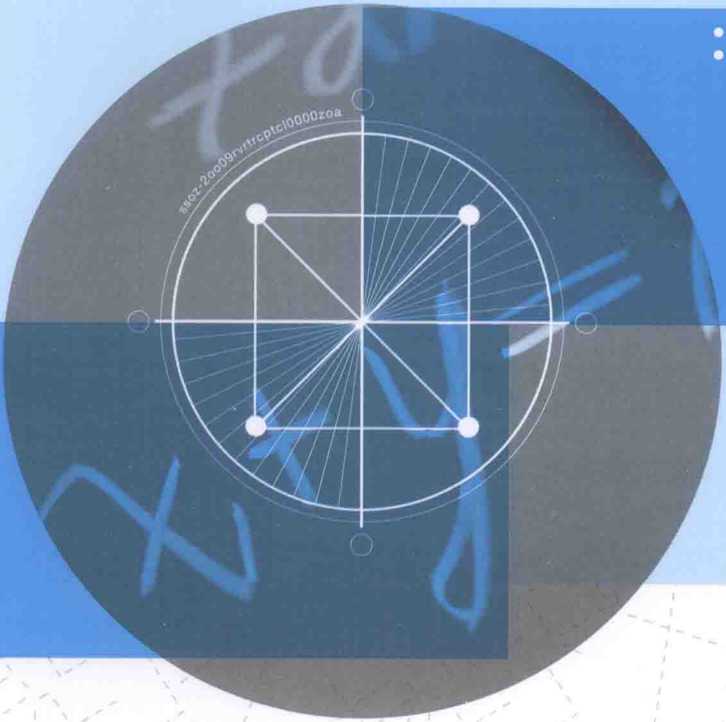
应用技术型高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　黄玉娟　李爱芹
副主编　曹海军　刘吉晓
主　审　尹金生



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育“十二五”规划教材

高等数学（下册）

主　编　黄玉娟　李爱芹

副主编　曹海军　刘吉晓

主　审　尹金生

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本教材是以国家教育部高等工科数学课程教学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》为标准，以培养学生的专业素质为目的，充分吸收多年来教学实践和教学改革成果而编写的。

本教材分上、下两册。上册内容包括一元函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程。下册内容包括向量代数、空间解析几何、多元函数及其微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。

本教材内容全面、结构严谨、推理严密、详略得当，例题丰富，可读性、应用性强，习题足量，难易适度，简化证明，注重数学知识的应用性，可作为普通高等院校“高等数学”课程的教材，也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册 / 黄玉娟，李爱芹主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2014.8

应用技术型高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5170-2336-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①黄… ②李… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第188549号

策划编辑：宋俊娥　责任编辑：李　炎　加工编辑：石永峰　封面设计：李　佳

书 名	应用技术型高等教育“十二五”规划教材 高等数学（下册）
作 者	主　编　黄玉娟　李爱芹 副主编　曹海军　刘吉晓 主　审　尹金生
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经 售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	铭浩彩色印装有限公司
规 格	170mm×227mm　16 开本　14 印张　280 千字
版 次	2014 年 12 月第 1 版　2014 年 12 月第 1 次印刷
印 数	0001—6000 册
定 价	26.00 元

前　言

我国高等教育从20世纪90年代末开始实行由精英教育向大众化教育的过渡，历经近二十年的历程，教育规模不断扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，同时也冲击着高等数学课程在大学阶段的教育问题。传统的高等数学课程的特点是逻辑严密、理论抽象、实际应用少，在大众教育阶段，招收学生的数学基础参差不齐，导致大量学生学习起来感到跨度大，内容过于抽象，从而造成“学不会、用不了”的状况。而对于高等院校的理工科类学生来讲，高等数学课程是一门非常重要的基础课程，它理论严谨，应用广泛，不仅为学生学习专业课和后续课程提供基础保障，同时在培养学生抽象思维、逻辑思维、综合分析问题能力等方面都具有非常重要的作用。

本教材面对大众化教育阶段的现实局面，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，迎合当下教育部调整教育机构的主要思路——引导部分地方本科高校以社会需求为导向转型发展，本着“难度降低、注重实用”的原则确定高等数学的内容框架和深度。本教材的编写者具有多年丰富的教学实践经验，在编写时，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识和实际应用有机结合起来，主要有以下几个特点：

（1）体现应用型本科院校特色，根据理工科各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系。

（2）在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接。在引入概念时，注意概念产生的实际背景，采用提出问题－讨论问题－解决问题的思路，逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣，同时增强学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力。

（3）例题和习题的选择上难易适度、层次分明，大部分章节都配有实际应用问题，并在每一章后面配有复习题，主要是用于锻炼学生对本章知识点的综合应用能力。

（4）在每一章的结束部分，附加了历史上在数学方面有杰出贡献的伟大数学家的生平简介，通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家坚韧不拔的追求真理、维护真理的科学精神。

（5）本教材结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。由于抽象理论的弱化，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材内容分上、下册，包括函数的极限，一元函数微积分学，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数等内容。

（6）为了能更好地与中学数学衔接，在上册的附录Ⅰ中对三角函数的常用公式做了全面总结，并在附录Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ中分别介绍了二阶、三阶行列式、各种类型的不定积分公式、常用的一些平面曲线及其图形，供需要的学生查阅参考。

本教材适合普通应用型本科院校理工类各专业学生使用，也可作为研究生入学考试的参考书。

参加本教材编写的有黄玉娟（第 1、5 章），李爱芹（第 3 章），曹海军（第 10 章），刘吉晓（第 11 章），王海棠（第 2 章），董爱君（第 4 章），孙光辉（第 6 章），廉立芳（第 7 章），刘菲菲（第 8 章），李文婧（第 9 章）。全书由黄玉娟、李爱芹统稿，多次修改定稿。最后由尹金生副教授为本教材审稿。在编写过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心支持本书的编写、修改工作的教师表示衷心的感谢。

限于编写水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2014 年 10 月

目　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

解析几何是用代数的方法来研究几何问题．空间解析几何是多元函数微积分的基础．在研究空间解析几何时，向量代数是一个有力的工具．

本章首先简单介绍向量的概念及向量的线性运算，然后再建立空间直角坐标系，利用坐标讨论向量的运算，并以向量为工具讨论空间解析几何的有关内容．

7.1　向量及其线性运算

7.1.1　向量的概念

在日常生活中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等等，这一类量叫做**向量**（或**矢量**）．

在数学上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$（如图 7.1 所示）．有时也用一个粗体字母或者用一个上面加箭头的字母来表示向量，例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{b},\vec{F}$ 等．需要特别说明的是，我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**．

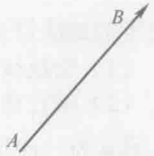


图 7.1

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ **是相等**的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的．

向量的大小叫做向量的**模**．用 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的模．特别地，模为1的向量称为**单位向量**．模为0的向量称为**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$．规定零向量的方向为任意方向．

设有两个非零向量 a,b，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$．规定不超过 π 的 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **的夹角**（如图 7.2 所示），记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$．如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值．特别地，当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

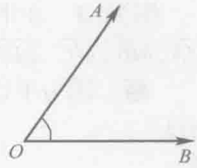


图 7.2

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC（如图 7.3 所示），那么向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．这种作出两向量之和的方法叫做向量相加的**三角形法则**．

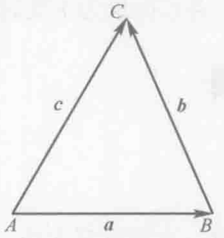


图 7.3

向量的加法符合下列运算规律：

（1）交换律 $\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$．

（2）结合律 $\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$．

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$．由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$．

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，并且规定：它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反，当 $\lambda=0$ 时为零向量．

向量与数的乘法符合下列运算规律：

（1）结合律 $\quad \lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（2）分配律 $\quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$．

向量的加法与数乘运算统称为**向量的线性运算**．

设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，把与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{e}_a$，则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$．

例 7.1.1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$，这里 M 表示平行四边形对角线的交点（如图 7.4 所示）．

解 因为平行四边形的对角线互相平分，

所以 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即 $$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

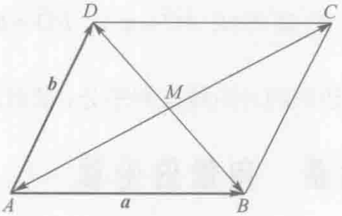


图 7.4

于是 $$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

由于 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

由向量与数的乘法，可以得到两向量平行的充要条件，即有

定理 7.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明略.

定理 7.1.1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，确定一条数轴，需要给定一个点、一个方向及单位长度. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此只需给定一个点及一个单位向量就能确定一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 Ox（如图 7.5 所示），则对于数轴上任一点 P，对应着一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 由于 $\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{e}$，故存在唯一的实数 x，使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}$，$\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

图 7.5

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e} \leftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此定义实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

习题 7.1

1. 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，给出下列等式成立的条件：

（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；（2）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

（3）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\big||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|\big|$；（4）$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

2. 设 $\boldsymbol{u}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}$.

3. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.

4. 设平面上的一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形.

7.2 空间直角坐标系　向量的坐标

7.2.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中，建立了平面直角坐标系，通过平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组对应起来. 同样，为了把空间的任一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系.

在空间选定一点 O 作为原点，过原点 O 作三条两两垂直的数轴，分别标为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴），z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**. 它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$（如图 7.6 所示）. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴是铅垂线. 它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\dfrac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

三条坐标轴中每两条坐标轴所在的平面 xOy，yOz，zOx 称为**坐标面**. 三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分称为一个**卦限**，共八个卦限. 其中，$x>0$，$y>0$，$z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限在 xOy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限按逆时针方向确定（如图 7.7 所示）.

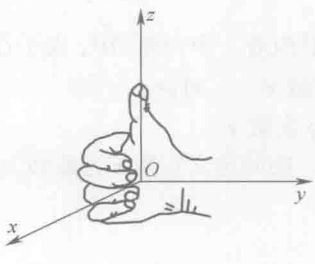


图 7.6

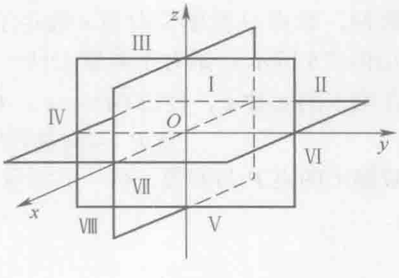


图 7.7

定义了空间直角坐标系后，来建立空间的点和有序数组之间的对应关系. 设点 M 是空间中任意一点（如图 7.8 所示），过点 M 分别作垂直于 x 轴，y 轴，z 轴的平面，它们与 x 轴，y 轴，z 轴分别交于 P，Q，R 三点. 设 P，Q，R 三点在三条坐标轴上的坐标分别为 x，y，z，那么点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z). 反过来，给定一个有序数组 (x,y,z)，可依次在 x 轴，y 轴，z 轴上找到坐标分别为 x，y，z

的三点 P , Q , R . 过这三点分别作垂直于 x 轴, y 轴, z 轴的平面，这三个平面的交点就是有序数组所确定的唯一的点 M .

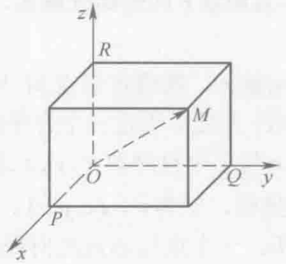


图 7.8

这样，通过空间直角坐标系，在空间中的点 M 和有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系，这组数 x , y , z 称为**点 M 的坐标**. 其中 x , y , z 依次称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 坐标为 x , y , z 的点 M 通常记作 $M(x,y,z)$.

坐标轴和坐标面上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，在 x 轴上的点，其纵坐标 $y=0$ ，竖坐标 $z=0$ ，于是其坐标为 $(x,0,0)$. 同理， y 轴上的点的坐标为 $(0,y,0)$ ； z 轴上的点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x,y,0)$ ， yOz 面上的点的坐标为 $(0,y,z)$ ， zOx 面上的点的坐标为 $(x,0,z)$.

7.2.2 向量的坐标表示

向量的运算仅用几何方法来研究有很多不便，我们还需要将向量代数化，即建立向量与有序数组之间的对应关系，通过数组之间的运算来解决向量的运算问题.

任意给定空间一向量 $\boldsymbol{r}$ ，作向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$ ，设点 M 的坐标为 (x,y,z). 过点 M 作三坐标轴的垂直平面，与 x 轴, y 轴, z 轴的交点分别为 P , Q , R （如图 7.9 所示）. 由向量的加法法则，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}\,.$$

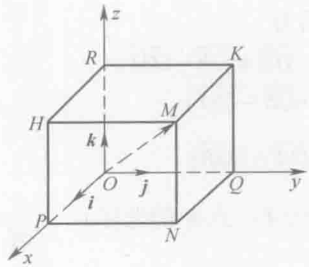


图 7.9

以 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量，则有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

从而 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式**. $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴, y 轴, z 轴方向的**分向量**.

从上面可以看出，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 与 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，从而确定了 x, y, z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x, y, z，也就确定了点 M 与向量 $\boldsymbol{r}$. 于是，点 M, 向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x, y, z 之间存在一一对应关系，我们称有序数 x, y, z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. 向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

7.2.3 利用坐标作向量的线性运算

利用向量在直角坐标系中的坐标表达式，就可以把向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算用坐标来表示.

设
$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z), \quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),$$
即
$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}.$$
利用向量加法的交换律与结合律以及向量数乘运算的结合律与分配律，有
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k},$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k} \quad (\lambda\text{ 为实数}).$$
即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$
由此可见，对向量进行加、减及与数相乘，只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

例 7.2.1 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 7.10 所示. 因为
$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$
所以
$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$
因此
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

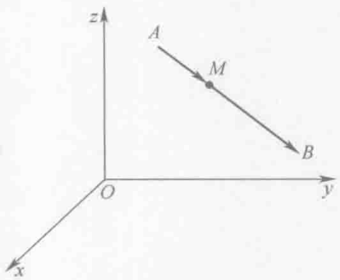


图 7.10

把 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 A，点 B 的坐标）代入，得到