SHIBIANHANSHULUN ZHUANTISHULI YU JIEDU

21 面向21世纪普通高等教育规划教材

实变函数论专题梳理与解读

主编　徐新亚

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

实变函数论专题梳理与解读

主编　徐新亚

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书共分7章，每一章由四个部分组成：内容小结、要点分析、例题选讲、习题解答.其中，在“例题选讲”中精选了若干有针对性的例题，每一个例题都对所给的条件进行分析，寻找和发现解题的思路，给出了详尽的解题过程；在“习题解答”中详细解答了徐新亚编写的《实变函数论》中的所有习题.

全书选题多样，难度配置合理，注重分析推理，题目叙述清晰、论证严密，注意对分析能力与研究能力的培养，尤其是对创造性能力的培养.本书可作为综合性大学、理工科大学、高等师范院校数学系数学、概率统计和应用数学专业学生的学习辅助用书.对从事数学分析、实变函数教学工作的青年教师是一部实用的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论专题梳理与解读/徐新亚主编. -- 上海：同济大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5608-5752-7

Ⅰ.①实… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①实变函数论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第015859号

实变函数论专题梳理与解读

主　编　徐新亚

责任编辑　张　莉　　**责任校对**　徐春莲　　**封面设计**　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　大丰市科星印刷有限责任公司

开　　本　787 mm×960 mm　1/16

印　　张　13

印　　数　1—1 500

字　　数　260 000

版　　次　2015年1月第1版　　2015年1月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5752-7

定　　价　32.00元

前　言

作为现代数学的一个重要分支,实变函数有着非常广泛的应用.我们编写本书的目的是为学生在学习该门课程时提供一定的参考,也可帮助青年教师更好、更有信心地教好这门课.对应于徐新亚编写的《实变函数论》(同济大学出版社,2010年3月),本书也分为7章,各章的标题也保持一致.每一章由四个部分组成:(1)内容小结.将原书的主要内容进行归纳,方便读者学习和复习.(2)要点分析.指出本章的重点和难点,引导读者尽快抓住主要知识点,避免纠缠一些细枝末节.(3)例题选讲.这是本书的主要部分,我们在此处花费了相当大的精力和心血.为了让读者尽快适应实变函数这门课程的解题思路,领会解题分法,我们参考了目前国内外流行的许多同类型教材(详见书后"参考文献"),从中精选了若干有针对性的习题作为例题,每一个例题的解题过程都有三步,即"分析"、"证明"和"注".其中"分析"主要根据题目所给的条件进行分析,寻找和发现解题的思路;"证明"中给出了详尽的解题过程;"注"通常指出解题中可能遇到的一些枝节问题和注意事项.(4)习题解答.详细解答了徐新亚编写的《实变函数论》中的所有习题.

全书的主要特点是:所选题型多样,按难度进行梯次配置,注重分析推理,使读者打开思路,开阔视野;题目叙述清晰,论证严密;解答难题时,注意对分析能力与研究能力的培养,尤其是对创造性能力的培养;注重一般测度论和一般积分理论的论述,有利于概率统计方向的学生对学习研究能力的培养;关注实变函数与数学分析的联系和区别,注意引导读者用数学分析的思想理解实变函数,又用实变函数的思想来认识数学分析;内容、例题的训练与难题解答连贯起来,以使读者融会贯通,获得较强的数学素养,在学习和研究上呈现出一个飞跃.

本书可作为综合性大学、理工科大学、高等师范院校数学系数学、概率统计

和应用数学专业学生的学习辅助用书.对从事数学分析、实变函数教学工作的青年教师是一部实用的教学参考书.

在本书的编写过程中,得到了我校数学科学学院的领导和师生的大力支持和无私帮助,对此表示由衷的感谢。特别要感谢柏传志教授、周友士教授、连秀国教授和熊成继、郭嵩、王晓晶、史红波、杜波、葛静、刘英、杨丹丹、马强、朱守丽、严定军、李旭等老师,正是他们的鼓励和奉献,才有了我们将这本书完成的决心和动力.

由于作者水平有限,加之编写过程仓促,书中一定存在着疏漏和错误,恳请各位专家、同仁和广大师生不吝赐教.如能得到您的指正,我们将视为莫大的荣幸和鞭策.

编　者

2014 年 9 月

目　　录

第 1 章　可数集合与不可数集合

一、内容小结

1. 集合的概念

集合是数学中最原始的概念之一，它不能用其他概念来定义，就目前来讲，我们只能作这样的描述："在一定范围内的个体事物的全体，当它们被看做一个整体时，我们把这个整体称为一个**集合**，其中的每个个体事物就叫作该集合的**元素**."设 A 是一个集合，x 是集合 A 的元素，我们称 x 属于 A，记为 $x \in A$；x 不是集合 A 的元素，我们称 x 不属于 A，记为 $x \notin A$ 或 $x \overline{\in} A$.

2. 描述一个集合，通常有**列举法**和**描述法**两个方法.

$$A = \{a, b, c, \cdots\},$$
$$A = \{a \mid a \text{ 满足条件 } P\}.$$

此外，我们有时还用图形来表示集合，称为**图示法**.

3. 两个集合间的关系

当 A 的每一个元素都属于 B 时，我们称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$，读作"A 含于 B"或"B 包含 A". 我们约定：空集(记为$\varnothing$)是任何集合的子集.

设 A 与 B 是两个集合，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A = B$.

4. 集合的运算

(1) 和(或并)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$
$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{存在某个 } \alpha \in \Lambda, \text{使 } x \in A_\alpha\},$$

这里的 Λ 被称为指标集.

(2) 积(或交)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = \{x \mid \text{对一切的 } \alpha \in \Lambda, \text{都有 } x \in A_\alpha\}.$$

(3) 差集

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \overline{\in} B\},$$

差集 $A-B$ 也可记为 $A\backslash B$. 当 B 是 A 的子集时，差集 $A-B$ 又叫做集合 B 关于集合 A 的**余集**，记为 $C_A B$.

当不会引起误会时，$C_A B$ 可记为 CB 或 B^C.

(4) 有限集、无限集

当一个集合中的元素为有限个时，我们称之为有限元集或**有限集**，空集可以看做一个有限集. 不是有限集的集合被称为**无限集**(也叫无穷集合).

(5) 上限集、下限集、极限集

设 $\{A_n\}$：$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一个集列，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x \mid \text{存在无穷多个 } A_n\text{，使 } x \in A_n\}$$

与

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\{x \mid \text{当 } n \text{ 充分大以后，都有 } x \in A_n\}$$

分别称为集列 $\{A_n\}$ 的**上限集**与**下限集**，也叫集列 $\{A_n\}$ 的上极限与下极限.

如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$，则称集列 $\{A_n\}$ **收敛**，此时，该集列的上限集(也就是下限集)称为**极限集**，记之为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

5. 集合的对等

(1) 设 A, B 是两个非空集合，如果这两个集合间存在某个一一对应关系，则称 A 与 B **对等**，记为 $A \sim B$. 约定两个空集对等. 当两个集合对等时，我们称这两个集合具有相同的基数(亦称势、浓度)，基数是有限集合中元素个数的推广.

(2) 设 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 为两个集列，若 $\{A_n\}$ 中的任意两集合不相交，$\{B_n\}$ 中的任意两集合也不相交，且 $A_n \sim B_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

(3) 一个集合是无穷集合的充分并且必要的条件是该集合能与它的一个真子集对等.

6. 集合的特征函数

设 X 是一个固定的非空集合，$A \subset X$，令

$$\varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A.\end{cases}$$

函数 $\varphi_A(x)$ 称为集合 A 的**特征函数**.

特征函数的性质:设 X 是一个固定的非空集合, A, B, $A_\alpha(\alpha \in \Lambda)$, A_n ($n = 1, 2, \cdots$) 都是 X 的子集,则有

(1) $A = X \Leftrightarrow \varphi_A(x) \equiv 1$, $A = \varnothing \Leftrightarrow \varphi_A(x) \equiv 0$;

(2) $A \subset B \Leftrightarrow \varphi_A(x) \leqslant \varphi_B(x)$, $A = B \Leftrightarrow \varphi_A(x) = \varphi_B(x)$;

(3) $\varphi_{\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}(x) = \max\limits_{\alpha\in\Lambda} \varphi_{A_\alpha}(x)$, $\varphi_{\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha}(x) = \min\limits_{\alpha\in\Lambda} \varphi_{A_\alpha}(x)$;

(4) $\varphi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \varphi_{A_n}(x)$, $\varphi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \varphi_{A_n}(x)$;

(5) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在的充分必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{A_n}(x)$ 存在,且当极限存在时,有

$$\varphi_{\lim\limits_{n\to\infty} A_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{A_n}(x).$$

7. 集合的乘积与关系

(1) 设 A, B 是两个集合,称集合

$$\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

为集合 A 与 B 的**乘积**,也称**叉积**或**笛卡儿(Descartes)积**,记为 $A \times B$. n 个集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 的乘积定义为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

$A \times A \times \cdots \times A$ 简记为 A^n.

(2) 集合 $A \times B$ 的一个子集 R 称为 $A \times B$ 上的一个**二元关系**, $A \times A$ 上的一个二元关系简称为集合 A 上的一个二元关系. 对 $A \times B$ 上的一个二元关系 R,若 $x \in A$, $y \in B$,且 $(x, y) \in R$,则称 x, y 具有关系 R,记为 xRy.

(3) 设 R 是集合 A 上的一个二元关系,若 R 满足下列三个条件:

自反性　对任何集合 $x \in A$,都有 xRx;

对称性　若 xRy,则 yRx;

传递性　若 xRy, yRz,则 xRz.

则称 R 是集合 A 上的一个等价关系.

8. 伯恩斯坦定理

(1) 伯恩斯坦(Bernstein)定理　设 A, B 是两个非空集合,如果 A 对等于 B 的一个子集, B 又对等于 A 的一个子集,那么, A 与 B 对等. 用集合的基数来叙述,即:若 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$,则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

(2) 推论　设 $A \supset B \supset C$,若 $A \sim C$,则 $A \sim B \sim C$.

9. 可数集合

凡与正整数集合 $\mathbf{N}$ 对等的集合都称为**可数集合**或**可列集合**(也叫**可数集**或**可**

列集).

可数集合的性质：

(1) 任何无穷集合一定包含一个可数子集；

(2) 设 A 是一个可数集，B 为至多可数集，则 $A \cup B$ 为可数集；

(3) 设 A_i $(i=1, 2, \cdots)$ 都是可数集，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集；

(4) 设 A 的元素由 n 个符号确定，每个符号各自独立取遍一个可数集（这些可数集可以不相同），即

$$A=\{a_{x_1 x_2 \cdots x_n} \mid x_i \in A_i \sim \mathbf{N}, i=1, 2, \cdots, n\},$$

则 A 是可数集.

10. 不可数集合

(1) 不是可数集合的无限集合被称为**不可数集合**或不可列集. 例如开区间 $(0, 1)$ 中的全体实数的集合是一个不可数集；

(2) 凡与 $(0, 1)$ 对等的集合统称为**连续集合**或**连续集**，连续集的基数称为**连续基数**，记为 c；

(3) 至多 c 个连续集的并集是连续集.

二、要点分析

1. 上限集、下限集是本章的一个难点. 理解这两个概念的关键在于搞清楚这两个概念的实质，即上限集是由该集列中**无穷多个**集合的公共元素构成的集合，而下限集则是由该集列中**几乎所有**集合的公共元素构成的集合. 需要指出的是：**几乎所有**一定是**无穷多个**，但反之则未必，因此，下限集是上限集的子集.

2. 可数集合与不可数集合是本章的重点. 我们需要掌握可数集合的几个等价定义：

(1) 凡与正整数集合 $\mathbf{N}$ 对等的集合都是可数集合；

(2) A 是可数集合当且仅当 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，即可将 A 的所有元素不重不漏地排成一列；

(3) A 是可数集当且仅当 A 对等于它的任何一个无穷子集.

3. 可数集合是“最小”的无穷集合.

4. 常见的可数集合有正整数集和有理数集，不可数集合中用得最多的是连续集（与实数集对等的集合）.

5. 证明一个集合是可数集常用的方法有：一是将该集合中元素排成一个无穷序列；二是证明该集合与一个已知的可数集（比如有理数集）对等；三是利用有限个

或可数个可数集合的并集仍是可数集；四是证明该集合的元素可有 n 个相互独立的指标所确定，并且每一个指标取遍一个已知的可数集.

6. 证明一个集合是连续集最常用的方法是建立该集合与实数轴上的一个区间之间的一个一一对应关系.

7. 没有最大的基数，即对任何无穷集 A，都存在集合 B，使集 A 的基数严格小于集合 B 的基数.

8. 有限个、可数个或 c 个（c 表示连续集合的基数）连续集合的并一定是连续集.

三、例题选讲

例 1　证明：$N\times N\sim N$.

分析　需找出二维空间中的正整数点集 $N\times N$ 与正整数集 N 之间的一个一一对应.

证明　设 $f:N\times N\to N$，

$$(i,\ j)\mapsto 2^{i-1}(2j-1).$$

易证 f 是一个一一对应，故 $N\times N\sim N$.

注　f 之所以是一一对应，是因为对任一正整数 n，存在唯一的非负整数 p，q，使得

$$n=2^p\cdot q,$$

而使 $p=i-1$，$q=2j-1$ 的 i，j 也是唯一的.

例 2　设 E 是无穷集，证明：存在 E 中的可数子集 e，使得 $E\backslash e\sim E$.

分析　由于 e 是 E 中的可数子集，则 $E\backslash e$ 比 E 少可数个元素. 我们需要做的工作是找到 $E\backslash e$ 与 E 之间的一个一一对应 f，使得 E 中另一可数子集 E_1（一定存在）的元素对应到 e，再让 $E\backslash(e\cup E_1)$ 的元素自我对应.

证明　(1) 若 E 是可数集，可设 $E=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$ 取 $e=\{a_{2n-1}\}$，令

$$f:E\to E\backslash e,$$
$$a_n\mapsto a_{2n},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

(2) 若 E 是非可数的无穷集，则 E 含有可数子集 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\}$. 取 $e=\{a_{2n-1}\}$，令

$$f: E \to E \backslash e,$$
$$a_n \mapsto a_{2n}, \; n = 1, 2, \cdots;$$
$$x \mapsto x (x \neq a_n, \; n = 1, 2, \cdots).$$

容易验证,以上两种情况下所设的映射 f 都是 E 到 $E\backslash e$ 的一一对应. 证毕.

注 若 E 是非可数的无穷集,e 可以是 E 的任一可数子集. 事实上,由于 $E\backslash e$ 仍是无穷集,故 $E\backslash e$ 含有可数子集 E_1,设

$$e = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, \; E_1 = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\},$$

令

$$f: E \to E \backslash e,$$
$$f(x) = \begin{cases} b_{2n-1}, & x = a_n, \\ b_{2n}, & x = b_n, \\ x, & \text{其他}. \end{cases}$$

则易见 f 是 E 到 $E\backslash e$ 的一一对应.

例 3 设 E 是实数轴 R 上的可数集,证明:存在 $x_0 \in R$,使得 $E \cap (E + \{x_0\}) = \varnothing (A + B = \{x + y | x \in A, \; y \in B\})$.

分析 若 $E \cap (E + \{x_0\}) \neq \varnothing$,则必有 $a, b \in E$,使得 $a = b + x_0$,即 a 与 $b + x_0$ 是同一点,此时,$a - b = x_0$. 于是,R 的任一点都是 E 中两点的差,这不可能!

证明 设 $E = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$,令

$$A = \{a_n - a_m | n, \; m \in N, \; n \neq m\},$$

由于 A 的元素含有两个互相独立的指标 n 和 m,且各自跑遍一个可数集(n 是正整数,m 则取自从正整数集中去掉一点 n 后的集合),故 A 是可数集.

既然 $\overline{\overline{A}} = a$,故存在 $x_0 \in R$,使 $x_0 \notin A$,即

$$x_0 \neq a_n - a_m, \; n, \; m \in N, \; n \neq m,$$

从而 $E \cap (E + \{x_0\}) = \varnothing$. 证毕.

注 由于 R 的基数是 c,因此 R 中的任何可数集都不可能"填满"R.

例 4 证明:不存在集合 E,其幂集 2^E 可数.

分析 分有限集和无穷集两种情况讨论.

证明 若 E 是有限集,$\overline{\overline{E}} = n$,则$\overline{\overline{2^E}} = 2^n$,即 E 的幂集 2^E 也是有限集.

若 E 是无穷集,则 E 含可数子集. 由于可数集的幂集的基数是 c,故 E 的幂集的基数一定不小于c. 证毕.

注　这个命题实际上是“任何集合都不与其幂集对等”的另一种描述.

例 5　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明:$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right) = \{a\}$.

分析　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义为:对任意的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,对任意满足 $n > N$ 的正整数 n,都有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 注意到上面定义等价于:对任意正整数 k,存在正整数 N,对任意满足 $n > N$ 的正整数 n,都有 $a_n \in \left(a - \dfrac{1}{k},\ a + \dfrac{1}{k}\right)$ (或 $a \in \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right)$). 用集合相等的思想 ($A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$).

证明　由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,故对任意正整数 k,存在正整数 N,对任意满足 $n > N$ 的正整数 n,都有 $a \in \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right)$. 因此 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right) \supset \{a\}$.

另一方面,设 $b \neq a$,即 $b \notin \{a\}$,由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq b$,则存在正整数 k_0,对任意正整数 N,都存在满足 $n_0 > N$ 的正整数 n_0,使得 $|a_{n_0} - b| > \dfrac{1}{k_0}$,即

$$b \notin \left(a_{n_0} - \frac{1}{k_0},\ a_{n_0} + \frac{1}{k_0}\right),$$

这说明 $b \notin \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right)$,故 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \dfrac{1}{k},\ a_n + \dfrac{1}{k}\right) \subset \{a\}$. 所以,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k},\ a_n + \frac{1}{k}\right) = \{a\}.$$

注　证明集合 $A \subset B$ 的分法有两个:(1) 证明:若 $x \in A$,则 $x \in B$; (2) 证明:若 $x \notin B$,则 $x \notin A$.

例 6　设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$ 是两个正整数列,若有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

则称 B 是比 A 高阶的数列. 现设 S 是由某些正整数列构成的数列族,满足条件:对任一数列 A,都存在 $B \in S$, 使 B 是比 A 高阶的数列. 证明:S 是不可数集.

分析　考虑反证法. 若 S 可数,则 S 的元素可排成一列,进而构造特殊的数列

得出矛盾.

证明 反证法.若 S 是可数集,则不妨设 S 的元素为: $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$, 其中每一 A_n $(n=1, 2, \cdots)$ 都是数列,利用 A_n 的项构造数列 B,使其在 S 中没有高阶数列.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\}, \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}, \cdots\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

作自然数列 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$, 其中

$$b_1=a_{11},\ b_2=\max\{a_{ij}\,|\,i,\ j=1,\ 2\},\ \cdots,$$
$$b_n=\max\{a_{ij}\,|\,i,\ j=1,\ 2,\ \cdots n\},\ \cdots,$$

则在 S 中不存在比 B 阶高的数列.矛盾.所以 S 是可数集.证毕.

注 在证明与集合有关的否定性结论时,经常要构造一个特殊的元素.

例 7 设 $\{A_n\}$ 是这样的一个集列:

$$A_{2m+1}=\left[0,\ 2-\frac{1}{2m+1}\right],\ A_{2m}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2m}\right],\ m=1,\ 2,\ \cdots$$

试求 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限.

分析 注意到集列 $\{A_n\}$ 的两个子列 $\{A_{2m+1}\}$ 和 $\{A_{2m}\}$ 分别是单调增加和单调减少的,并且区间 $[0,\ 1]$ 是集列 $\{A_n\}$ 中所有集合的子集,因此,区间 $[0,\ 1]\subset \varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$, $A_{2m+1}\subset \varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$(这是因为 A_{2m+1} 中的元素一定含于 A_{2k+1}, $k=m+1,\ m+2,\ \cdots$).

解 由于闭区间 $[0,\ 1]$ 含于每一个 A_n,而开区间 $(1,\ 2)$ 中的任一点 x,必有正整数 N,使得对一切满足 $m>N$ 的自然数,都有

$$1+\frac{1}{2m}<x\leqslant 2-\frac{1}{2m+1}$$

成立.这表明当 $m>N$ 时, $x\,\overline{\in}\,A_{2m}$, $x\in A_{2m+1}$, 换言之,对于开区间 $(1,\ 2)$ 中的任一点 x,有无穷多个奇指标的集合含有 x,同时有无穷多个偶指标的集合不含有 x,即 $\{A_n\}$ 中不含 x 的集合不会是有限个.显然,区间 $[0,\ 2)$ 以外的点都不属于任何 A_n,故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 2),\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0,\ 1].$$

注　如果集列$\{A_n\}$有两个子列具有相反的增减性，在确定该集列的上限集和下限集时，基本上可以这样考虑：具有递减性的那个子列的交集可能是下限集，而具有递增性的那个子列的并集可能是上限集.

例 8　对每个正整数 n，A_n 表示分母为 n 的有理数的全体，试证明：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = Q,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = Z.$$

分析　按上限集和下限集的定义来证.

证明　显然，$Z \subset A_n \subset Q$，故 $Z \subset \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset Q$，这里 Q 为有理数集，Z 为整数集.

对任一有理数 $\dfrac{p}{q}$（p，q 为互质的整数，且 $q>0$），由于$\dfrac{p}{q}=\dfrac{mp}{mq}\in A_{mq}$，$m=1$，$2$，…，故$\dfrac{p}{q}$ 属于无穷多个 A_n，即 $\dfrac{p}{q}\in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，所以，$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = Q$.

对任一 $r\in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则$r$是有理数，即 $r=\dfrac{p}{q}$（p，q 为互质的整数，且 $q>0$），且存在正整数 N，对一切的 $n\geqslant N$，都有$\dfrac{p}{q}\in A_n$. 现取一质数 $n\geqslant N$，必有整数 m，使得

$$\frac{p}{q}=\frac{m}{n},$$

从而 $np=mq$，所以，n 必能被 q 整除. 但 n 是质数，因此，$q=1$，即$\dfrac{p}{q}=p\in Z$. 这就证明了 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = Z$.

注　证明集合 $A=B$，就是要证明 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

例 9　设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,\ b]$上的函数列，$E\subset[a,\ b]$，若

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,\ b]\setminus E}(x),\ x\in[a,\ b],$$

并记 $E_n=\{x\in[a,\ b] \mid f_n(x)\geqslant \dfrac{1}{2}\}$，证明：$\underline{\lim_{n\to\infty}} E_n = [a,\ b]\setminus E$.

分析　按下限集定义，结合集合相等的定义证明.

证明　由题意，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x\in[a,\ b]\setminus E, \\ 0, & x\in E. \end{cases}$$

故当 $x \in [a, b] \backslash E$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$，故由极限的保号性知，只要正整数 n 充分大，就有 $f_n(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$，从而 $x \in E_n$. 这说明 $\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n \supset [a, b]\backslash E$. 又若 $x \notin [a, b]\backslash E$，即 $x \in E$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$，同样，由极限的保号性知，只要正整数 n 充分大(即存在正整数 N，对一切满足 $n > N$ 的正整数 n)，就有 $f_n(x) < \dfrac{1}{2}$，从而 $x \notin E_n$. 这说明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n \subset [a, b]\backslash E$. 所以，$\lim\limits_{n\to\infty} E_n = [a, b]\backslash E$.

注 在本例中，$\varliminf\limits_{n\to\infty} E_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} E_n = [a, b]\backslash E$.

例 10 证明 $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

分析 (1)无限多个集合的交集 $\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$ 的定义是：$x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$ 当且仅当对任一 $\alpha \in I$，都有 $x \in B_\alpha$. (2)证明两个集合 $A = B$ 的基本方法是证明 $A \subset B$ 且 $B \subset A$.

证明 先证 $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$. 设 $x \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha)$，则 $x \in A$ 或 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$. 若 $x \in A$，则对任一 $\alpha \in I$，都有 $x \in A \cup B_\alpha$，从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$；若 $x \overline{\in} A$，则 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$，因而对任一 $\alpha \in I$，都有 $x \in B_\alpha$，于是，$x \in A \cup B_\alpha$，仍有 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$. 所以，$A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

再证 $A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) \supset \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$. 设 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$，则对任一 $\alpha \in I$，都有 $x \in A \cup B_\alpha$，得 $x \in A$ 或 $x \in B_\alpha$. 若 $x \in A$，则 $x \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha)$；若 $x \overline{\in} A$，则对任一 $\alpha \in I$，都有 $x \in B_\alpha$，得 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha$，于是，$x \in A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha)$. 所以，$A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) \supset \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$.

综上知，$A \cup (\bigcap\limits_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha\in I}(A \cup B_\alpha)$ 成立.

例 11 试求下列集合 E 的基数：

(1) E 是公差为正整数的等差整数列的全体.

(2) 平面上的直线族 $E = \{3x - 2y = 6 \mid x, y \in Q\}$.

分析 这两个集合的元素都含有有限个独立的指标，且每个指标各自独立地跑遍一个可数集，因此它们都是可数集.

解 (1) 由题意，E 的元素可表示为 $a + (n-1)d$，其中 a 为整数，n, d 为正整数，换言之，a, n, d 可各自独立地跑遍一个可数集，故 E 是可数集.

(2) E 的元素有两个独立的指标 x, y，且每个指标各自独立地跑遍可数集 Q，故 E 是可数集.

注 判别一个集合是可数集常用的分法有：(1)验证它与一个已知的可数集(如正整数集、有理数集)对等；(2)能将其所有元素不重不漏地排列出来；(3)可将