



振动及其控制

Vibration with Control

陈怀海 贺旭东 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

振动及其控制

陈怀海 贺旭东 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书共分10章。前3章讲述线性振动基本理论,第4章讲述随机振动理论,第5、6章讲述用有限元计算振动问题,第7~9章主要讲述振动主动控制有关方法,第10章简述了系统识别与模型缩减方法。本书行文简洁,内容结合学科的新发展,其主要特色是算例结合 Matlab 编程,实用性强,有利于相关专业学生由知识学习型向课题研究型的转变。

本书可作为工程力学、飞行器设计、机械设计等专业研究生的教材,也可作为相关专业本科生的选修教材或作为其他工程技术人员参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

振动及其控制/陈怀海,贺旭东编著. —北京:国防工业出版社,2015.2

ISBN 978-7-118-09885-3

I. ①振… II. ①陈… ②贺… III. ①振动控制-研究 IV. ①TB53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 038668 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 10 字数 260 千字

2015年2月第1版第1次印刷 印数 1—3000册 定价 26.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

振动现象广泛存在于航空、航天、机械制造、汽车、电子产品和土木工程等领域。振动对产品的品质和性能具有重要的影响。例如,产品在运输过程中可能遭遇“异常振动”而受损;高速飞行的飞行器产生的振动,可能会造成部件疲劳损坏甚至飞行器解体;车辆在进行过程中的振动会造成乘员的疲劳和不适;机床在加工零件时的振动会影响加工精度或损坏刀头;地震时地面的不规则运动可能会造成建筑物裂缝、倾斜甚至倒塌。工程实际中,振动问题能否很好地解决往往成为制约产品质量和可靠性的关键。

要解决工程中的振动问题一般先从振动系统建模开始。振动系统的模型可以通过理论分析建模、有限元法建模、试验建模等来建立。有了模型后就可以进行计算分析,找到系统振动的特性,进而优化改进设计,最后再通过实际产品的试验来验证其有关性能。因此,掌握振动的基本理论、分析计算方法和信号分析要点是处理振动问题的基础。

归根结底,振动问题的解决是要实现对产品振动性能的控制。振动控制可分为被动控制和主动控制。被动控制是通过事先改变振动系统的结构或所受载荷特性达到控制目的;主动控制则是通过额外附加的控制力对结构的振动进行控制。被动控制的基础源自振动理论,主动控制的基础源自控制论。本书主要简介振动主动控制方法。

全书共分10章。前3章简要讲述线性振动基本理论,第4章讲述随机振动理论和谱分析方法,第5和第6章讲述用有限元计算振动问题,第7~9章简介振动主动控制有关方法,第10章简述了系统识别与模型缩减方法。

本书由陈怀海教授和贺旭东副教授负责编写,博士生张步云参与了统稿工作。书中主要内容在南京航空航天大学相关专业的研究生课程中进行过讲述。由于编者水平有限,书中错误在所难免,欢迎读者批评指正。

编 者

2014年9月

目 录

第 1 章 单自由度系统振动	1
1.1 单自由度系统振动方程	1
1.2 单自由度系统对初始条件激励的响应	2
1.3 单自由度系统对正弦力激励的响应	4
1.4 单自由度系统在正弦力激励下的稳态响应	6
1.5 确定阻尼比的半功率带宽法	8
1.6 基础激励与振动隔离	9
1.7 质量、刚度和阻尼的等效处理	11
1.8 周期力激励下的响应分析	13
1.9 瞬态力激励下的响应分析	13
1.10 频响函数与传递函数	15
1.11 单自由度系统状态空间方程	17
1.12 应用举例	18
习题	24
第 2 章 多自由度振动系统	26
2.1 多自由度系统	26
2.2 多自由度系统振动方程	26
2.3 无阻尼多自由度系统的振动	29
2.4 多自由度比例阻尼系统的振动	35
2.5 多自由度系统振动分析的状态空间法	37
习题	45
第 3 章 连续体振动系统	48
3.1 杆、轴、梁的分类	48
3.2 无阻尼杆纵向振动方程	48
3.3 杆的振动分析	49
3.4 杆振型函数的正交性	51
3.5 求解杆振动响应的模态叠加法	52

3.6	无阻尼圆轴扭转振动	52
3.7	无阻尼直梁的弯曲振动	53
3.8	无阻尼直梁横向振动分析	54
3.9	梁振型函数的正交性	57
3.10	求解梁振动响应的模态叠加法	58
3.11	δ 函数	59
3.12	梁在集中载荷作用下的振动响应分析	60
3.13	带有集中参数梁的振动问题	61
3.14	轴向力的影响	64
	习题	65
第 4 章	随机振动与谱分析概论	67
4.1	随机振动的基本概念	67
4.2	傅里叶分析	72
4.3	功率谱密度计算	78
4.4	窗函数	81
4.5	随机振动激励与响应关系	84
第 5 章	振动分析的有限元法	86
5.1	单元的基本概念	86
5.2	单元运动方程与单元矩阵	87
5.3	杆与梁的单元矩阵	88
5.4	坐标转换	93
5.5	由单元矩阵到总体矩阵的组装	94
5.6	简单边界条件的处理	95
5.7	固有振动特性计算编程示例	95
5.8	振动响应计算编程示例	97
	习题	98
第 6 章	用 ANSYS 进行振动计算入门	100
6.1	基本步骤	100
6.2	工程数据输入	101
6.3	几何建模	102
6.4	有限元建模	103
6.5	模态计算及结果展示	104
6.6	谐响应分析	105

6.7 瞬态结构分析	106
习题	108
第7章 单自由度振动系统控制	109
7.1 单自由度 PID 控制	109
7.2 PID 控制性能指标	113
7.3 PID 控制的稳定性	114
7.4 控制器设计的均衡性	116
7.5 带有前置补偿器的跟踪控制系统	117
习题	118
第8章 状态空间反馈控制	120
8.1 振动响应状态空间表示	120
8.2 可控与可观性	122
8.3 LQR 减振控制器	123
8.4 LQR 跟踪控制器	127
第9章 H_{∞} 控制器	131
9.1 系统的 H_2 范数	131
9.2 系统的 H_{∞} 范数	132
9.3 标准 H_{∞} 控制	132
9.4 H_{∞} 混合灵敏度控制方法	136
第10章 系统识别与模型降阶	140
10.1 基本概念	140
10.2 由实测时域数据估计频响函数	140
10.3 状态空间模型的实现	143
10.4 平衡实现	146
10.5 模型缩减	147
参考文献	152

第1章

单自由度系统振动

1.1 单自由度系统振动方程

振动是结构物围绕某一位置的往复运动。描述系统运动所需的独立空间坐标数是系统的运动空间维数。例如,系统仅沿空间 x 坐标运动时,则为一维空间运动。单自由度振动系统是对实际振动结构的一种高度抽象和简化。结构发生振动的必要条件是具有质量和弹性,实际结构对振动能量总有一定的耗散能力,即阻尼作用。因此,一个振动系统通常有质量、刚度、阻尼 3 个振动特性参数。单自由度振动系统可用图 1-1(a) 表示,图中 m 、 k 、 c 分别为质量系数、刚度系数、阻尼系数,在米制体系下,它们的单位分别为 kg 、 N/m 、 $\text{N}/(\text{m/s})$; x 为空间坐标, $u(t)$ 为运动坐标,表示质量沿空间 x 坐标方向的位移,此处以质量静平衡处作为 $u(t)$ 的零点位置。易知,对于这样的运动系统,仅需要一个运动坐标 $u(t)$ 就可描述系统在任何时刻的运动状态,故称之为单自由度系统。自由度就是指能够完整描述系统运动状态所需的独立运动坐标的个数。单自由度系统的振动一定是一维空间运动。

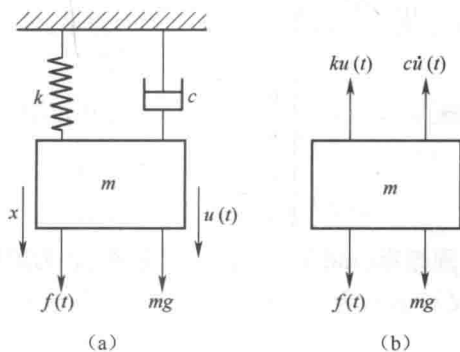


图 1-1 单自由度振动系统

参考受力分析图 1-1(b), 根据牛顿第二定律可得

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k(u(t) + \delta_{st}) = f(t) + mg \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-1)$$

式中: δ_{st} 为在质量块重力作用下弹簧的静态变形。由于

$$k\delta_{st} = mg \quad (1-2)$$

所以有

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t) \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-3)$$

由式(1-3)可知,将静平衡处作为 $u(t)$ 的零点时,振动方程中将不包含质量重力的影响,公式中的 $m\ddot{u}$ 、 $c\dot{u}$ 、 ku 、 f 分别表示惯性力、阻尼力、弹性力、外力; $u(0)$ 和 $\dot{u}(0)$ 分别表示初始时刻的位移和速度,将其分别简写为 u_0 和 \dot{u}_0 , $u(0)$ 和 $\dot{u}(0)$ 又称为**初始条件**。研究振动问题的主要目的就是求解式(1-3),得到在任意给定时刻的位移解 $u(t)$ 。

1.2 单自由度系统对初始条件激励的响应

式(1-3)为线性非齐次二阶常微分方程,根据常微分方程理论,它的解由其齐次方程的通解和非齐次方程任意一个特解通过线性组合构成。首先研究齐次方程的通解。式(1-3)对应的齐次方程为

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-4)$$

这种情况下结构上没有外力作用,称这样的振动状态为**自由振动**。自由振动是由初始条件引起的,此时结构上虽无外力作用,但其内部仍有惯性力、阻尼力和弹性力。

为求解方程式(1-4),先对其进行标准化处理,即将方程两边同除以 m ,得

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-5)$$

令

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = \omega_n^2 \\ \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n \end{cases} \quad (1-6)$$

式中: ω_n 为系统无阻尼固有圆频率(rad/s),简称固有频率; ζ 为阻尼比。

根据式(1-6),阻尼比又可表示为

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (1-7)$$

式中: $2\sqrt{km}$ 为系统的临界阻尼系数。

将式(1-6)代入式(1-5)中,可得

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2u(t) = 0 \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-8)$$

采用试探解 $u(t) = \bar{u}e^{\lambda t}$ (其中 \bar{u} 和 λ 为常数,且 \bar{u} 不为零),代入式(1-8)可得

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (1-9)$$

式(1-9)为单自由度振动系统的特征方程, λ 称为系统的特征根。解之可得

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (1-10)$$

可见,随阻尼比 ζ 的取值不同, λ 可能为一对共轭复根 ($\zeta < 1$, 欠阻尼)、两个相异负实根 ($\zeta > 1$, 过阻尼)、两个相同负实根 ($\zeta = 1$, 临界阻尼)。 λ 在复平面上的情形如图 1-2 所示,在阻尼比由零逐渐增大的过程中,两特征根分别由虚轴开始转向实轴,当 $\zeta = 1$ 时,两者相会于实轴,随后一个向实轴负方向运动,另一个向原点靠近。

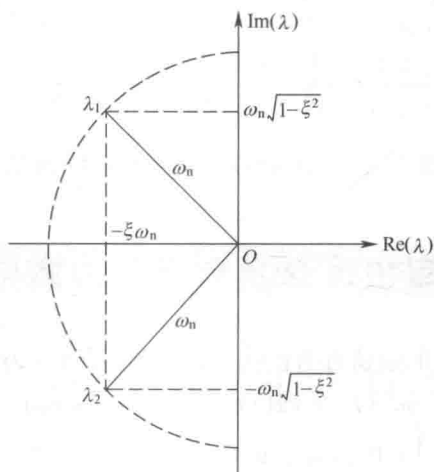


图 1-2 复平面上的特征根

由于系统有两个特征根,可分别构成两个试探解,当 $\zeta \neq 1$ 时,系统的实际响应可由这两个试探解线性叠加组成,即

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (1-11)$$

当 $\zeta = 1, \lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$ 时,系统的实际响应可由两个试探解采用以下方式叠加组成,即

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (1-12)$$

当 $\zeta < 1$ 时,将式(1-8)中的初始条件代入式(1-11)并利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, 可得

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(u_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} \sin\omega_d t \right) \quad (1-13)$$

式中: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, 称为系统的有阻尼振动频率。

当 $\zeta > 1$ 时,利用式(1-8)中的初始条件可得式(1-11)中的两个常数分别为

$$c_1 = \frac{\dot{u}_0 + (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}, \quad c_2 = \frac{-\dot{u}_0 - (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n u_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (1-14)$$

当 $\zeta = 1$ 时,利用式(1-8)中的初始条件可得式(1-12)中的两个常数分别为

$$c_1 = u_0, c_2 = \dot{u}_0 + \omega_n u_0 \quad (1-15)$$

令 $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$, $u_0 = 0.01 \text{ m}$, $\dot{u}_0 = 0.01 \text{ m/s}$, $\zeta = 0.15, 1.5, 1$, 利用上面 3 式画出系统响应如图 1-3 所示。由图 1-3 可见, 当阻尼比大于或等于 1 时, 系统不会发生往复振动, 因此, 以下主要研究系统为欠阻尼情形下的振动问题。

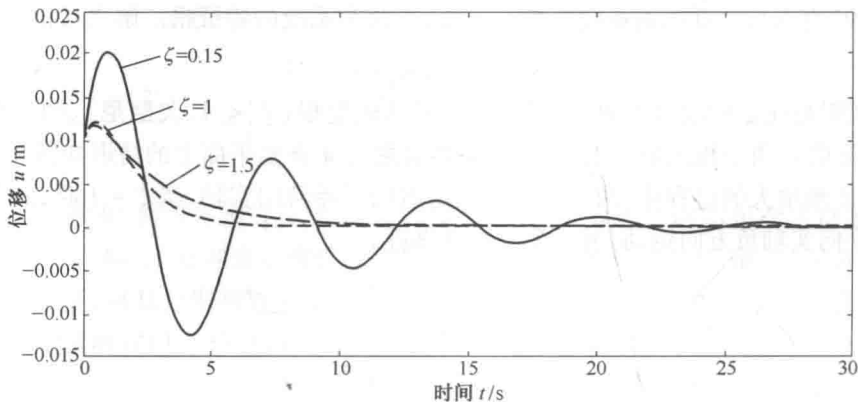


图 1-3 单自由度系统对初始条件的响应

1.3 单自由度系统对正弦力激励的响应

在方程式(1-3)中, 若外加激励力为正弦力, 则该方程可写为

$$\begin{cases} m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f_0 \sin \omega t \\ u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases} \quad (1-16)$$

式中: f_0 为正弦激励力的幅值; ω 为激励的频率。

式(1-16)是二阶非齐次常微分方程, 它的解由对应的齐次方程的通解 $u_h(t)$ 和非齐次方程的任意一个特解 $u_p(t)$ 构成, 即 $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ 。由

$$m\ddot{u}_h(t) + c\dot{u}_h(t) + ku_h(t) = 0 \quad (1-17)$$

得到

$$u_h(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (a_1 \cos \omega_d t + a_2 \sin \omega_d t) \quad (1-18)$$

式中: a_1 和 a_2 为待定常数。特解 $u_p(t)$ 满足的方程为

$$m\ddot{u}_p(t) + c\dot{u}_p(t) + ku_p(t) = f_0 \sin \omega t \quad (1-19)$$

令 $u_p(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, ϕ 是位移响应与激励之间的相位差, 折算成时间差为 ϕ/ω (s)。将 u_p 代入式(1-19)中可得

$$(k - \omega^2 m) A \sin(\omega t + \phi) + c \omega A \cos(\omega t + \phi) = f_0 \sin(\omega t + \phi - \phi) \quad (1-20)$$

将式(1-20)右端展开, 并比较 $\sin(\omega t + \phi)$ 和 $\cos(\omega t + \phi)$ 的系数得到

$$\begin{cases} (k - \omega^2 m) A = f_0 \cos \phi \\ \omega c A = -f_0 \sin \phi \end{cases} \quad (1-21)$$

由式(1-21)可解得

$$\begin{cases} A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \\ \phi = \arctan \frac{-\omega c}{k - \omega^2 m} \end{cases} \quad (1-22)$$

由 $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$ 并根据初始条件,可得到

$$\begin{cases} a_1 = u_0 - \frac{c\omega^2 A^2}{f_0} \\ a_2 = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d} - \frac{\omega A^2(k - \omega^2 m + c\zeta\omega\omega_n)}{\omega_d f_0} \end{cases} \quad (1-23)$$

在方程式(1-16)中,令 $m = 1\text{kg}$, $c = 0.25\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$, $k = 1\text{N}/\text{m}$, $f_0 = 1\text{N}$, $\omega = 6\text{rad}/\text{s}$, $u_0 = 0.01\text{m}$, $\dot{u}_0 = 0.01\text{m}/\text{s}$, 得到位移响应 $u(t)$ 如图 1-4 所示。从图中可见,系统响应可分为两个阶段,前一阶段(大约 30s 前)受初始条件影响,系统响应不规则,称该阶段为瞬态阶段;后一阶段系统响应完全受激励影响,表现为稳定的简谐振动,称该阶段为稳态阶段。

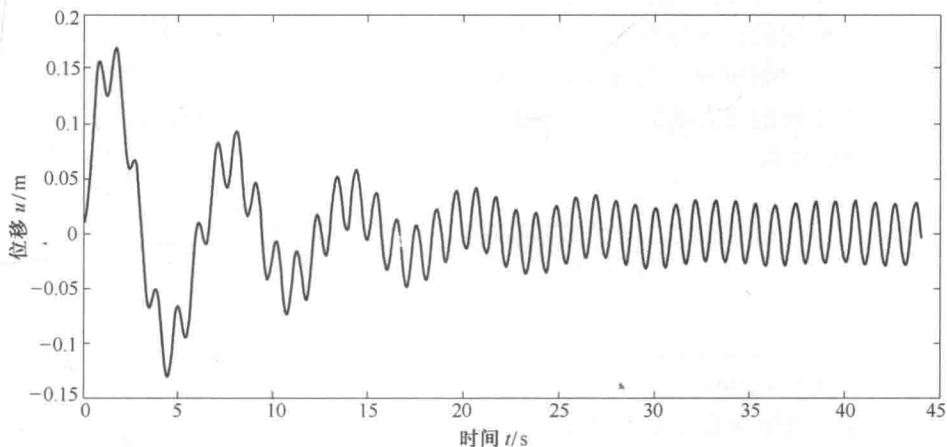


图 1-4 单自由度系统对初始条件和简谐激励响应

需要注意的是,若单自由度系统无阻尼,则系统对初始条件响应部分不会衰减,此时系统振动为固有频率正弦振动与激励频率正弦振动的叠加。若两正弦振动的频率比是有理数,则它们的合成结果一定是周期函数,证明如下。

设两个正弦函数分别为

$$f_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (1-24)$$

$$f_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (1-25)$$

若 $\omega_2/\omega_1 = a$ 为有理数,则它们最小正周期的比为

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi/\omega_1}{2\pi/\omega_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = a \quad (1-26)$$

由于 a 为有理数,总可以找到一个正整数 m_1 ,使得 $m_2 = m_1 a$ 为正整数,对式(1-26)两边同乘以 m_1 可得

$$m_1 T_1 = m_1 a T_2 = m_2 T_2 \quad (1-27)$$

取

$$T = m_1 m_2 T_1 = m_2^2 T_2 \quad (1-28)$$

由于 m_1, m_2 为正整数, 则 $m_1 m_2, m_2^2$ 也必为正整数, 因此 T 同时是函数 f_1, f_2 的周期, 即

$$\begin{cases} f_1(t+T) = f_1(t) \\ f_2(t+T) = f_2(t) \end{cases} \quad (1-29)$$

因此若

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1-30)$$

则必有

$$f(t+T) = f_1(t+T) + f_2(t+T) = f_1(t) + f_2(t) = f(t) \quad (1-31)$$

即 $f(t)$ 一定为周期函数。

1.4 单自由度系统在正弦力激励下的稳态响应

由上节可知, 单自由度阻尼系统在正弦力激励下系统位移响应可分为瞬态和稳态两个阶段, 瞬态阶段持续时间的长短与系统阻尼比的大小有关。在其他条件不变的情况下, 阻尼比越大, 瞬态阶段持续时间则越短。系统稳态阶段与工程中旋转机器启动后的稳定运行状态相对应, 因此有必要对系统的稳态响应进行更细致的分析。对式(1-22)的右侧分子和分母同时除以质量 m 再整理后可得

$$\begin{cases} A = \frac{A_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \\ \phi = \arctan \frac{-2\zeta\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases} \quad (1-32)$$

式中: $A_0 = f_0/k$, $\lambda = \omega_n/\omega$ 。

A_0 可以看作系统受静态力 f_0 作用下的位移。显然有

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1-33)$$

式(1-33)是系统动态位移响应幅值与静态位移的比值, 称之为**位移放大因子**, 该放大因子与频率比 λ 以及阻尼比 ζ 有关。式(1-32)中的 ϕ 是位移响应落后于激励的相位量, 它同样是频率比 λ 以及阻尼比 ζ 的函数。给定阻尼比后, 可画出 A/A_0 以及 ϕ 与频率比 λ 的关系图, 分别称之为**位移幅频曲线**和**位移相频曲线**, 如图 1-5 和图 1-6 所示。通过对式(1-33)求导数可得图 1-5 所示峰值对应的频率比为

$$\lambda_d = \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (1-34)$$

可见 $\lambda_d < 1$ 。当 $\lambda = \lambda_d$ 时, 系统振幅达到最大, 称为**位移共振**, 共振峰的高度由阻尼比决定; 当 $\lambda > 1$ 时, 位移放大因子接近于 1, 系统响应振幅主要由刚度决定; 当 $\lambda < 1$ 时, 位移放大因子接近于 0, 系统响应振幅主要由质量决定。由图 1-6 可以看出, 当频率比 $\lambda < 1$ 时, 阻尼比越小位移响应滞后于激励的相位越小。当 $\lambda = 1$ 时, 位移响应滞后于激励的相位与阻尼比无关, 恒等于 $\pi/2$ 。由于 $\tan(\omega t + \phi + \pi) = \tan(\omega t + \phi)$, 因此在 $\lambda = 1$ 左右两侧, 可认为 ϕ 发生了 180° 突变, 位移响应由滞后于激励突变为超前于激励。例如, $\phi = -110^\circ + 180^\circ = 70^\circ$, 即当相位落后

110°时,实际上可看成超前70°。另外,由图1-6还可以看到,当 $\zeta = 0.707$ 时,在 $\lambda < 1$ 时相位差 ϕ 几乎随 λ 线性变化。

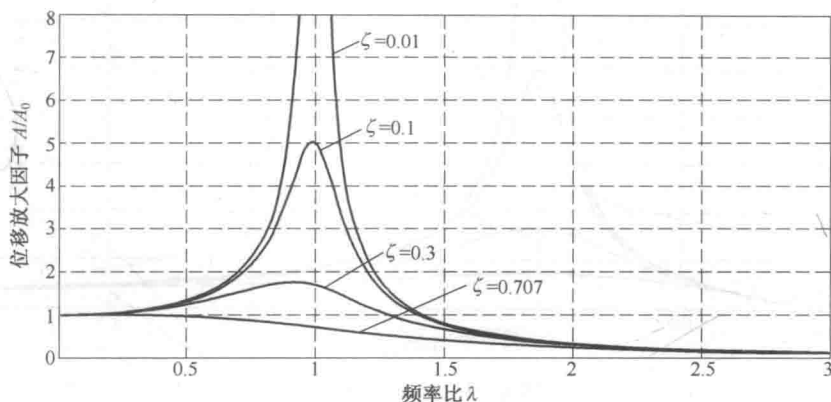


图1-5 位移幅频曲线

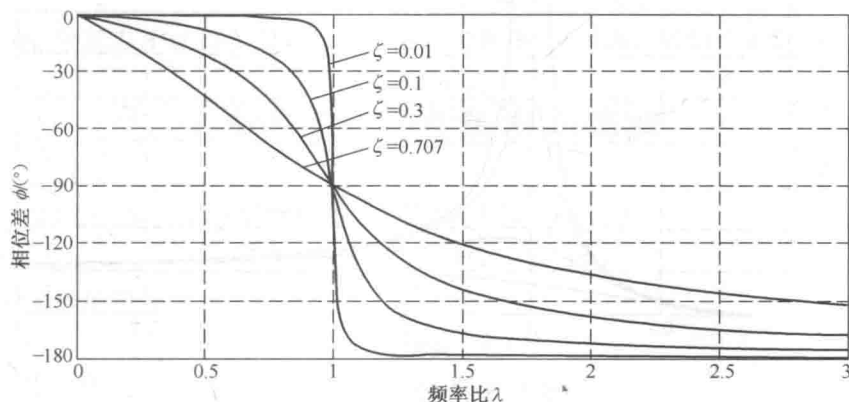


图1-6 位移相频曲线

如果位移的稳态响应为 $u_p(t) = A\sin(\omega t + \phi)$,则速度和加速度的稳态响应分别为

$$\dot{u}_p(t) = A\omega\sin\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1-35)$$

$$\ddot{u}_p(t) = A\omega^2\sin(\omega t + \phi + \pi) \quad (1-36)$$

定义 $\lambda A/A_0$ 和 $\lambda^2 A/A_0$ 分别为速度和加速度的放大因子,则可得到它们的幅频曲线分别如图1-7和图1-8所示。

同样,可以得到速度共振和加速度共振时对应的频率比分别为

$$\lambda_v = 1 \quad (1-37)$$

$$\lambda_a = \sqrt{1 + 2\zeta^2} \quad (1-38)$$

因此,速度共振时,频率比刚好等于1;加速度共振时,频率比大于1。实际中,系统的阻尼比常比较小, λ_d 和 λ_a 的值都很接近于1,所以通常取 $\lambda = 1$ 作为系统发生共振时的频率比,也即当外界激励的频率等于系统的固有频率时系统发生共振。共振时,位移、速度、加速度的放大因子同为

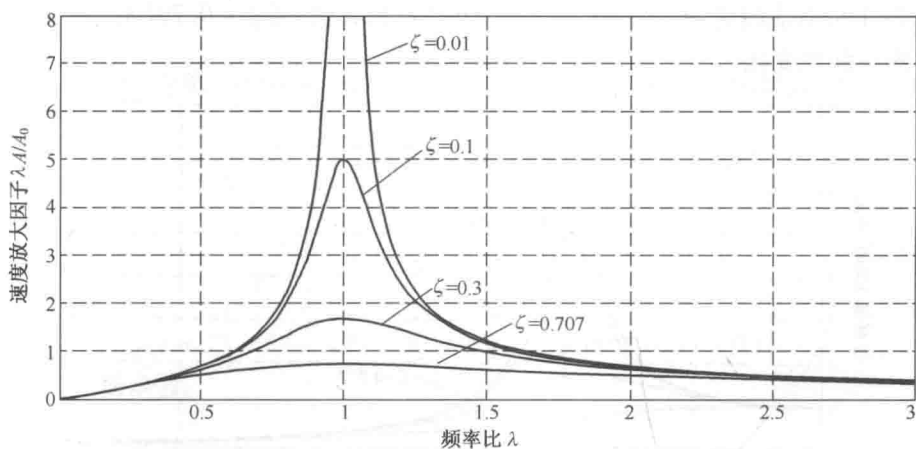


图 1-7 速度幅频曲线

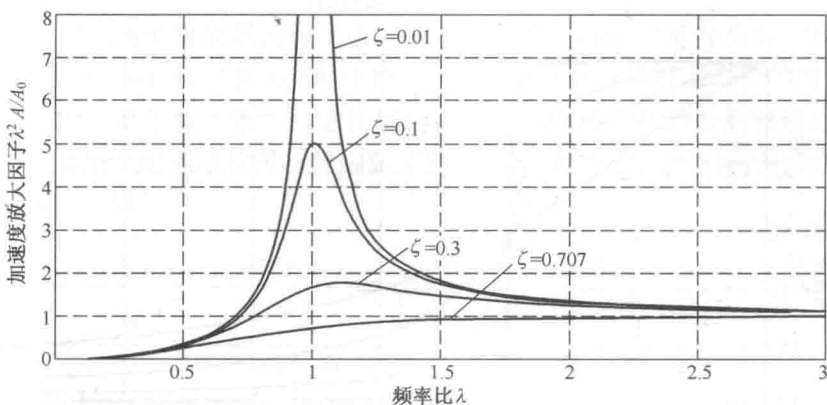


图 1-8 加速度幅频曲线

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \quad (1-39)$$

式中： Q 为系统的品质因子，它反映出系统的共振峰的尖锐程度，阻尼比越小，共振峰越尖锐。

1.5 确定阻尼比的半功率带宽法

沿幅频曲线自共振峰分别向左、右下降至共振峰值的 $1/\sqrt{2}$ 倍，即约 0.707 倍时，两个点对应的频率比之间的频带宽度称为系统的半功率带宽 B_{half} ，如图 1-9 所示。

令

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\zeta} \quad (1-40)$$

解之得

$$\begin{cases} \lambda_A = \sqrt{\zeta^2 + 1} - \zeta \\ \lambda_B = \sqrt{\zeta^2 + 1} + \zeta \end{cases} \quad (1-41)$$

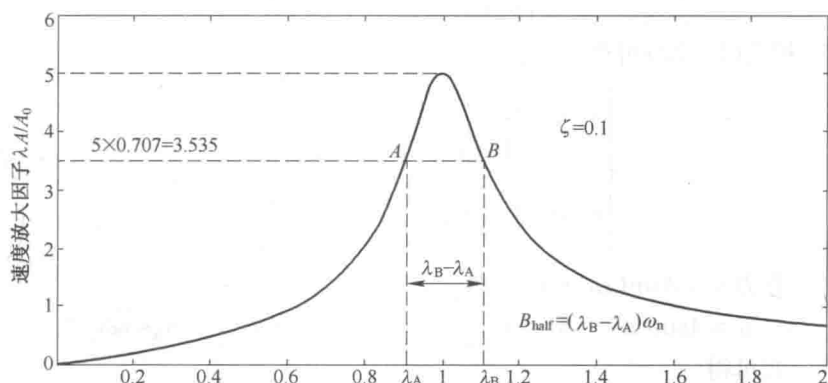


图 1-9 半功率带宽

所以有

$$\zeta = \frac{\lambda_B - \lambda_A}{2} = \frac{1}{2} \frac{(\omega_B - \omega_A)}{\omega_n} = \frac{1}{2} \frac{B_{\text{half}}}{\omega_n} \quad (1-42)$$

式中: ω_A 和 ω_B 分别为 A 点和 B 点处对应的激励力频率, 可用该公式估计系统的阻尼比。

1.6 基础激励与振动隔离

如图 1-10 所示, 单自由度系统受基础激励时, 其运动方程为

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_b) + k(u - u_b) = 0 \quad (1-43)$$

令质量块相对基础的位移为

$$u_r(t) = u(t) - u_b(t) \quad (1-44)$$

则式(1-43)可化为

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = -m\ddot{u}_b \quad (1-45)$$

式(1-45)就是基础激励下的系统相对运动方程, 求得相对位移 u_r 后, 可由式(1-44)得到绝对位移 $u = u_r + u_b$ 。

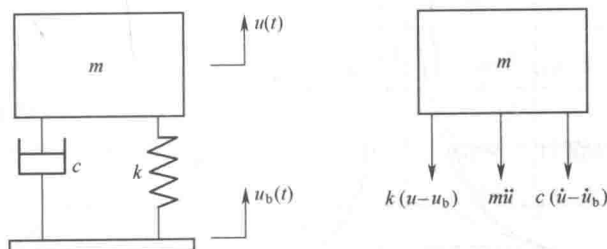


图 1-10 单自由度系统受基础激励

假设基础位移为正弦形式, 即

$$u_b(t) = A_b \sin \omega t \quad (1-46)$$

则式(1-45)为

$$m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = m\omega^2 A_b \sin \omega t \quad (1-47)$$

当仅考虑稳态相对运动时, 可令

$$u_r(t) = A_r \sin(\omega t + \phi_r) \quad (1-48)$$

利用式(1-21)和式(1-22)可得

$$\begin{cases} A_r = \frac{m\omega^2 A_b}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}} \\ \cos\phi_r = \frac{(k - \omega^2 m)}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (c\omega)^2}} \end{cases} \quad (1-49)$$

令系统的绝对位移为 $u = A \sin(\omega t + \phi)$, 则

$$u = A \sin(\omega t + \phi) = u_r + u_b = A_r \sin(\omega t + \phi_r) + A_b \sin\omega t \quad (1-50)$$

运用三角函数公式可得

$$A = \sqrt{A_r^2 + A_b^2 + 2A_r A_b \cos\phi_r} \quad (1-51)$$

定义绝对位移传递率为

$$T_d = \frac{A}{A_b} \quad (1-52)$$

将式(1-49)和式(1-51)代入式(1-52)可得

$$T_d = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2(2 - \lambda^2)}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\lambda)^2}{(1 - \lambda^2)^2 + (2\zeta\lambda)^2}} \quad (1-53)$$

由式(1-53)可明显看出,当 $\lambda = \omega/\omega_n = \sqrt{2}$ 时, $T_d \equiv 1$; 当 $\lambda < \sqrt{2}$ 时, $T_d > 1$; 当 $\lambda > \sqrt{2}$ 时, $T_d < 1$ 。 T_d 与频率比 λ 的关系如图 1-11 所示。因此,若要有效隔离基础激励,系统的固有频率相对基础的激励频率要尽可能低,只有当 $\omega_n < \omega/\sqrt{2}$ 时,隔振才有效果。图 1-10 中的弹簧和阻尼器可看作实际中的隔振器。根据图 1-11,在有效隔振区域,频率比越大,隔振效果越好;但阻尼比越大,隔振效果却越差。因此,在设计隔振器时,在满足静态位移等要求下,弹簧应尽可能软,阻尼比应尽可能小。

减小基础激励对系统的影响的隔振称为隔幅;反之,若系统本身处于振动状态,而基础本身无振动,为减少系统振动对基础影响的隔振则称为隔力。隔力模型如图 1-12 所示。

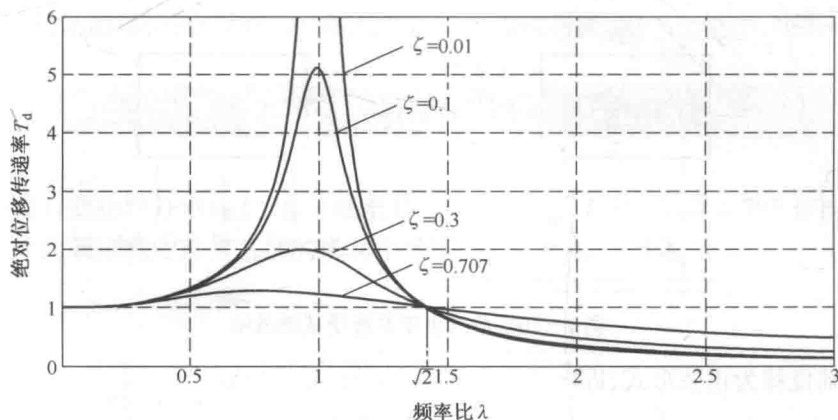


图 1-11 基础激励绝对位移传递率

稳态时,系统传递到基础上的动态力为