"十二五"普通高等教育规划教材

线性代数

主编　崔润卿　刘　娟

国防工業出版社
National Defense Industry Press

线性代数

主　编　崔润卿　刘　娟
参　编　王彩虹　张颖芳　赵延霞　耿世佼

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书依据工科类本科“线性代数”课程的教学基本要求编写而成.作者根据多年的教学经验进行了多次讨论、反复修改,力求使内容注重实际应用,注重线性代数与几何的结合,注重解决问题的矩阵方法,注重教学实验.全书系统地介绍了线性代数的基本知识.

本书主要内容包括矩阵运算及其应用,行列式,矩阵的秩与线性方程组,向量空间,相似矩阵及二次型,线性空间与线性变换,MATLAB与线性代数实验.各章均配有适量习题,书末附有习题答案.

本书可作为普通高等学校非数学类专业本科教材,也可供高等学校教师和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/崔润卿,刘娟主编.—北京:国防工业出版社,2014.9
ISBN 978-7-118-09531-9

Ⅰ.①线...　Ⅱ.①崔...②刘...　Ⅲ.①线性代数
Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第129901号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售

*

开本787×1092　1/16　印张12　字数320千字
2014年9月第1版第1次印刷　印数1—1000册　定价35.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777　　发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755　　发行业务:(010)88540717

前　言

线性代数是数学的一个分支,主要处理线性关系问题,它的研究对象是向量、向量空间(或称线性空间)、线性变换和有限维的线性方程组.“以直代曲”是人们处理很多数学问题时一个很自然的思想,很多实际问题的处理,最后往往归结为线性问题.由于科学研究中的非线性模型通常可以被近似为线性模型,这使得线性代数被广泛地应用于数学、物理学等自然科学以及计算机等技术学科,也被应用于管理学等社会科学中.线性代数在国民经济的许多领域都有着广泛的应用,是一门基本的和重要的学科.

本书是根据教育部本科数学基础课程教学基本要求,结合作者长期从事线性代数、高等代数、矩阵论等的教学经验和体会,按照重视实例的具体要求来编写的.主要内容有矩阵、行列式、线性方程组、向量空间、二次型、线性空间、线性变换等.随着近几年教育大发展并且线性代数教学内容增加、要求提高的新形势,有必要对线性代数的某些内容进行特别的处理.本书具有以下特色:

(1) 重视看似简单的概念.在众多教材中,很多概念往往一带而过,本书在这些概念后也给出了例子和简单的练习,易于自学.

(2) 重矩阵轻行列式,行列式的引入不是从排列、对换开始来定义,消除学生的某些误解.

(3) 利用 MATLAB 解线性代数问题.线性代数中的计算往往很繁杂,利用已有的软件来解决某些实际问题非常方便和快捷.

本书由崔润卿和刘娟任主编.张颖芳编写第 1 章,王彩虹编写第 2 章,耿世佼编写第 3 章与 MATLAB 的应用,崔润卿编写第 4 章,刘娟编写第 5 章与第 6 章,赵延霞编写了第 7 章.由于编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

本书由河南省教育厅项目(2012JG015)和河南理工大学应用数学河南省重点学科资助,在此表示衷心的感谢.

编者

2013 年 12 月

目　录

第 1 章　矩阵运算及其应用

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，它是解决线性方程组和其他问题的有力工具，在线性代数中具有重要的地位.

本章主要介绍矩阵的概念、性质和运算，以及矩阵的初等变换与初等矩阵.

1.1　矩　　阵

1. 矩阵举例

例 1.1.1　某企业生产 4 件产品，各种产品的季度产值（万元）如表 1.1.1 所列.

表 1.1.1

产值 / 产品 / 季度	A	B	C	D
1	80	75	75	78
2	98	70	85	84
3	90	75	90	90
4	88	70	82	80

数表 $\begin{pmatrix} 80 & 75 & 75 & 78 \\ 98 & 70 & 85 & 84 \\ 90 & 75 & 90 & 90 \\ 88 & 70 & 82 & 80 \end{pmatrix}$ 具体描述了这家企业各种产品各季度的产值，同时也揭示了产值随季度变化的规律、季增长率和年产量等情况.

例 1.1.2　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1.1}$$

未知量的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots n)$ 与常数 $b_i(i=1,2,\cdots m)$ 按原位置构成如下数表：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

对方程组的研究转化为对数表的研究，因此研究这个数表很有必要.

在日常生活和科学研究中，经常见到各种各样的数表，如学生的成绩统计表、工厂的生产进度表、科研领域中的数据分析表等，这样的数表在数学上称为矩阵.

2. 矩阵的概念

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. 为表示它是一个整体，总是加一个括号，并用斜黑体字母表示，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{或} \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元，数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元，以数 a_{ij} 为 (i,j) 元的矩阵可简记作 (a_{ij}) 或 $(a_{ij})_{m\times n}$. $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵，如无特别说明，本书的矩阵都是实矩阵.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为行矩阵，又称行向量，为避免元素间的混淆，行矩阵也记作 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称列向量.

两个矩阵的行数相等，列数也相等时，就称它们为同型矩阵，如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意不同型的零矩阵是不同的. 例如：

$$(0,0) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行数与列数都为 n 的矩阵，称为 n 阶方阵，或 n 阶矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_n$.

在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中,以左上角到右下角的直线称为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线.

3. 几种特殊矩阵

如果 n 阶矩阵的主对角线以外的元素都是 0,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则称它为对角矩阵,简称对角阵,对角阵也记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$.

主对角线上全为 1 的 n 阶对角矩阵,即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵,记作 $\boldsymbol{E}_n$、$\boldsymbol{I}_n$、或 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{I}$.

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\ \qquad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n \end{cases} \tag{1.1.2}$$

称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots y_m$ 的线性变换,其中 a_{ij} 为常数. 线性变换式(1.1.2)的系数 a_{ij} 构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

给定了线性变换式(1.1.2),它的系数按原来的相对位置确定一个矩阵,此矩阵称为线性变换的系数矩阵,反之,如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵,则线性变换也就确定,在这个意义上,线性变换与矩阵之间存在着一一对应的关系.

例如,矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$所对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

可看做是 xOy 平面上把向量$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$变为向量$\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$的变换(图 1.1),由于向量$\overrightarrow{OP_1}$是向量$\overrightarrow{OP}$在 x 轴上的投影向量,因此这是一个投影变换.

又如矩阵$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$对应的线性变换

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y_1 = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

把 xOy 平面上的向量$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$变为向量$\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. 设$\overrightarrow{OP}$的长度为 r,辐角为 θ,即设 $x=r\cos\theta$,

$y = r\sin\theta$,那么

$$x_1 = r(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) = r\cos(\theta + \varphi)$$
$$y_1 = r(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta) = r\sin(\theta + \varphi)$$

表明$\overrightarrow{OP_1}$的长度也为 r 而辐角为 $\theta+\varphi$. 因此,这是把向量$\overrightarrow{OP}$(依逆时针方向)旋转 φ 角(即把点 P 以原点为中心逆时针旋转 φ 角)的旋转变换(图 1.2).

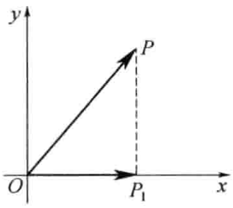

图 1.1

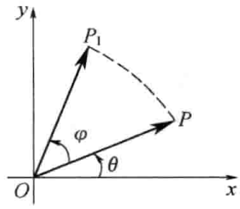

图 1.2

1.2 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 1.2.1 设有两个同型的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m \times n$ 矩阵):

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$,记

$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$$

$-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵,显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$$

由此可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

2. 数与矩阵相乘

定义 1.2.2 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积,简称数乘,记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$,规定为

$$\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

数乘矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵,λ,μ 为数):

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算.

例 1.2.1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}&=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2&0\\-2&-4&-6\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}5&4&3\\2&1&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. 矩阵与矩阵相乘

设有两个线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2\\y_3=a_{31}x_1+a_{32}x_2\end{cases}\tag{1.2.1}$$

$$\begin{cases}x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2\\x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2\end{cases}\tag{1.2.2}$$

若想求出从 t_1,t_2 到 y_1,y_2,y_3 的线性变换,可将式(1.2.2)代入式(1.2.1),得

$$\begin{cases}y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})t_2\\y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})t_2\\y_3=(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21})t_1+(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22})t_2\end{cases}\tag{1.2.3}$$

线性变换式(1.2.3)可看做线性变换式(1.2.1)与式(1.2.2)的乘积,相应地把式(1.2.3)所对应的矩阵定义为式(1.2.1)与式(1.2.2)所对应的矩阵的乘积,即

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}&a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{pmatrix}$$

一般地,有以下定义.

定义 1.2.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵,那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$,其中

$$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,n$$

并把此乘积记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+\cdots a_{1s}b_{sn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\cdots a_{2s}b_{s1} & \cdots & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+\cdots a_{2s}b_{sn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\cdots a_{ms}b_{sn} \end{pmatrix}$$

由矩阵乘积的定义可知:只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘.

例 1.2.2 求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} 与 \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

的乘积.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 3×2 矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘,其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 4×2 矩阵,由定义 1.2.3 有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3\times1+(-1)\times0+2\times(-1) & 3\times2+(-1)\times1+2\times4 \\ 2\times1+4\times0+0\times(-1) & 2\times2+4\times1+0\times4 \\ 0\times1+1\times0+3\times(-1) & 0\times2+1\times1+3\times4 \\ 1\times1+2\times0+0\times(-1) & 1\times2+2\times1+0\times4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 8 \\ -3 & 13 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

例 1.2.3 设

$$A=(1,-1,5),B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$AB=(1,-1,5)\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=16$$

$$BA=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(1,-1,5)=\begin{pmatrix}2&-2&10\\1&-1&5\\3&-3&15\end{pmatrix}$$

例 1.2.4 求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\text{与 }B=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&4\end{pmatrix}$$

的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\-2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}2&-4\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-10\\10&10\end{pmatrix}$$

由以上三个例子可以看出，矩阵乘法需注意以下两点：

(1) 矩阵乘法一般不满足交换律. 这是因为：①$\boldsymbol{AB}$ 有意义，$\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义，如例 1.2.2；②$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但其结果不一定有相同的行数与列数，如例 1.2.3；③即使 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的行数与列数，但 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 仍可能不相等，如例 1.2.4.

(2) 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，如例 1.2.4. 在一般情况下，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论；若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，也不能得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 的结论.

上述两个结论是与实数的乘法运算规律不同的，大家要熟记.

矩阵乘法满足下列运算规律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$，其中 λ 为数；

(4) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

1.1 节从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2\cdots,y_m$ 的线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{2n}x_n\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n\end{cases}\tag{1.2.4}$$

利用矩阵的乘法，可记作 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$.

其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

线性变换式(1.2.4)把 $\boldsymbol{X}$ 变成 $\boldsymbol{Y}$，相当于用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 去左乘 $\boldsymbol{X}$ 得到 $\boldsymbol{Y}$.

例如用矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$去左乘向量$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，相当于把向量$\overrightarrow{OP}$投影到 x 轴上(图1.1).

4. 方阵的幂与多项式

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，k 为正整数，k 个 $\boldsymbol{A}$ 连乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂，记作 $\boldsymbol{A}^k$，即

$$\boldsymbol{A}^k = \overbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}^{k}$$

规定

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$$

方阵的幂满足以下运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$，其中 k,l 为正整数.

需要注意的是，由于矩阵乘法不满足交换律，一般地，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，只有当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换时，才有下列公式成立：

(1) $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；

(3) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

如果 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots a_mx^m$ 是 x 的 m 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称

$$\varphi(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{E} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

例 1.2.5 设 $\varphi(x)=x^2+5x+6$，且

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

求 $\varphi(\boldsymbol{A})$.

解

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{A}^2+5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 1 & 5 \\ -7 & 14 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

5. 矩阵的转置

定义 1.2.4 把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到的矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如,矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-1&4\end{pmatrix}$ 的转置矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\\2&4\end{pmatrix}$$

矩阵的转置满足下述运算规律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

这里仅证明(4).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times m}$,由矩阵乘法定义,有

$$c_{ji}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行元为 $b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{si}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 j 列元为 $a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{js}$,因而

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{s}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{s}a_{jk}b_{ki}$$

所以 $d_{ij}=c_{ji}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,即 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$,亦即

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$$

例 1.2.6 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&3\\1&0&1\end{pmatrix}$$

求$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法 1 因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\4&2&3\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\11&4&4\end{pmatrix}$$

所以

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&11\\1&4\\-2&4\end{pmatrix}$$

解法 2

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&4&1\\1&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&11\\1&4\\-2&4\end{pmatrix}$$

定义 1.2.5 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵.

如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}$,即

$$b_{ij} = -b_{ji} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

是三阶对称矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

是三阶反对称矩阵.

例 1.2.7 设列矩阵 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} = 1$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵,$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$,证明 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵,且 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$.

证

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} &= (\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}} - 2(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称阵.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}^2 &= (\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2 \\ &= \boldsymbol{E} - 4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + 4(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}) \\ &= \boldsymbol{E} - 4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \\ &= \boldsymbol{E} - 4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} + 4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

6. 共轭矩阵

当 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为复矩阵时,用 $\overline{a_{ij}}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数,记

$$\overline{\boldsymbol{A}} = (\overline{a_{ij}})$$

$\overline{\boldsymbol{A}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵.

共轭矩阵满足下列规律(设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵,λ 为复数)

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$;

(2) $\overline{\lambda\boldsymbol{A}} = \overline{\lambda}\overline{\boldsymbol{A}}$;

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}$.

1.3 可 逆 矩 阵

对于任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 和同阶单位方阵 $\boldsymbol{E}$,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

从乘法的角度看，单位方阵 $\boldsymbol{E}$ 具有类似于数“1”的作用.

根据上述的比较分析，可以在矩阵运算中，引入类似于数的“除法”以及“倒数”的概念，这就是本节将要介绍的可逆矩阵的概念.

定义 1.3.1 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称逆阵.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的，这是因为：设 $\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，由定义知

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \quad , \quad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E}$$

得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{EC} = \boldsymbol{C}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的.

$\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$$

由定义，方阵的逆阵具有如下性质：

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

以上 3 条性质可直接用定义验证，请读者自己完成.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

证 因为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 存在，且有

$$(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BB}^{-1})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AEA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E}$$

以及

$$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1})(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$$

由定义 1 可知 $\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，且

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

性质(4)还可推广到有限多个可逆矩阵乘积的情形，若 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_m$ 都是同阶可逆矩阵，则

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{m-1}\boldsymbol{A}_m)^{-1} = \boldsymbol{A}_m^{-1}\boldsymbol{A}_{m-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$$

对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，还可定义

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$$
$$\boldsymbol{A}^{-k} = (\boldsymbol{A}^{-1})^k$$

其中 k 为正整数.

例 1.3.1 证明：二阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

不可逆.