赵竹红 主编
黄宏彬 本册主编
高校自主招生考试研究会

全国重点大学自主招生通用教程

QUANGUO ZHONGDIANDAXUE ZIZHUZHAOSHENG TONGYONGJIAOCHENG

物理

WULI

南京大学出版社

赵竹红 主编
黄宏彬 本册主编
高校自主招生考试研究会

全国重点大学自主招生通用教程

QUANGUO ZHONGDIANDAXUE ZIZHUZHAOSHENG TONGYONGJIAOCHENG

物理

WULI

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国重点大学自主招生通用教程・物理 / 赵竹红主编. —南京:南京大学出版社,2014.8
ISBN 978 - 7 - 305 - 13696 - 2

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①中学物理课—高中—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178070 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 全国重点大学自主招生通用教程・物理
主　　编 赵竹红
本册主编 黄宏彬
责任编辑 顾　越　　编辑热线 025 - 83595509

照　　排 江苏南大印刷厂
印　　刷 南京人文印务有限公司
开　　本 787×1092 1/16 印张 11 字数 286 千
版　　次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978 - 7 - 305 - 13696 - 2
定　　价 35.00 元

网　　址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:025 - 83594756

跃起闯关，铸造辉煌
（代前言）

王步高

跨进大学校门，对很多人而言，是人生黄金时代的开始。我先后就读于南京大学和吉林大学、南京师范大学，长期任教于东南大学，退休后又任教于清华大学，比较这些学校，虽都叫“大学”，实际办学风格、办学特色各不相同，或者说“大”和强大程度并不相同，这是人所共知的。华中科技大学有位教授说：“泡菜的味道，是由泡菜坛中水的味道决定的。”来清华大学以后，我更体会到上大学能进入清华这样的著名高校，对一生成才能提供更好的文化环境和文化氛围，才能更找到上大学的感觉。大学之间的差别，不仅在办学规模的大小、校园面积的不同、硬件设施和办学条件及师生的水平差异等等多数人能想象得出的不同，而且名校拥有一种“雍容大度”的胸襟，“追求卓越，耻不如人”的气概，一些说不清、道不明，却又明明白白存在的类似“气场”这样的东西。当您长期生活在它的氛围中，特别是您将它与不同层次高校比较时，更会有这样的感受。据说，清华大学每年在河北这样很大的省就录取30来人，即使在一个县、市名列第一，也未必一定能被录取。您能上清华、北大、南大、东大、复旦、交大、浙大、吉林大学这类高校，会使您的青春放射出更奇丽的光彩。

清华大学历史上有过许多不拘一格录取人才的佳话。1929年夏，钱钟书报考清华大学，而他的数学成绩仅15分，但是他的国文成绩和英文成绩都是特优，主管录取的老师便将他的成绩报告了校长罗家伦。罗家伦没有只注重总分，不看重考生的单科成绩，而是打破惯例，予以破格录取。这在清华被传为美谈。若没有当初的“破”，清华便少了这位立誓“横扫清华图书馆”的才华横溢的青年才子。

钱伟长回忆考清华大学时，“我还记得当时的语文题目是《梦游清华园记》，我写了一篇赋，45分钟450字，出题目的老师想改，一个字也改不了。后来他给了100分。历史题目是写二十四史的名称、作者、卷数，我一点错误都没有，又是满分”。钱伟长选入历史系，不久爆发了“九·一八”事变，他立志要科学救国，向学校提出想转学理工。物理系主任吴有训看到他的物理成绩仅5分，数学、化学两科成绩加起来也不过20分，而英文则是0分，而清华大学的理工科课堂基本上是用英语讲授，不允许他转系。后经钱再三申请，理学院准许他试读，并且规定第一年的大学普通物理、微积分、普通化学等三门课都要过70分才能正式入物理系。经过刻苦学习和改进学习方法，钱伟长终于如愿进入物理系，后又到加拿大求学，成为著名物理学家，1955年当选中科院首批学部委员。

华罗庚少年时期命运十分坎坷，他的腿因幼时患伤寒症而跛，初中毕业后辍学在金坛中学当会计。1930年华罗庚在《科学》上发表论文《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由》，被清华算学系主任熊庆来、杨武之教授等看到，认为他很有数学天资，值得培养，请

示理学院院长叶企孙，得到支持，便安排他到算学系图书馆做助理员，一边工作一边旁听大学课程。1933 年，在熊庆来、杨武之、郑之蕃等教授的极力推荐下，华罗庚被清华破格提为助教，教授微积分课程。1936 年，华罗庚经学校推荐，以访问学者身份派往英国剑桥大学留学。1938 年华罗庚回国后，又被破格聘为西南联大教授，成为著名数学家。

我认为，如今各著名高校进行的自主招生，就是要达到两个目的：其一，要不拘一格，把未来的钱钟书、钱伟长、华罗庚录取进来，尤其要注意录取偏科、确实在某一方面具有特长的学生，不至于因总分不够而不能进入名校；其二，让一些一贯成绩优秀，因一时临场发挥不正常，未考出应有水平的高材生，不至因“一张考卷定终身”而与名校失之交臂 。说到底，是要让目前争议很大的高考，得到某种补偿，真正起到选拔优秀可造之才的作用。

这使优秀的人才多了一次接受名校选拔的机会，录取的几率也大大增加。因此，自主考试的成败便显得非常重要。

然而，自主考试虽推出不止一年，以往均各校自主命题，因教师喜好不同，本身专业背景不同，命题五花八门，没有太多规律可循。从 2010 年起，清华、北大和若干所高校联合命题，形成所谓“华约”“北约”，前一年的试题也不难得到，这便给新一年的应试者探索其出题规律，在尽量不影响高考复习正常进程的情况下准备好自主招生考试提供了可能。要选拔符合新时代竞争需求的具备创新意识和综合实践能力的优秀考生，命题中应用型、能力型试题比重会加大，主要考查考生的综合素质与能力。自主考试的试题正逐步走向正轨。

吴先生是我们东南大学的校友，长期办学，有适度超前的教育理念，有一套指导学生复习应考的好方法，团结了一批学有所长、教有所长的教师。最近又编著了一套面向著名高校自主招生的教材，这套书包括《语文》《数学》《英语》《文科综合及面试》《理科综合及面试》五本，体例在共性上至少包括三大模块，即“核心知识探究”“精选真题剖析”“模拟实战冲刺”。它的资料采集新颖、丰富，知识构架整合、提升，解题方法视角独特，集备考的资料性、实用性、针对性于一体。为考生准备自主招生提供帮助，开全国风气之先，我愿其成功！

希望同学们借助这套书完成优秀中学与重点大学之间的衔接：(1) 明确复习重点，优化中学学科知识结构，衔接(输入、学习、了解)大学学科基础知识与基本研究技能；(2) 拓展学科思维，理解掌握学科规律，深化经典范题，提升创新能力；(3) 把握命题趋势，透视社会热点与焦点，范式点评、综合研练各类题型的解题思路。

此外，也希望同学们对要报考的高校的基本办学理念、办学精神、校训等有所了解。

祝同学们在自主招生考试中取得成功，更希望您能以此为起点，“跃起闯关，铸造辉煌”，既铸造高考的辉煌，更开启理想的黄金时代，铸造一生的辉煌。我特别希望稍后在我们清华园里，与您相逢，也祝愿您会成为我们清华、南大、东大、吉林大学的校友，希望您能成为钱钟书、钱伟长、华罗庚一样的成功者，让祖国人民为您骄傲！

2012 年 5 月 22 日于清华园

王步高　东南大学国家二级教授(文科最高级)，国家两项精品课程主持人，清华大学特聘教授

目 录

物理部分

第 1 章 数学工具 …… 1

1.1 微积分 …… 1

1.2 物理量 …… 8

第 2 章 时空运动 …… 13

2.1 运动学 …… 13

2.2 时空观 …… 21

第 3 章 质点力学 …… 28

3.1 牛顿力学 …… 28

3.2 相对论力学 …… 38

第 4 章 守恒量 …… 45

4.1 线动量和角动量 …… 45

4.2 动能和势能 …… 50

4.3 守恒量的综合应用 …… 52

第五章 力学问题 …… 58

5.1 动力学 …… 58

5.2 静平衡 …… 64

第 6 章 基本作用 …… 71

6.1 引力场 …… 71

6.2 电磁力 …… 79

第 7 章 电场与导体 …… 87

7.1 电场 …… 87

7.2 导体 …… 92

第 8 章 稳恒磁场与电磁感应 …… 99

8.1 磁场 …… 99

8.2 电磁感应 …… 102

第 9 章　振动与波动 …… 110
9.1　振动 …… 110
9.2　波动 …… 116
第 10 章　经典光学 …… 122
10.1　几何光学 …… 122
10.2　波动光学 …… 128
第 11 章　量子物理 …… 132
11.1　量子论 …… 132
11.2　原子论 …… 135
第 12 章　热物理学 …… 140
12.1　气体动理论 …… 140
12.2　热力学 …… 143
第 13 章　模拟测试 …… 151
13.1　复习题 …… 151
13.2　模拟测试 …… 162

第1章 数学工具

数学是物理学的工具."工欲善其事,必先利其器",这一章我们从直观实用的角度来介绍微积分和物理量,不求全面与系统,重在基本概念和核心思想,并为以后的物理表述提供表达符号和运算公式,更严格的数学论证读者可以参考有关书籍.

1.1 微积分

微积分,或者数学分析,是人类思维的伟大成果之一,它处于自然科学与人文科学之间的地位,使它成为高等教育的一种特别有用的工具.

——R. 柯朗

一、微分

微分,顾名思义,就是微小的部分,在应用时常称为微元.在物理里,最基本的对象往往是点模型,例如质点和点电荷,因而研究一个连续分布的体系时,要将其划分为微元进行物理分析和数学处理.例如,一段长度为 l 的导线,取其一有限部分,记为 Δl.如果 $\Delta l\to 0$,即为导线的微元,简称线元,记为 dl.如果 dl 乘上质量或电荷线密度 λ,则有质量微元 $dm=\lambda dl$ 或电荷微元 $dq=\lambda dl$.从数学角度讲,这些微元可以任意小,称为无穷小量;但从物理角度讲,这些仅是宏观上看起来无穷小,若真的小到原子尺度以下,就几乎是真空了.因此这些微元从微观上看要取得足够大,以保证线密度作为该范围内的平均值有意义;而从宏观上看必须足够小,以保证我们可以把它们当成微元处理.

在数学里,微分是对变量而言的,比如 x 的变化量 Δx 趋于无穷小时,则记为微元 dx.作为 x 的函数,$y=f(x)$ 随 x 而变化,其微分则为

$$dy = f(x+dx)-f(x) \equiv \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)].$$

dy 的具体表示式,显然依赖于函数的具体形式,这里举两个例子.

【例1】 已知 $y=x^3$,试求与 dx 相应的微分 dy.

解:根据定义,有

$$dy = (x+dx)^3-x^3.$$

可得

$$dy = x^3+3x^2dx+3x(dx)^2+(dx)^3-x^3.$$

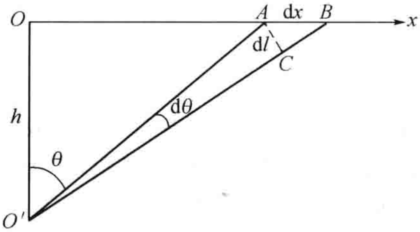
略去比 $\mathrm{d}x$ 高阶的无穷小 $(\mathrm{d}x)^2$，$(\mathrm{d}x)^3$ 后，得到

$$\mathrm{d}y = 3x^2\mathrm{d}x.$$

【例 2】 已知 $x=h\tan\theta$，试求与 $\mathrm{d}\theta$ 相应的微分 $\mathrm{d}x$.

解：由于 $x=h\tan\theta$ 很容易被赋予几何意义，我们从几何关系来考察角度的微元变化 $\mathrm{d}\theta$ 引起的 x 的微分变化 $\mathrm{d}x$.

如下图所示，一个处在点 O' 处的探照灯旋转角度 θ 时，在距其距离为 h 处的直河岸 Ox 的光斑位置为 A，当角度 θ 改变 $\mathrm{d}\theta$ 后，光斑移到 B 处，B 相对 A 的位置改变即为 $\mathrm{d}x$.



为了求出 $\mathrm{d}x$，我们从 A 点作 $O'B$ 的垂线 AC，其长度为 $\mathrm{d}l$. 由于 $\mathrm{d}\theta$ 是无穷小，可得

$$\mathrm{d}l = |O'A|\,\mathrm{d}\theta = \frac{h}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta.$$

进一步，由几何关系可得

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}l}{\cos\theta} = \frac{h}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

在物理里，很多物质系统会随时间演变，描述这些系统的物理量就会成为时间 t 的函数. 分析这些系统时，我们往往需要把这些变化过程划分成一个个微元过程，即考察微元 $\mathrm{d}t$ 时间内物理量相应的微元变化. 在质点力学里面，这些微元之间的关系往往就是描述质点系统的基本动力学规律，例如动量、角动量和动能定理可以写成微分形式：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

因此，必须掌握好微分的概念，这样不仅可以更深刻地理解物理规律，也可以用它来解决与连续系统和变化过程有关的物理问题.

二、微商

在一个不断变化的世界里，我们往往需要考察一个量随另一量变化的快慢，即速度或变化率的问题，这时需要引进微商的概念. 微商在数学里也叫导数，就是两个微分相除得到的商.

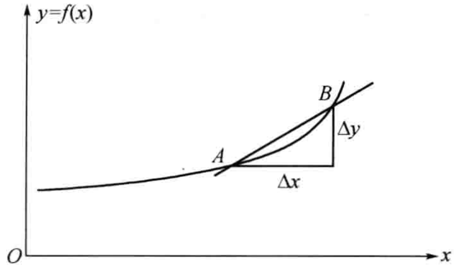
1. 微商的定义和记号

函数 $y=f(x)$ 的一阶微商记为 $f'(x)$，它的定义为

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

其几何解释就是函数曲线在 x 处切线的斜率. 如下图所示，一条割线交函数曲线于 A，B 两点，割

线 AB 的斜率就是$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，当 $\Delta x \to 0$ 时，B 点就越来越接近 A 点，割线 AB 最终变为过 A 点的切线，该切线的斜率就是该处函数的微商或导数.



显然 $f'(x)$ 也是 x 的函数，进一步可以定义函数 $y=f(x)$的二阶和三阶微商，分别为

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}, f'''(x) = \frac{\mathrm{d}f''(x)}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}.$$

n 阶微商则记为

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}f^{(n-1)}(x)}{\mathrm{d}x} \equiv \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

在物理里，我们常碰到随时间变化的变量，为了表述简单，我们在变量上面加一点、两点来表示对时间的一阶、二阶导数，例如质点在 x 轴方向的速度和加速度可以记为

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}, a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}.$$

2. 求导规则和公式

根据微商的定义，可直接得到求导的一些基本规则：

(1) 函数 $y=f^{-1}(x)$是函数 $y=f(x)$的反函数，由 x 和 y 的互反关系，易得

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}f(y)} = \frac{1}{\mathrm{d}f(y)/\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(y)}.$$

(2) 如果 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则复合函数 $y=f[g(x)]$的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u)g'(x).$$

(3) 如果 y 与 x 的函数关系由参数方程 $y=y(t)$，$x=x(t)$给出，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

(4) 对于两个函数 $u(x)$，$v(x)$ 的和与差的导数，则由

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v,$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(5) 对于两个函数 $u(x)$，$v(x)$ 的积的导数，则由

$$\mathrm{d}(uv) = (u + \mathrm{d}u)(v + \mathrm{d}v) - uv = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u,$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}[u(x)v(x)]}{\mathrm{d}x}=u(x)\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}x}+v(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}=u(x)v'(x)+v(x)u'(x).$$

下面我们不加证明地给出一些常用初等函数的导数公式：

(1) $y=C, y'=0$.

(2) $y=x^n(n\neq 0), y'=nx^{n-1}$.

(3) $y=\sin x, y'=\cos x$.

(4) $y=\cos x, y'=-\sin x$.

(5) $y=\mathrm{e}^x, y'=\mathrm{e}^x$.

(6) $y=\ln x, y'=\frac{1}{x}$.

有了这些基本导数，并运用基本规则，就可以求出更多复杂函数的导数. 对于隐函数求导我们也可基于导数的基本定义而得到. 这儿，我们通过两个例子予以说明.

【例 3】 求 $y=\tan\theta$ 对 θ 的一阶导数.

解：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\cos^{-1}\theta)\\&=\cos\theta\cos^{-1}\theta+\sin\theta(-\cos^{-2}\theta)(-\sin\theta)\\&=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta.\end{aligned}$$

从这个结果，容易得到例 2 中的微分为

$$\mathrm{d}(h\tan\theta)=h\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta=h\frac{1}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=h\sec^2\theta\mathrm{d}\theta.$$

【例 4】 已知直角坐标系中圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$，求 $y'(x)$.

解：这是个隐函数求导问题，对所给方程两边求导，得

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

从而可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

也可对方程两边求微分，可得

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0,$$

进而一样得到

$$y'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

如果把圆的方程改为参数方程

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$$

则可得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\frac{r\cos\theta}{-r\sin\theta}=-\frac{x}{y}.$$

这个例题看起来简单,但请细心体会 3 种不同解法的具体含义.

3. 微商的应用

微商在数学和物理中都有很广的应用. 例如运动学里面速度和加速度分别定义为位置矢量对时间的一阶导数和二阶导数,动力学里面牛顿第二定律就是力和动量对时间变化率的方程,而电磁感应部分中的法拉第定律给出的是电动势和磁通量变化率的方程. 微积分的基本概念正是由于物理学的需要才由牛顿等人首先提出来的,后来由数学家发展为严格的数学理论.

引入导数以后,从它作为曲线 $y=f(x)$ 斜率的几何意义,可以得到求函数 $y=f(x)$ 极值的一般方法. 极值所在位置由一阶导数 $f'(x)=0$ 确定,极小值还是极大值由二阶导数 $f''(x)$ 的正负来判断. 一般教科书里面都有这方面的详细内容,这里不再赘述.

我们下面主要讨论微商在函数逼近中的应用:泰勒级数和小量展开. 在 $x=x_0$ 附近可以把函数 $y=f(x)$ 展开为泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$$

通过两边求导,我们可以验证这个式子的正确性.

由函数的泰勒级数表示,我们可以得到在物理里面用得很多的一些小量展开公式,如:

$$(1\pm x)^n=1\pm nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots\quad(x\ll 1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\quad(x\ll 1)$$

$$\ln(1\pm x)=\pm x-\frac{1}{2!}x^2+\cdots\quad(|x|\ll 1)$$

这里的公式都给到二级或以上近似,通常情况下,在很多物理问题里面,只要准确到一级近似就可以了.

三、积分

积分就是微分的累积,本质上就是求和,把划分开来的微小部分重新合成为一个整体. 把变量 y 在区间 $[y_i, y_f]$ 中的微小变化 $\mathrm{d}y$ 累加在一起就是整个区间的变化,用积分符号写出来就是

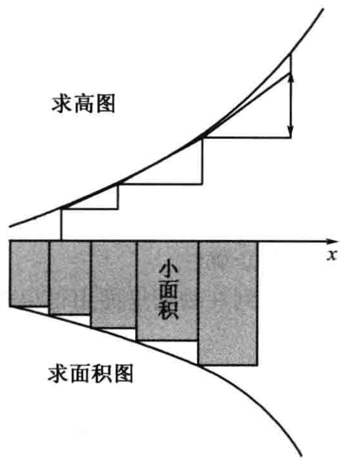
$$\int_{y_i}^{y_f}\mathrm{d}y=y_f-y_i=\Delta y.$$

如果 $y=f(x)$,则由其微商 $f'(x)$ 可得其微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,并注意 x 和 y 的对应关系,则有

$$\int_{x_i}^{x_f}f'(x)\mathrm{d}x=f(x_f)-f(x_i).$$

这就是计算区间 $[x_i, x_f]$ 中定积分的牛顿-莱布尼兹公式. 式中 x_i 称为积分下限，x_f 称为积分上限，$f'(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的导函数，而 $y=f(x)$ 则称为 $f'(x)$ 的原函数. 这个公式表明了微分和积分运算的互逆关系，它是微积分学的灵魂核心，也被称为积分学的基本定理.

从积分学基本定理可以看出，积分其实就是知道斜率 $f'(x)$，从 $\mathrm{d}x$ 求得 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，然后累积得到整个 Δy. 这正是林群院士于一棵古树之下对微积分本质的一个感悟：积分就是由斜率求高. 这其实就是初中就知道的三角函数知识的延伸，很容易能想到. 在一般的微积分教科书中，积分的几何解释则是面积，即 $f'(x)$ 曲线与 x 轴之间在 $[x_i, x_f]$ 区间范围内所包围的面积. 林院士把这两种解释画在一张图上，如下图所示. 国外有人引用后并赞曰："这大概是最重要的一张图，顶得上 1 000 个符号和方程，将积分的实质压缩在一张快照之中."深刻领悟这张图对于我们把握微积分实质并用图像法解题是关键中的关键.



理解了积分的本质之后，我们就可以将求积分的问题转为由导函数 $f'(x)$ 求原函数 $y=f(x)$. 如果把定积分中的上限 x_f 换成变量 x，我们可得到原函数的不定积分的表达式

$$\int_{x_i}^{x} f'(x)\mathrm{d}x = f(x) - f(x_i) = f(x) + C.$$

其中，C 为任意常数，在具体物理问题中取决于初始条件或边界条件. 简单的积分，由导数公式反之即得原函数，例如：

$$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C. \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C.$$

复杂的积分，我们可以通过查积分表、换元积分或分步积分等方法来求原函数.

1. 换元积分

若 $x=g(u)$，则 $\mathrm{d}x=g'(u)\mathrm{d}u$，从而可得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u.$$

该式正向进行，成为第二类换元法；反向进行，则是第一类换元法，即所谓凑微分法.

2. 分步积分

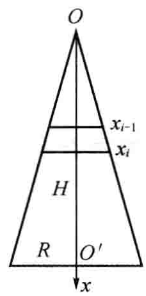
由 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ 可得

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

关于积分的具体技巧我们不再深入讨论. 下面，我们通过一个具体的例子来说明积分是如何从实际问题产生以及如何进行计算的.

【例 5】 试求证一个底面半径为 R、高为 H 的圆锥体的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

证明：我们先按微元积分的原始想法来展示求解的一般过程，然后再将其表示为抽象的积分形式.



如右图所示，在圆锥体的纵剖面图中，取 OO' 为 x 轴，O 为原点. 将高 OO' 分成 n 等份，等分点的坐标为 $x_i=i\frac{H}{n}(i=1,2,\cdots,n-1)$，并记 $x_0=0,x_n=H$. 从每个等分点作垂直于 OO' 的平面，这些平面把圆锥体分成 $n-1$ 个圆台，当 n 很大时这些圆台可以近似为一个个圆柱.

考察介于 x_{i-1}，x_i 之间的圆台，其上表面的半径为（由于 n 的值很大，x_0 与 x_1 之间的圆锥体积可忽略不计，为 0）

$$r_{i-1}=\frac{x_{i-1}}{H}R.$$

如果该圆台可以近似为圆柱，其体积则约为

$$V_i\approx\pi r_{i-1}^2\frac{H}{n}=\pi R^2H\frac{(i-1)^2}{n^3}.$$

从而整个圆锥体的体积近似为 n 个圆台的体积之和，为

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i=\pi R^2H\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2=\pi R^2H\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2.$$

我们知道自然数平方的级数之和为

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

于是，可得圆锥体的体积为

$$V=\sum_{i=1}^{n}V_i=\pi R^2H\frac{1}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{1}{3}\pi R^2H(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{2n}).$$

在 $n\to\infty$ 时，这个结果就应该是圆锥体的真正体积，为

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{1}{2n})=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

以上的求解过程，大概可以分为 4 个过程：分割、近似、求和与取极限. 前两个过程就是取微

元，通过分析给出微元体积. 注意 $x_i - x_{i-1} = \frac{H}{n}$，在 $n \to \infty$ 时，即为微元 $\mathrm{d}x$，于是可记 x_{i-1} 为 x，x_i 为 $x + \mathrm{d}x$，则 V_i 就是微元体积

$$\mathrm{d}V = \pi \left(\frac{x}{H} R \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{H^2} x^2 \mathrm{d}x.$$

那么，后两个过程就是对微元进行积分，从而得到

$$V = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \frac{1}{3} H^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

练习

1. 试求出洛伦兹因子 γ 对时间的一阶导数，已知 γ 与质点速度 v 的关系为 $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

2. 试根据积分的基本含义求抛物线 $y = x^2$ 在[0,1]区间中曲线与 x 轴所围的面积.

参考答案

1. $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma^3}{c^2} v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma^3}{c^2} va$　2. $S = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$

1.2 物理量

一个物理系统的描述，往往涉及一些基本概念和相应的数学表示，即需要用物理量来描述这个系统. 学习一个物理量，我们可以思考以下一些问题：

1. 为什么要引进这个物理量？
2. 如何定义和测量它？
3. 它的符号表示是什么？
4. 它的单位和量纲是什么？
5. 它的数量级如何？
6. 它是标量还是矢量？
7. 它与参考系和坐标系有关吗？
8. 它与其他物理量是怎么联系的？
9. 它有什么应用？

物理学追求的是对世界的普遍描述，它自然需要用数学这个普适语言来表述. 为了表述的普适性，物理方程应该对参考系来说是协变的，即具有相同的数学形式；物理量应该与坐标系无关，因而物理量往往表示为张量，零阶张量和一阶张量就是我们熟悉的标量和矢量(数学里称为向量).

一、标量

在物理学里面，质量、温度、能量等物理量都是标量，它们与坐标系无关，但可能与参考系有关，如动能. 标量一般有单位，统一使用国际单位制，有些场合也用常用单位，如在原子物理中能量往往以电子伏特(eV)为单位；在一定单位下，它有具体的数值，一般用科学计数法表示，前面

是有效数字，后面跟数量级. 不论实验还是理论，我们常要对物理量进行量纲分析和数量级估计.

1. 量纲分析

在国际单位制中，我们选择长度(L)、质量(M)、时间(T)、电流(I)、热力学温度(Θ)、发光强度(J)和物质的量(N)作为基本量，其他物理量为导出量. 具体一个物理量单位可以变，但量纲不变，一般用下式表示

$$[Q]=\mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}\mathrm{I}^{\delta}\Theta^{\varepsilon}\mathrm{J}^{\xi}\mathrm{N}^{\eta}.$$

其中，幂指数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\xi,\eta$ 称为量纲指数.

在开展物理研究时，我们往往先用量纲分析确定一个物理量和其他物理量的关系.

【例 1】 试用量纲分析确定单摆周期 τ 与线长 l、重力加速度 g 的关系.

解：周期 τ 与线长 l、重力加速度 g 的关系可假设为 $\tau\propto l^{\alpha}g^{\beta}$，写成量纲式为

$$[\tau]=[l]^{\alpha}[g]^{\beta}.$$

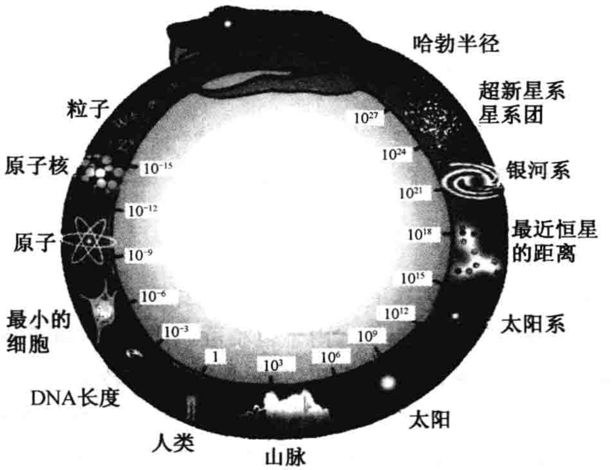
$$\mathrm{T}=\mathrm{L}^{\alpha}(\mathrm{LT}^{-2})^{\beta}.$$

比较两边指数，易得 $\alpha=-\beta=\dfrac{1}{2}$，故

$$\tau\propto\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

2. 数量级估计

数量级就是以 10 为底的幂指数的大小，它反映了物质世界的数量特征，比如我们就生活在一个数量级不同的世界中，如下图所示. 在实验研究时，需要根据物理量的数量级设计实验和选用仪器；在理论计算时，也要先估计数量级，以判断模型是否正确、计算方法是否可靠. 因而，在物理里，我们需要学会数量级估计，从而做到心中有数.



【例 2】 黑体辐射总辐出度(单位时间内单位面积上辐射出的电磁波能量)与温度的关系为 $M=\sigma T^4$，其中 σ 为斯特藩-玻耳兹曼常量. 由理论分析可知

$$\sigma=\frac{2\pi^5}{15}\cdot\frac{k^4}{h^3c^2}.$$

其中 h 为普朗克常量，c 为真空中的光速，k 为玻耳兹曼常量. 试估算斯特藩-玻耳兹曼常量 σ 的数量级.

解：把基本常数的数值代入公式，分开有效数字和指数部分，并进行适当近似，有

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2\pi^5}{15}\cdot\frac{k^4}{h^3c^2}\\ &= 2\pi(\pi^2)^2\cdot\frac{1.381}{15}\cdot\left(\frac{1.381}{6.626}\right)^3\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{10^{-23\times4}}{10^{-34\times3+8\times2}}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}\\ &\approx 6\times10^2\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{125\times8}10^{-6} = 6\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}.\end{aligned}$$

精确计算的结果为

$$\sigma = 5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}.$$

【例 3】 (2007 年，北京大学)设想一种新的单位体系，取长度单位为 1 m，而时间单位和质量单位这样选取：使光速 c 和引力常量 G 的大小都等于 1. 在新单位体系中，1 质量单位相当于多少千克？

解：设此新单位系统中，其长度单位、质量单位、时间单位分别为 m′、kg′、s′.

为使光速 c 的大小为 1，有

$$c = 1\ \mathrm{m'/s'} = 3\times10^8\ \mathrm{m/s}.$$

依题意，有 1 m′=1 m，则可得

$$1\ \mathrm{s'} = \frac{1}{3}\times10^{-8}\ \mathrm{s}.$$

在新单位制中，引力常量 G 为 1，则有

$$G = 1\ \mathrm{m'^3\cdot(kg')^{-1}\cdot s'^{-2}} = 6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}},$$

把 1 m′=1 m 和 1 s′$=\frac{1}{3}\times10^{-8}$ s 代入上式，即可得

$$1\ \mathrm{kg'} = 1.35\times10^{27}\ \mathrm{kg}.$$

所以，在新单位值中，1 质量单位相当于 1.35×10^{27} kg.

二、矢量

矢量是有大小(数值和单位)和方向并且遵循矢量运算规则的量. 例如位移、速度、力、电场强度、磁场强度等. 有些标量，例如面积微元 dS，由于很小可当成平面，将垂直表面的一个法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 赋予它，使它成为矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_n$ 微元；但有限角度 $\Delta\theta$ 的转动虽然可以按右手螺旋法则赋予它一个方向，但却不能使之成为矢量，因为它不遵守矢量加法的交换律；而无穷小角位移是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}$，相应地可以定义角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$. 矢量按其空间平移性质可分为固定向量、滑移向量和自由向量，也可按镜像对称性分为极矢量和轴矢量. 向量在教科书中已有详细的介绍，我们这儿重点补充向量乘法、向量场和向量导数的一些基本知识，为力学和电磁学等中的矢量表述提供数学基础.

1. 标积和矢积

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘法有两种：一种是标积，得到一个标量 C；另一种是矢积，得到另一个矢