是三年级的男生.

(3)当全系的运动员都是三年级的学生时,$C\subset B$ 是正确的.

(4)当全系的女生都在三年级,并且三年级的学生全是女生时,$\bar{A}=B$ 成立.

例 1-1-5 试问 $(A\cup B)-B=A$ 是否一定成立?

解 由事件的运算规律知,$(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}\cup B\bar{B}=A\bar{B}$,由于 B 是任意事件,所以,等式 $A=A\bar{B}$ 不一定成立,即 $(A\cup B)-B=A$ 不一定成立.容易知道,当 $AB=\varnothing$ 时,因 $A\bar{B}=A-B=A-AB=A-\varnothing=A\Omega=A$,所以有 $(A\cup B)-B=A$,否则不行,例如:设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B=\{2, 5, 8, 10\}$,则有 $(A\cup B)-B=\{1, 3, 4, 6\}\neq A$.

例 1-1-6 甲、乙、丙三人各射一次靶,用 A 表示事件“甲中靶”,B 表示事件“乙中靶”,C 表示事件“丙中靶”.用 A, B, C 表示下列各事件:(1)“甲未中靶”;(2)“甲中靶而乙、丙未中靶”;(3)“三人中恰好有一人中靶”;(4)“三人中至少有一人未中靶”.

解 利用事件的运算规律,有:(1) $\bar{A}$;(2) $A\bar{B}\bar{C}$;(3) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$;(4) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

例 1-1-7 化简下列事件:(1) $(\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)$;(2) $A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}$;(3) $\overline{(\bar{A}\bar{B}\cup C)}\,\overline{\bar{A}C}$.

【分析】 在这些待化简的表达式中都含有事件的逆事件,在化简过程中应该注意到对任意事件 A,等式 $A\cup\bar{A}=\Omega$ 总成立,另外还要考虑对偶原理的使用.

解:利用事件的运算规律,有

(1) $(\bar{A}\cup\bar{B})(\bar{A}\cup B)=\left[\bar{A}(\bar{A}\cup B)\right]\cup\left[\bar{B}(\bar{A}\cup B)\right]=(\bar{A}\cup\bar{A}B)\cup(\bar{A}\bar{B}\cup\bar{B}B)$

$$=\bar{A}\cup(\bar{A}\bar{B}\cup\varnothing)=\bar{A}\cup\bar{A}\bar{B}=\bar{A}\ .$$

(2) $A\bar{B}\cup\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B}=A\bar{B}\cup(\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B})=A\bar{B}\cup\left[\bar{A}(B\cup\bar{B})\right]$

$$=A\bar{B}\cup\left[\bar{A}\Omega\right]=A\bar{B}\cup\bar{A}$$

$$=\overline{\bar{A}\bar{\bar{B}}\cap A}=\overline{(\bar{A}\cup B)\cap A}=\overline{AB}\ .$$

(3)由事件运算的对偶律,有

$$\overline{(\bar{A}\bar{B}\cup C)\overline{AC}}=\overline{(\bar{A}\bar{B}\cup C)}\cup AC=\overline{\bar{A}\bar{B}}\bar{C}\cup AC=(\bar{\bar{A}}\cup\bar{\bar{B}})\bar{C}\cup AC$$

$$=(A\cup B)\bar{C}\cup AC=(A\bar{C}\cup B\bar{C})\cup AC=A\bar{C}\cup B\bar{C}\cup AC$$

$$=(A\bar{C}\cup AC)\cup B\bar{C}=A(\bar{C}\cup C)\cup B\bar{C}=A\cup B\bar{C}\ .$$

1.2 频率与概率

1.2.1 内容提要

1. 频率

设 E 为随机试验, A 为其中任一事件, n_A 为事件 A 在 n 次重复试验中出现的次数,则称 $f_n(A)=n_A/n$ 为 n 次试验中事件 A 出现的频率,其中 n_A 称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的频数.当 n 增大时, $f_n(A)$ 逐渐稳定于某一个确定值 $P(A)$ 上,称 $P(A)$ 为频率的稳定值.频率 $f_n(A)$ 具有以下性质.

(1)非负性:对任意事件 A , $f_n(A)\geqslant 0$;

(2)规范性: $f_n(\Omega)=1$;

(3)可加性:若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容,则有 $f_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

频率在一定程度上反映了事件 A 发生可能性的大小,但在一定条件下做重复试验,其结果可能是不一样的,因此不能用频率代替概率.不过由大数定律知道,频率总能稳定在某个固定数 $P(A)$ 的周围.

2. 概率

概率的统计定义:在相同条件下做大量重复试验,称在重复试验中事件 A 发生的频率的稳定值 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

概率的公理化定义:设 E 为随机试验, Ω 为它的样本空间,对 Ω 中的每一个事件 A 都赋予一个实数,记为 $P(A)$,且满足

(1)非负性:对任意事件 A , $P(A)\geqslant 0$;

(2)规范性: $P(\Omega)=1$;

(3)可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互不相容,则有 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率 $P(A)$ 有如下的基本性质：

① $P(\varnothing)=0$;

② 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$;

③ 对于任一事件 A ,有 $P(A)=1-P(\bar{A})$;

④ 若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,且有 $P(A)\geqslant P(B)$;

⑤ (加法公式)对于任意事件 A , B ,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.对三个事件 A_1, A_2, A_3 有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

加法公式可以推广到任意有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,且有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

1.2.2 典型例题解析

例 1-2-1 从某鱼池中取100条鱼,作上记号后再放入该鱼池中.现从该池中任意捉来40条鱼,发现其中两条有记号,问池内大约有多少条鱼?

【分析】 因为从池中任意捉来的40条鱼中有两条是有记号的,故捉到有记号鱼的频率为2/40 ,根据频率的性质,该比值可以作为捉到有记号鱼的概率的近似值,由此对池中鱼的数量作大致的估计.

解 设池内有 n 条鱼,则从池中捉到一条有记号鱼的概率为 $100/n$,又任意捉到的40条鱼中两条有记号,故捉到有记号鱼的频率为 $2/40$,由频率与概率的关系,有 $100/n\approx 2/40$,由此解得 $n=2000$,即池内大约有2000条鱼.

例 1-2-2 设对于事件 A , B , C 有

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4,\ P(AB)=P(BC)=0,\ P(AC)=1/8,$$

求 A , B , C 至少出现一个的概率.

【分析】 求 A , B , C 至少出现一个的概率即求 $P(A\cup B\cup C)$,因此可应用概率的加法公式,但这需要先求出 $P(ABC)$.

解 由于 $ABC\subset AB$,从而由性质4知, $P(ABC)\leqslant P(AB)=0$,又由概率的定义知 $P(ABC)\geqslant 0$,从而 $P(ABC)=0$.因此,由概率的加法公式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-0-\frac{1}{8}+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

例1-2-3 设 A, B 为随机事件,已知 $P(A)=0.7$,$P(A-B)=0.3$,求 $P(\overline{AB})$.

【分析】 要求出 $P(\overline{AB})$,可由概率的性质3先求出 $P(AB)$.

解 由于 $A=AB\cup(A-B)$,且 $AB\cap(A-B)=\varnothing$,所以

$$P(A)=P(AB)+P(A-B),$$

从而

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.4.$$

由概率性质3得

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6.$$

例1-2-4 设 A, B 为两个随机事件,证明:

$$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

【分析】 要证明结论,需将 $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$ 用 $P(A)$, $P(B)$ 表出,并利用概率的相关性质和公式进行相应的转换即可.

证
$$\begin{aligned}1-P(\bar{A})-P(\bar{B})&=1-[1-P(A)]-[1-P(B)]\\&=P(A)+P(B)-1=P(AB)+P(A\cup B)-1\\&=P(AB)-[1-P(A\cup B)]\leqslant P(AB),\end{aligned}$$

由于 $AB\subset A\cup B$,故 $P(AB)\leqslant P(A\cup B)$,又因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,且 $P(AB)\geqslant 0$,从而有

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

综合以上可得

$$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B).$$

例1-2-5 (1)已知事件 A, B 同时发生时事件 C 发生,证明下列概率不等式.

$$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

(2)设事件 A_1, A_2, A_3 都满足 $A_i\subset A$ ($i=1, 2, 3$),证明下列概率不等式.

$$P(A)\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.$$

【分析】 在证明概率不等式时要充分考虑概率的单调性,即如果 $B\subset A$,则有不等式 $P(B)\leqslant P(A)$ 成立.

证 (1)由事件的运算关系知,此时 $AB\subset C$,从而有 $P(C)\geqslant P(AB)$.又由加法公式及 $0\leqslant P(A+B)\leqslant 1$,可得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1,$$

由此可得

$$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

(2)由于 $A_i\subset A$ ($i=1, 2, 3$),故 $(A_1A_2)A_3\subset A$ 成立,利用(1)得到的结果及加法公式,有 $P(A)\geqslant P(A_1A_2)+P(A_3)-1$ 及 $P(A_1A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1+A_2)$ 成立,由此可得

$$\begin{aligned}P(A)&\geqslant P(A_1A_2)+P(A_3)-1=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cup A_2)+P(A_3)-1\\&\geqslant P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-2.\end{aligned}$$

例 1-2-6 在某城市中,共发行 A, B, C 三种报纸,在这城市的居民中,订购 A 的占45%,订购 B 的占35%,订购 C 的占30%,同时订购 A 及 B 的占10%,同时订购 A 及 C 的占8%,同时订购 B 及 C 的占5%,同时订购 A, B, C 的占3%,试求下列百分率:(1)只订购 A 的;(2)只订购 A 及 B 的;(3)只订购一种报纸的;(4)正好订购两种报纸的;(5)至少订购一种报纸的;(6)不订任何报纸的.

【分析】 居民订购报纸可以看成随机事件,所求的百分率也就是相应事件的概率.利用事件的运算关系把复杂事件用简单事件来表示,然后利用相关的概率公式求得概率.

解 依旧用 A, B, C 表示该市居民订购报纸 A, B, C 的事件,利用事件的运算关系,有

(1)事件"只订购 A 种报纸"可表示为 $A\bar{B}\bar{C}$,从而有

$$\begin{aligned}P(A\bar{B}\bar{C})&=P\left[A(\overline{B\cup C})\right]=P\left[A-(B\cup C)\right]=P\left[A-A(B\cup C)\right]\\&=P(A)-P\left[A(B\cup C)\right]=P(A)-P(AB\cup AC)\\&=P(A)-\left[P(AB)+P(AC)-P(ABC)\right]\\&=P(A)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)\\&=0.45-0.10-0.08+0.03=0.30.\end{aligned}$$

(2)只订购 A 及 B 的事件可表示为 $AB\bar{C}$,从而有

$$P(AB\bar{C})=P(AB-C)=P(AB-ABC)=P(AB)-P(ABC)=0.10-0.03=0.07.$$

(3)只订购一种报纸的事件可表示为 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$,由此可得

$$P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=P(A\bar{B}\bar{C})+P(\bar{A}B\bar{C})+P(\bar{A}\bar{B}C),$$

又

$$\begin{aligned}P(\bar{A}B\bar{C})&=P\left[B-(A\cup C)\right]=P\left[B-B(A\cup C)\right]=P(B)-P(AB\cup BC)\\&=P(B)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)=0.35-0.10-0.05+0.03=0.23,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}C)&=P\left[C(\overline{A\cup B})\right]=P\left[C-(A\cup B)\right]=P\left[C-C(A\cup B)\right]\\&=P(C)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=0.30-0.08-0.05+0.03=0.20,\end{aligned}$$

从而有

$$P(A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C)=0.30+0.23+0.20=0.73.$$

(4)正好订购两种报纸的事件可表示为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$,从而有

$$P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC),$$

容易求得

$$P(A\bar{B}C)=P(AC-B)=P(AC-ABC)=P(AC)-P(ABC)=0.08-0.03=0.05,$$

$$P(\bar{A}BC)=P(BC-A)=P(BC-ABC)=P(BC)-P(ABC)=0.0.05-0.03=0.02,$$

由此即得

$$P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)=0.07+0.05+0.02=0.14.$$

(5)至少订购一种报纸的事件可表示为 $A\cup B\cup C$,由加法公式可得

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=0.45+0.35+0.30-0.10-0.08-0.05+0.03=0.90.\end{aligned}$$

(6)不订购任何报纸的事件可表示为 $\overline{A\cup B\cup C}$,由逆事件的概率计算公式可得

$$P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.90 = 0.10 .$$

例 1-2-7 对于任意事件 A , B ,证明等式: $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$.

【分析】 利用 B 及 $\bar{B}$ 将 A 表示为互不相容事件的和事件的形式,然后利用加法公式表示事件 A 的概率.

证 因为 $A = A\Omega = A(B \cup \bar{B}) = AB \cup A\bar{B}$,显然 $(AB)(A\bar{B}) = \varnothing$,根据概率的加法公式,有

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) ,$$

移项即得

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) .$$

1.3 等可能概型(古典概型)

1.3.1 内容提要

1. 古典概型的定义

具有以下三个共同特征的试验称为古典概型(等可能概型)试验,即:

(1)试验的样本空间所含基本事件的个数只有有限个;

(2)每个基本事件出现的机会都是相等的;

(3)在任一次试验中有且仅有一个基本事件发生.

一般的,设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$,若 $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n)$,称这一概型为古典概型(等可能概型).若 A 为 Ω 中的事件, A 中包含的样本点数为 $n(A)$,样本点总数为 $n(\Omega)$,则事件 A 概率计算公式为

$$P(A) = \frac{A\text{ 中所包含的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} .$$

在古典概型下计算事件 A 的概率时,先计算样本空间中样本点的总数 $n(\Omega)$,然后计算事件 A 中所包含的样本点数 $n(A)$.在选取样本空间时要特别注意所选取的样本空间中每个样本点出现的可能性必须相同,并在这个前提下使所选取的样本空间尽可能的小,便于计数.在计算古典概型概率时往往要用到排列与组合公式来计数.

【注 1】 判断是否是古典概型的关键是基本事件发生的等可能性,而有限性比较容易判断.对于古典概型的计算,需特别注意的是把事件 A 所包含的基本事件的个数数准、数全.对比较简单的情况,可以把样本空间中的基本事件全部列出来,当样本空间中的基本事件不能全部列出时,就要求具有抽象分析的能力,并且对排列、组合的基本知识要清楚,事件间的关系及运算要熟练.只有如此,才能较好地掌握古典概型的计算问题.

【注 2】 古典概型大致可归纳为以下三类问题:

① 摸球问题(可用于产品的随机抽样问题等);

② 分房(占位、排队等)问题;

③ 随机取数问题.

2. 基本排列组合公式

(1)乘法原理与加法原理.

乘法原理 设完成过程 A 需要有 n 个步骤,第 i 个步骤又包含 m_i 种不同的方法,则完成过程 A 共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同方法.

加法原理 设完成过程 A 有 n 种不同方式,若第 i 种方式包含 m_i 种不同方法,那么完成过程 A 一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法.

(2)基本排列公式.

① 在有放回选取中,从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列,这种排列称为有重复排列,其总数共有 n^r 种.

② 在不放回选取中,从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列,其总数为

$$A_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),$$

这种排列称为选排列,当 $r=n$ 时称为全排列.

③ n 个元素的全排列数为 $P_n=n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$.

(3)基本组合公式.

① 从 n 个元素中取出 r 个元素而不考虑其顺序,称为组合,其总数为

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

② 若 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$,把 n 个不同的元素分成 k 个部分,第一部分有 r_1 个,第二部分有 r_2 个,…,第 k 部分有 r_k 个,则不同的分法共有 $\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$ 种.

3. 几何概率

如果一个试验具有以下两个特点:

(1) Ω 是一个几何区域,且其大小可以计量(长度、面积、体积等),并把 Ω 的度量记为 $\mu(\Omega)$.

(2)向 Ω 中任意投掷一点,该点落在 Ω 中任意位置都是等可能的,亦即,若事件 A 表示点落在 Ω 的某一子区域内(该区域也用 A 表示),则事件 A 的概率与 A 的计量 $\mu(A)$ 成正比,而与 A 在 Ω 中所处的位置、形状无关.

若 A 为 Ω 中任一事件,且设事件 $A=\{$投掷点落在区域 A 内$\}$,则

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

这种概型称为几何概型,由此求得的概率称为几何概率.

1.3.2 典型例题解析

例 1-3-1 袋中有 a 个黑球,b 个白球,它们除颜色不同外,其他方面没有差别,现在把球随机地一个个摸出来,求第 k 次摸出的一个球是黑球的概率 $(1\leqslant k\leqslant a+b)$.

【分析】 这是古典概型的问题,解这类题目首先要正确计数,然后利用古典概型概