



西安电子科技大学研究生精品教材

Time Domain Computational Method for Electromagnetic Waves

电磁波时域计算方法

(上册)

——时域积分方程法和时域有限差分法

葛德彪 魏兵 著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

本书获西安电子科技大学研究生精品教材项目资助

电磁波时域计算方法

(上册)

——时域积分方程法和时域有限差分法

葛德彪 魏 兵 著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书分为上下册,除引言外共三部分 19 章,分别讨论了时域积分方程(IETD)、时域有限差分(FDTD)和时域有限元(FETD)三种方法。对于 IETD,首先导出势函数表述的电场磁场积分方程,经过试验过程和展开过程导出离散形式,再利用时间导数的差分近似获得时域步进公式,分析讨论了细导线、二维导体柱和三维导体的散射。对于 FDTD,基于 Yee 元胞和中心差分近似直接将 Maxwell 旋度方程离散导出时域步进公式,讨论吸收边界、完全匹配层、总场边界和近场—远场外推公式,并用于散射计算;此外,还讨论了共形网格技术和色散介质的处理方法。对于 FETD,从 TM/TE 标量波动方程或电场矢量波动方程及边界条件出发,应用 Galerkin 加权余量导出弱解积分形式;随后经过单元离散和结点或棱边基函数展开,导出单元矩阵方程,再运用组合获得时域矩阵微分方程,将时间导数应用 Newmark 方法离散后给出时域步进公式,讨论了激励源加入、总场边界和近场—远场外推公式并用于散射计算。三种方法都配有算例,附录中给出一维计算程序。上册和下册书末分别附有 FDTD 和 FETD 的电磁波近场分布彩图。

本书可作为无线电物理、电磁场与微波技术、电子科学与技术、电波传播等专业研究生的教材或教学参考书,也可供有关学科教师、科技工作者、研究生和高年级大学生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁波时域计算方法.上册.时域积分方程法和时域有限差分法/葛德彪,魏兵著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2014.12

西安电子科技大学研究生精品教材

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3530 - 9

I. ① 电… II. ① 葛… ② 魏… III. ① 电磁波—时域分析—有限差分法—研究生—教材

IV. ① O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 273366 号

策 划 李惠萍 胡华霖

责任编辑 马晓娟 李惠萍

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 15 彩插 2

字 数 350 千字

印 数 1~3000 册

定 价 30.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3530 - 9/O

XDUP 3822001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

作者简介



葛德彪，男，1961年毕业于武汉大学物理系。西安电子科技大学教授，博士生导师。中国电子学会会士，电磁科学院会士(Fellow of The Electromagnetics Academy)。1980~1982年为美国宾夕法尼亚大学(University of Pennsylvania)访问学者。1993年及1995年为美国德克萨斯大学达拉斯分校(University of Texas at Dallas)高级访问学者。被评为电子部优秀教师(1985年)，机械电子部有突出贡献专家(1991年)，政府特殊津贴专家(1992年)，陕西省学位委员会、陕西省教育委员会优秀博士生导师(1998年)。

主要研究领域为电磁散射、逆散射及电磁成像，计算电磁学，复杂介质中的电磁波传播等。已发表学术刊物及会议论文多篇。出版著作有《电磁逆散射原理》(1987年)，获机械电子部优秀教材一等奖(1992年)；《电磁波时域有限差分方法》(2002年)，被教育部推荐为研究生教学用书；《电磁波理论》(2011年)。



魏兵，男，1993年7月毕业于北京师范大学物理系。2004年7月获西安电子科技大学无线电物理专业博士学位。现为西安电子科技大学教授，博士生导师，2011计划“信息感知技术协同创新中心”目标与环境特性研究部副部长、西安电子科技大学物理与光电工程学院电波研究所副主任，中国物理学会计算物理学分会计算电磁学组理事，中国电子学会高级会员，陕西物理学会理事。近年来先后主持和参与了973项目、863项目、国家自然科学基金、国防预研项目、博士后基金等科研项目。发表论文100余篇，其中被SCI检索30余篇，EI检索50余篇。与葛德彪教授合著出版有专著《电磁波理论》(2011年，科学出版社)。

前 言

电磁波在现代科学技术和日常生活中的应用日益广泛。对于电磁波的研究包括理论分析、数值模拟和实验测试等途径。作为理论分析和数值计算基础的麦克斯韦(Maxwell)方程提出(1873年)至今已近150年。随着计算机的发展,数值模拟结合理论分析与可视化技术凸显了电磁波辐射散射传播过程中的物理属性和量化特征;在此基础上发展的电磁仿真技术更是实验研究和工程设计的重要手段。电磁学数值计算可分为频域方法和时域方法。许多数值方法起源于频域计算,例如矩量法、有限元法和高频技术中的几何光学和物理光学方法等。时域计算发展的重要标志是时域有限差分方法的提出(Yee, 1966)和应用。随后许多频域方法都发展了其时域版本。本书讨论时域数值计算方法,不包含高频技术的时域方法。

本书共三部分,分别讨论时域积分方程(IETD)、时域有限差分(FDTD)和时域有限元(FETD)三种方法。全书分为上册和下册,共三部分(引言独立于三部分之外)19章。上册为引言和前两部分,共9章,下册为第三部分共10章。第1章为引言,着重讨论关联时域和频域分析的傅里叶(Fourier)变换。书中时谐场复数表示的时谐因子采用 $\exp(j\omega t)$ 。第2~4章为IETD方法,根据电场和磁场积分方程,经过试验过程、展开过程和差分近似导出时域步进公式,分析细导线和二维与三维导体散射。第5~9章为FDTD方法,基于Yee元胞和中心差分将Maxwell旋度方程离散导出时域步进公式,讨论了吸收边界、总场边界和近场-远场外推公式并用于散射计算。第10~19章为FETD方法,第10~15章讨论基于结点基函数的二维TM/TE标量波动方程FETD;第16~19章讨论基于棱边基函数的电场矢量波动方程FETD。标量和矢量FETD都采用Galerkin加权余量分析途径。在导出波动方程边值问题弱解积分形式基础上,应用有限元离散、基函数展开以及组合过程得出矩阵方程,再运用Newmark方法获得时域步进公式,分析激励源加入、总场边界和近场-远场外推并用于散射计算。时域计算方法要将电磁波积分微分方程转换为代数方程(包括矩阵形式),并且具有时域步进特点,从而可编程计算。为了理解和掌握几种方法,应当明了演绎的出发点、数学过程、条件、结论及计算步骤。本书注重推导明晰,概念清楚,论述简明。三种方法都配有算例,并附有简单程序。学习本书内容需要具备电磁场或电动力学的基本知识。

本书是在使用多年的研究生课程讲义基础上形成的，从讲义到书稿的形成经历了科研和教学过程，许多工作都有研究生的合作参与。参加 IETD 有关工作的有朱今松、李小勇、徐雨果、曹乐等；参加 FETD 有关工作的有宋刘虎、李林茜、杨谦等。关于 FDTD 的研究已持续多年，有许多过去和现在的研究生参与，他们中有闫玉波研究员、杨利霞教授、张玉强副教授、王飞副教授、胡晓娟副教授、吴跃丽副教授和杨谦、李林茜等，本书的完成和他们的工作密不可分。本书的准备和出版得到西安电子科技大学研究生精品教材项目资助和 863 项目“复杂电磁环境数值建模”(2012AA01A308)支持，出版过程中西安电子科技大学出版社作了大量细致的编辑工作，在此一并表示感谢。

十分欢迎与感谢专家和读者对本书提出意见与建议。

葛德彪 魏兵

2014 年 4 月于西安电子科技大学

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 时域和频域 Maxwell 方程	1
1.2 计算电磁学的几种主要计算方法	2
1.3 用 Fourier 变换实现时域和频域之间的转换	4
1.3.1 Fourier 变换	4
1.3.2 离散 Fourier 变换	6
1.4 几种常用脉冲波形及其频谱	7
1.4.1 高斯脉冲	7
1.4.2 升余弦脉冲	9
1.4.3 微分高斯脉冲	9
1.4.4 调制高斯脉冲	10
1.4.5 双指数脉冲	11
1.5 时域计算的特点	12

第一部分 时域积分方程(IETD)方法

第 2 章 细导线散射	14
2.1 势函数及推迟势公式	14
2.2 直导线情形	16
2.2.1 细导线近似和基本方程	16
2.2.2 基函数和 IETD 解	17
2.2.3 算例	20
2.3 弯曲导线	22
2.3.1 基本方程和 IETD 解	22
2.3.2 算例	28
2.4 阻抗系数和标量势系数中积分的解析结果	31
第 3 章 二维导体柱散射	34
3.1 电场积分方程和磁场积分方程	34
3.2 TM 波电场积分方程的 IETD 解	36
3.2.1 基函数和 IETD 解	36
3.2.2 算例	42
3.2.3 IETD 解的矢量势一阶导数方案	45
3.2.4 正方形面积分的多点近似	46
3.3 TE 波电场积分方程的 IETD 解	47
3.3.1 基函数和 IETD 解	47
3.3.2 IETD 解的 ψ 方案	52

3.3.3 算例	57
3.4 隐式解	61
3.5 TE波磁场积分方程的 IETD 解	64
第4章 三维导体散射	67
4.1 积分方程和基函数	67
4.1.1 推迟势和边界条件	67
4.1.2 RWG 基函数	68
4.1.3 三角形质心和空间位置矢的积分	71
4.2 三维导体的 IETD 解	72
4.2.1 IETD 解的 φ 方案	72
4.2.2 IETD 解的 ψ 方案	77
4.3 阻抗系数和标量势系数的计算	80
4.3.1 物体三角面片模型的简单例子	80
4.3.2 标量势系数的计算	82
4.3.3 阻抗系数的计算	85
4.3.4 三角形面积分的多点近似	89
4.4 物体表面电流密度计算	91
4.4.1 用棱边电流系数计算表面电流密度	91
4.4.2 算例	93
4.5 远区散射场	98
4.5.1 用电流系数计算远区场	98
4.5.2 算例	99
附录 A 细直导线 IETD 程序	103
IETD 参考文献	108

第二部分 时域有限差分(FDTD)方法

第5章 FDTD 基本公式及数值稳定性	110
5.1 Maxwell 方程和 Yee 元胞	110
5.2 直角坐标 FDTD 公式	112
5.2.1 三维情形	112
5.2.2 二维情形	115
5.2.3 一维情形	117
5.3 空间和时间间隔的讨论	118
5.3.1 稳定性对时间离散间隔的要求	118
5.3.2 数值色散对空间离散间隔的要求	119
5.3.3 Courant 稳定性条件	121
5.3.4 差分近似后的各向异性特性	122
5.4 目标的建模	124
第6章 近似吸收边界和几种激励源	126
6.1 Engquist-Majda 吸收边界条件	126
6.1.1 Engquist-Majda 吸收边界的解析形式	126

6.1.2	一阶近似吸收边界条件	128
6.1.3	二阶近似吸收边界条件	129
6.2	吸收边界条件的 FDTD 形式	130
6.2.1	三维情形	130
6.2.2	二维情形	133
6.3	棱边及角顶点的特殊考虑	134
6.3.1	二维角顶点的处理	134
6.3.2	三维棱边的处理	136
6.4	平面电流源	137
6.4.1	面电流源在自由空间的辐射	137
6.4.2	一维 FDTD 中面电流源的加入	138
6.5	线电流源	141
6.5.1	线电流在自由空间的辐射	141
6.5.2	二维 FDTD 中线电流源的加入	141
6.6	电偶极子源	143
6.6.1	电偶极子辐射的解析解	143
6.6.2	FDTD 中电偶极子源的加入	143
第 7 章	完全匹配层	146
7.1	各向异性介质完全匹配层基本公式	146
7.1.1	平面波入射到半空间单轴介质的反射和透射波	146
7.1.2	无反射条件	148
7.1.3	棱边和角顶区	150
7.2	UPML 的时域公式	151
7.2.1	绝缘介质-UPML 情形	152
7.2.2	导电介质-UPML 情形	154
7.2.3	一维 UPML 的时域公式	156
7.3	UPML 的 FDTD 实现	156
7.3.1	UPML 时域微分方程特点	157
7.3.2	绝缘介质-UPML 情形	158
7.3.3	导电介质-UPML 情形	161
7.3.4	一维 UPML 的 FDTD 公式	163
7.3.5	PML 的设置	164
7.4	坐标伸缩完全匹配层	165
7.4.1	坐标伸缩 Maxwell 方程及平面波	165
7.4.2	半空间界面的反射系数和无反射条件	166
7.4.3	坐标伸缩因子的复数频率移位形式	168
7.4.4	CPML 时域步进公式的离散循环卷积式	169
第 8 章	近场-远场外推和平面波加入方法	173
8.1	等效原理	173
8.2	时谐场振幅和相位的提取	174
8.2.1	峰值检测法	175
8.2.2	相位滞后法	175
8.3	时谐场的外推	176

8.3.1	三维情形基本公式	176
8.3.2	封闭面积分计算的平均值方法	178
8.3.3	二维情形时谐场的外推	181
8.4	瞬态场的外推	183
8.4.1	三维情形基本公式	183
8.4.2	外推远区场的投盒子方法	184
8.5	瞬态场外推时谐场	187
8.6	平面波加入的总场边界方法	187
8.6.1	等效原理	188
8.6.2	二维情形	188
8.6.3	三维情形	191
8.6.4	一维情形	195
8.7	介质板反射和透射一维算例	196
8.8	雷达散射宽度和二维算例	199
8.8.1	雷达散射宽度的定义	199
8.8.2	二维时谐场算例	199
8.9	雷达散射截面和三维算例	202
8.9.1	雷达散射截面定义	202
8.9.2	三维时谐场算例	203
8.9.3	三维瞬态场算例	205
第9章 共形网格与色散介质的处理方法		207
9.1	理想导体弯曲表面共形网格技术	207
9.1.1	二维情形理想导体共形网格	207
9.1.2	三维情形理想导体共形网格	210
9.2	色散介质基本模型	213
9.2.1	色散介质的频域模型	213
9.2.2	介质极化率的时域表示式	214
9.3	色散介质 RC-FDTD	215
9.3.1	分段常数循环卷积法	215
9.3.2	分段线性循环卷积法	218
9.4	色散介质移位算子 FDTD	220
9.4.1	介电系数的有理分式函数形式	220
9.4.2	移位算子法	221
9.4.3	有理分式表示中 $M=N=1$ 和 $M=N=2$ 的情形	222
9.5	色散介质物体散射算例	223
附录 B 一维 FDTD 程序		226
FDTD 参考文献		228
索引		229

第 1 章

引 言

电磁波在科学、工程技术和日常生活中已经得到广泛应用。实验技术、理论分析和模拟仿真是研究电磁波的重要手段。计算机的应用促使仿真技术和计算电磁学迅速发展。电磁波的研究可以在频域(Frequency Domain, FD)进行,也可以在时域(Time Domain, TD)进行。实际上 Maxwell 方程是时域电磁场的支配方程,时谐场只是时域过程的一种特殊情形。从历史上看,频域研究发展较早,这是因为许多电磁现象可以直接用时谐过程描写,而在计算机广泛应用以前,频域测量技术已经获得成熟发展。但是一些实际电磁现象,如雷电、核爆炸所引起的电磁脉冲以及现代数字技术中的电磁信号、高功率微波辐射的电磁脉冲等都属于时域电磁现象。由于计算机的发展,时域电磁过程的实验和模拟分析应用广泛,时域电磁学已成为一个重要的研究领域,电磁波时域计算方法已是计算电磁学的一个重要分支。



1.1 时域和频域 Maxwell 方程

Maxwell 方程(1873 年)的一般形式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array} \right. \quad (1-1)$$

式中:

\mathbf{E} ——电场强度,单位为伏特/米(V/m);

\mathbf{D} ——电通量密度,单位为库仑/米²(C/m²);

\mathbf{H} ——磁场强度,单位为安培/米(A/m);

\mathbf{B} ——磁通量密度,单位为韦伯/米²(Wb/m²);

\mathbf{J} ——电流密度,单位为安培/米²(A/m²)。

以上方程中的电荷和电流满足电荷守恒定律,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1-2)$$

对于线性各向同性介质,本构关系为

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (1-3)$$

式中,

ϵ ——介质介电系数,单位为法拉第/米(F/m);

μ ——磁导系数,单位为亨利/米(H/m);

σ ——电导率,单位为西门子/米(S/m)。

在真空中,有

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

对于时谐场,所有电磁场量 \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{D} 均为正弦或余弦形式。采用复数表示法,本书采用时谐因子为 $\exp(j\omega t)$,也可用 $\exp(-i\omega t)$ 。时谐场情形下时间导数算子与频域算子的对应关系为

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \quad (1-4)$$

这时,Maxwell 方程(1-1)变为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} + j\omega \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{cases} \quad (1-5)$$

式(1-1)是一组时域微分方程,式(1-5)为时谐场情形的 Maxwell 方程,是一组频域微分方程。通过数学分析推演,上述微分方程也可转化为相应的积分方程形式。

时域 Maxwell 方程是支配电磁现象的基本方程。在时域电磁场计算方法研究中,通常从时域 Maxwell 方程出发讨论。



1.2 计算电磁学的几种主要计算方法

目前计算电磁学已发展有多种计算方法,几种主要计算方法如表 1-1 所示。表中按照频域和时域分类列举了几种主要的数值方法和高频方法(Sadiku, 2001)。数值方法从电磁学支配方程出发进行离散,属于全波分析,所讨论问题的尺寸通常和波长相近;随着计算机技术的发展,数值方法已可用来研究数百以致近千个波长尺度的问题。高频方法所讨论的是电大尺寸问题,根据局域性近似给出高频情形的相互作用机制并导出计算公式;随着研究深入,高频方法已广泛用于电磁问题分析。

表 1-1 时域及频域的几种主要电磁学计算方法

	频域方法	时域方法
数值方法 (Numerical Method)	矩量法(Method of Moment, MoM), 快速多极子方法(Fast Multipole Method, FMM)	时域矩量法(TD-MoM), 时域积分方程(IETD)方法
	有限元法(Finite Element Method, FEM)	时域有限元(TD-FEM, 或FETD)方法
	有限差分(Finite Difference, FD)方法, 频域有限差分(Finite Difference Frequency Domain, FDFD)方法	时域有限差分(Finite Difference Time Domain, FDTD)方法
高频方法 (High Frequency Technique)	物理光学(Physical Optics, PO)方法, 迭代物理光学(Iterative Physical Optics, IPO)方法	时域物理光学(TD-PO)方法
	几何光学(Geometric Optics, GO)方法; 弹跳射线追踪(Shooting and Bouncing Ray-Tracing, SBR)方法	
	等效边缘电流(Equivalent Electric Current, EEC)方法	时域等效边缘电流(TD-EEC)方法
	几何绕射理论(Geometric Theory of Diffraction, GTD), 物理绕射理论(Physical Theory of Diffraction, PTD)	时域几何绕射理论(TD-GTD)

本书讨论几种时域计算数值方法: 时域积分方程(IETD)方法, 时域有限差分(FDTD)方法和时域有限元(FETD)方法。三种方法的空间离散和时间离散处理彼此不同, 几种方法各有长处, 在微波、天线、通信、电波传播、电磁兼容、异向介质(Metamaterials)新材料等许多领域应用非常广泛, 并有多种商用和专用软件。它们主要特性的简要比较如表 1-2 (Sadiku, 2001)所示。

表 1-2 电磁波时域计算三种方法的比较

	IETD	FETD	FDTD
出发点方程	由积分方程和 Green 函数出发离散, 概念难度中等	用变分法或加权余量法将微分方程转化为积分形式后离散, 概念难度较大	由 Maxwell 方程取差分近似后直接离散, 概念难度较小
空间离散	物体边界离散, 内存相对小	计算域全域离散, 内存相对较大	计算域全域离散, 内存相对较大
离散单元	非结构网格, 物体外形拟合好	非结构网格, 物体外形拟合好	结构网格, 物体外形拟合有台阶误差
介质物体特性	不易处理非线性、非均匀介质	可以处理非线性、非均匀介质	可以处理非线性、非均匀介质
计算区域	便于开域问题	开域需要吸收边界	开域需要吸收边界
时域离散	时间导数差分离散	Newmark 离散	中心差分离散
离散后方程形式	矩阵方程, 满矩阵; 有显式和隐式解	矩阵方程, 稀疏矩阵; 每一时间步需要矩阵反演	显式时间步进, 无需矩阵反演



1.3 用 Fourier 变换实现时域和频域之间的转换

电磁学的时域及频域计算结果之间可以运用 Fourier 变换(Fourier Transform, FT)实现相互转换,如图 1-1 所示。

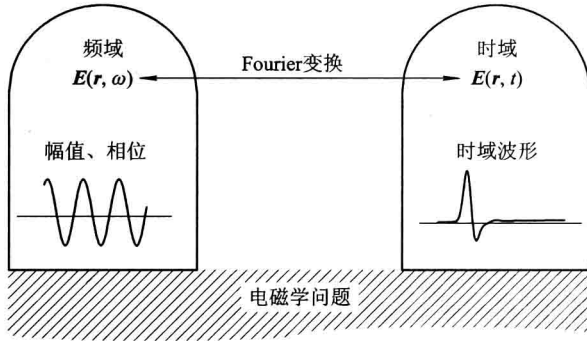


图 1-1 时域及频域结果之间的相互转换

1.3.1 Fourier 变换

时域波形与频域特性之间的转换可以通过 Fourier 变换实现(Brigham, 1974)。Fourier 变换的定义为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (1-6)$$

上式等号左边 $h(t)$ 表示时域波形,右边积分号内 $H(f)$ 表示频率为 f 的复数振幅(幅值和相位),也称为信号频谱。

Fourier 变换的逆变换(Inverse Fourier Transform, IFT)为

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1-7)$$

在本书以后分析中几个常用函数的 Fourier 变换对如表 1-3(Bracewell, 1978)所示,其中角频率(或圆频率) $\omega = 2\pi f$, $U(t)$ 为阶梯函数,定义为

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

表 1-3 几个常用函数 Fourier 变换对

频域 $H(f)$	时域 $h(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{j\omega}$	$U(t)$
$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	$\exp(-\alpha t)U(t)$
$\frac{j\omega + \alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + j2\alpha\omega - \omega^2}$	$\exp(-\alpha t) \cos(\beta t)U(t)$
$\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + j2\alpha\omega - \omega^2}$	$\exp(-\alpha t) \sin(\beta t)U(t)$

时域电磁学分析中,时域波形通常为实数函数。下面考虑实数时域波形的 Fourier 变换特性。当 $h(t)$ 为实数函数时,将式(1-7)取复数共轭,可得

$$H^*(f) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(j2\pi ft) dt$$

将上式中 f 用 $-f$ 代替后得到

$$H^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt = H(f) \quad (1-9)$$

上式给出了 $f < 0$ 和 $f > 0$ 范围的频谱之间关系。实际测量中频率 f 恒为正值,所以式(1-6)中“负”频率的复数振幅实际上是利用式(1-9)从正频率范围的特性延拓后获得的。

将式(1-9)代入式(1-6)后得到

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_{-\infty}^0 H(f) \exp(j2\pi ft) df + \int_0^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= -\int_0^{\infty} H(-f) \exp(-j2\pi ft) df + \int_0^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= \left[\int_0^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \right]^* + \int_0^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df \right\} \end{aligned} \quad (1-10)$$

上式表明,如果已知信号在频域的正频率($f > 0$)范围特性,直接应用上式即可获得其时域脉冲波形。

实际的时域波形通常具有因果性(causality),如图1-2所示。所谓因果性,是指函数值自某一时刻(通常取该时刻为计时起点 $t=0$)以后才不为零,即

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ h(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1-11)$$

对于式(1-11)所示因果函数,式(1-7)变为

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_0^{\infty} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &\simeq \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) \exp[-j2\pi f(n\Delta t)] \end{aligned} \quad (1-12)$$

上式的最后近似等号是采用离散方式计算积分的结果。考虑到实际时域波形拖尾的有限性,上式中的求和截止到有限项。进一步将上式中频率取等间隔离散 $f = m\Delta f$, 且令

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t} \quad (1-13)$$

将式(1-13)代入式(1-12)得到

$$\begin{aligned} H(m\Delta f) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) \exp[-j2\pi(m\Delta f) \cdot (n\Delta t)] \\ &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} h(n\Delta t) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot n\right] \end{aligned} \quad (1-14)$$

上式给出时域波形与频域特性离散值之间的关系。应当注意,时域间隔 Δt 与频域间隔 Δf

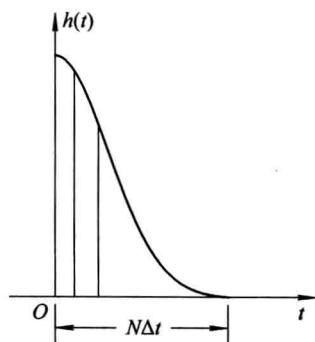


图 1-2 时域波形具有因果性

之间满足关系式(1-13)。

1.3.2 离散 Fourier 变换

离散 Fourier 变换(Discrete Fourier Transform, DFT)是两个数组之间的一种映射关系。数组 $q(n)$ 的离散 Fourier 变换定义为

$$Q(m) = \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot n\right], \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-15)$$

式中, $q(n)$ 和 $Q(m)$ 为 N 个元素的有限序列(数组)。可以证明, 上式的逆变换为

$$q(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} Q(m) \exp\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot n\right], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-16)$$

为了证明式(1-16), 首先证明下述正交关系式:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(m-k)\right] = N\delta_{mk} = \begin{cases} N, & \text{若 } m = k \\ 0, & \text{若 } m \neq k \end{cases}, \quad m, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1-17)$$

根据因式分解有

$$a^N - 1 = (a-1)(a^{N-1} + a^{N-2} + \dots + a + 1) \quad (1-18)$$

或

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{a^N - 1}{a - 1} \quad (1-19)$$

令上式中

$$a = \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-k)\right] \quad (1-20)$$

代入式(1-19)得到

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(m-k)\right] = \frac{\exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)N(m-k)\right] - 1}{\exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m-k)\right] - 1} = \begin{cases} N, & \text{if } m = k \\ 0, & \text{if } m \neq k \end{cases} \quad (1-21)$$

上式中 $m=k$ 时变为 $0/0$ 不定型, 其值可按照罗必达法则求出, 为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(Nx) - 1}{\exp(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{N\exp(Nx)}{\exp(x)} = N \quad (1-22)$$

式(1-21)就是式(1-17)。

将离散 Fourier 变换式(1-15)两端乘以 $\exp\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot k\right]$ 得到

$$Q(m) \exp\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot k\right] = \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot (n-k)\right] \quad (1-23)$$

对 m 求和, 再利用式(1-21)可得结果为

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} Q(m) \exp\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot k\right] &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot (n-k)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot (n-k)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q(n) N\delta_{nk} = Nq(k) \end{aligned} \quad (1-24)$$

式(1-24)就是 DFT 的逆变换式(1-16)。证毕。

根据研究,式(1-15)所定义的 DFT 在实际编程计算中有快速算法,通常称为快速 Fourier 变换(Fast Fourier Transform, FFT)(Brigham, 1974)。表 1-4 给出了 DFT 的最简单例子。

若将式(1-14)中的时域波形样本值 $h(n\Delta t)$ 看做 $q(n)$, 则有

$$H(m\Delta f) = \Delta t \cdot \text{DFT}\{h(n\Delta t)\} \quad (1-25)$$

反之,若将频域样本值 $H(m\Delta f)$ 作为已知,则有

$$h(n\Delta t) = \text{IDFT}\left\{\frac{1}{\Delta t}H(m\Delta f)\right\} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{m=0}^{N-1} H(m\Delta f) \exp\left[j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot n\right] \quad (1-26)$$

由此可见,时域和频域样本值之间具有 DFT 变换对的关系。

应当注意,式(1-15)所定义的 DFT 具有周期性,即

$$\begin{aligned} Q(m+N) &= \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(m+N) \cdot n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} q(n) \exp\left[-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m \cdot n\right] \exp(-j2\pi n) \\ &= Q(m) \end{aligned} \quad (1-27)$$

上式后一等式用到 $\exp(-j2\pi n)=1$ 。根据此周期性,如果把 DFT 所得 N 个数据看做正频率的第一个周期,则其中后面 $N/2$ 个数据,即后半周期实际上和“负”频率分量相同,如图 1-3 所示。作为示意,图中纵坐标采用频谱的模值 $|H(f)|$ 。

表 1-4 DFT 的最简单例子

数组	$q(n)$	$Q(m)$
$N=2$	1, 0	1, 1
	0, 1	1, -1
$N=4$	1, 0, 0, 0	1, 1, 1, 1
	0, 1, 0, 0	1, -j, -1, j
	1, 1, 1, 1	4, 0, 0, 0

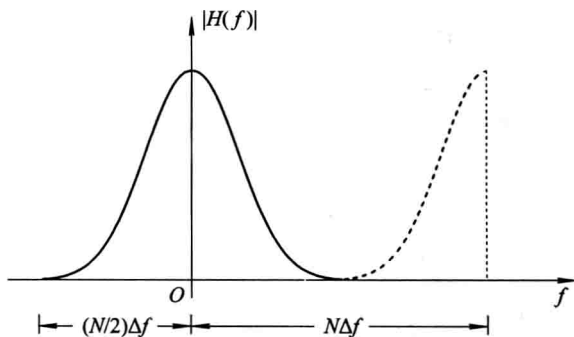


图 1-3 离散 Fourier 变换的周期性

1.4 几种常用脉冲波形及其频谱

1.4.1 高斯脉冲

高斯脉冲函数的时域形式为

$$E_i(t) = E_0 \exp\left[-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right] \quad (1-28)$$