



“十二五”国家重点图书出版规划项目
航空航天精品系列

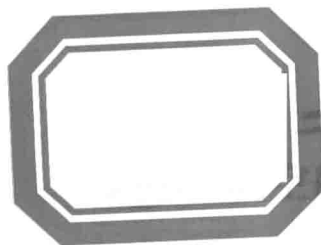
NONLINEAR CONTROL

非线性控制

● 马克茂 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



“五”国家重点图书出版规划项目
航天精品系列

NONLINEAR CONTROL

非线性控制

• 马克茂 编



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书介绍了非线性系统的基本概念和理论。具体内容包括:Lyapunov 稳定性理论,输入输出稳定性理论,无源性分析,微分几何基础,非线性系统的几何描述与坐标变换,非线性系统的精确线性化,基于坐标变换的控制设计,Backstepping 设计方法。

本书为高等院校控制科学与工程学科的研究生教材,也可供自动控制等相关专业的高年级本科生,以及从事相关专业的工程技术人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

非线性控制/马克茂编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.4

ISBN 978-7-5603-4257-3

I. ①非… II. ①马… III. ①非线性控制系统-研究生-教材 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 240665 号

策划编辑 杜 燕 赵文斌
责任编辑 刘 瑶
封面设计 高永利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 11.5 字数 261 千字
版 次 2014 年 4 月第 1 版 2014 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4257-3
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

非线性现象广泛存在于自然界和工程技术领域。对于控制系统来说,实际的控制对象都是非线性的,系统设计过程中广泛采用的线性控制对象都是忽略一定的非线性因素后得到的。就控制方法而言,通过适当地引入非线性因素,可以有效地提高系统的性能,自适应控制、滑模变结构控制等控制方法属于非线性控制方法,即使应用于线性的控制对象,所得的闭环系统也是非线性的。尽管线性系统理论提供了成体系的系统分析和设计方法,但由于很多系统中的非线性因素是无法通过简化转化为线性系统进行研究的,非线性系统往往具有其自身的特点,因此针对非线性系统建立相应的分析和设计方法是十分必要的。计算机技术的普及为非线性系统的分析提供了有力的计算工具,而计算机技术在控制系统中的广泛应用为非线性控制律的实现提供了技术上的保证,因而非线性系统理论和非线性控制方法受到了广泛的关注。

同线性系统理论一样,非线性系统理论也可以分为分析和设计两部分内容。但是同线性系统相比,非线性系统涵盖的范围十分广泛,相应地,非线性系统理论包含的内容更加丰富。同线性系统理论不同,对于非线性系统来说,并不存在统一的分析或设计方法,针对不同的非线性系统,可能需要采用不同的分析设计方法。例如,在考虑系统的基本性质时,对于满足 Lipschitz 条件的非线性系统,可以保证解的存在性和唯一性,但是对于不满足 Lipschitz 条件的非光滑系统,需要对系统的解进行新的定义,而不同的定义方法可能需要不同的数学工具和研究方法;在系统设计方面,对于能够近似线性化的系统,在一定条件下可以对模型进行线性化,然后采用成熟的线性系统控制方法进行系统的设计,而对于能够进行精确线性化的系统,其研究方法则是基于微分几何理论提出的,同传统的近似线性化方法具有本质的区别。同线性系统相比,对非线性系统进行分析 and 设计有时是非常困难的,还存在很多尚未解决的问题,随着人们对非线性系统认识的不断深入,相应的理论和方法还在不断发展,例如上世纪 70 年代以来微分几何、微分代数等新的数学工具的引入,对非线性系统基本理论的研究和非线性控制方法的实际应用起到了极大的推动作用。

由于非线性系统的广泛性和非线性系统分析控制方法日益受到重视,很多高校已将非线性系统理论或非线性控制列为控制及相关学科的研究生课程,本书就是作为研究生一年级非线性控制课程的教材编写的。考虑到非线性系统理论包含的丰富内容和课程学时限制,主要介绍稳定性分析和基于微分几何理论的非线性控制方法。为了便于对后一部分内容的学习,简要介绍了相关的微分几何知识。这些内容在包含 Lyapunov 稳定性理论等较传统的基本内容的同时涵盖了无源性分析、几何方法、Backstepping 方法等较新的内容。对内容进行这样的选取,主要的考虑是使学生能够通过课程的学习,在掌握基本

的分析方法的同时,能够对相关领域新的研究内容有所了解,为进一步的深入研究打下一定的基础。

全书内容共分为九章,完成全部内容的讲授需要 36 学时。本书内容的取舍主要依据作者本人的经验,由于工作和认识上的局限性,书中缺点和错误在所难免,欢迎读者对本书的内容的不当之处予以斧正。

作者
2013 年 10 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 非线性系统的概念及非线性控制的必要性	(1)
1.1.1 线性化方法的局限	(1)
1.1.2 利用非线性特性改善系统的性能	(3)
1.2 非线性系统的特性	(5)
1.2.1 多平衡点	(5)
1.2.2 有限逃逸时间	(6)
1.2.3 极限环	(6)
1.2.4 混沌	(7)
1.3 非线性控制的主要研究内容及本书的研究内容	(9)
1.3.1 非线性控制的主要内容	(10)
1.3.2 本书的研究内容	(11)
第 2 章 Lyapunov 稳定性	(12)
2.1 基本概念	(12)
2.1.1 非线性系统的状态空间描述	(12)
2.1.2 自治与非自治系统	(16)
2.2 自治系统的稳定性	(17)
2.2.1 稳定性的定义	(17)
2.2.2 Lyapunov 直接方法	(21)
2.2.3 Lyapunov 间接方法	(26)
2.2.4 Krasovskii 方法	(30)
2.2.5 变量梯度法	(31)
2.2.6 不变性原理	(33)
2.3 非自治系统的稳定性	(39)
2.3.1 稳定性的定义	(39)
2.3.2 Lyapunov 直接方法	(42)
2.3.3 Lyapunov 间接方法	(47)
2.3.4 Barbalat 引理	(49)
2.4 不稳定性判定定理	(51)
2.5 Lyapunov 函数的存在性	(52)

2.6	输入-状态稳定性	(53)
第3章	输入输出稳定性	(58)
3.1	基本概念	(58)
3.1.1	线性系统的输入输出稳定性	(58)
3.1.2	函数空间与扩展函数空间	(59)
3.2	L 稳定性的定义	(62)
3.3	L 稳定性和状态稳定性	(65)
3.4	L_2 增益	(69)
3.5	小增益定理	(74)
第4章	无源性分析	(77)
4.1	基本概念	(77)
4.2	无源性的判定	(79)
4.3	无源性与稳定性的关系	(82)
4.4	无源性设计及无源性定理	(85)
第5章	微分几何基础	(88)
5.1	拓扑空间	(88)
5.2	微分流形及可微映射	(89)
5.3	向量场与对偶向量场	(94)
5.3.1	切向量、切空间与向量场	(94)
5.3.2	对偶切向量、对偶切空间与对偶向量场	(97)
5.4	Lie 导数与 Lie 括号	(99)
5.4.1	微分同胚的导出映射	(99)
5.4.2	Lie 导数	(100)
5.4.3	Lie 括号	(103)
5.5	分布与对偶分布	(105)
5.5.1	分布	(105)
5.5.2	对偶分布	(107)
5.5.3	Frobenius 定理	(108)
第6章	非线性系统的几何描述与坐标变换	(110)
6.1	非线性系统的几何描述	(110)
6.2	单输入单输出系统的相对阶	(111)
6.3	坐标变换	(114)
6.4	标准型与准标准型	(119)
第7章	精确线性化	(125)
7.1	精确线性化问题的描述	(125)
7.2	完全线性化	(126)

7.3	输入状态线性化	(129)
7.4	输入输出线性化	(134)
7.4.1	基于标准型的输入输出线性化	(134)
7.4.2	零动态特性	(136)
第8章	基于坐标变换的控制设计	(145)
8.1	局部渐近镇定	(145)
8.1.1	问题的描述	(145)
8.1.2	线性近似方法	(146)
8.1.3	基于标准型的镇定	(149)
8.2	渐近输出跟踪	(153)
8.3	干扰解耦	(156)
第9章	Backstepping 设计	(160)
9.1	设计方法	(160)
9.2	在鲁棒控制中的应用	(166)
参考文献	(169)
名词索引	(171)

第 1 章 绪 论

1.1 非线性系统的概念及非线性控制的必要性

线性系统的基本特征是满足叠加原理,即对于一个输入 - 输出算子 L ,考虑任意的两个输入变量 u_1, u_2 和任意的两个常数 k_1, k_2 , 即有

$$L(k_1 u_1 + k_2 u_2) = k_1 L(u_1) + k_2 L(u_2)$$

相对于线性系统,任何不满足叠加原理的系统均可称为非线性系统。除了不满足叠加原理这个性质之外,非线性系统并没有统一的性质。正如 M. Vidyasagar 在文献[1]中指出:The adjective “nonlinear” can be interpreted in one of two ways, namely, “not linear” or “not necessarily linear”,非线性系统理论研究的对象是非线性系统,而将线性系统看作非线性系统的特例,针对一般非线性系统得到的一般性结论,一般来说,对于线性系统也是适用的。

显然,非线性系统具有非常广泛的含义。对于一个系统来说,只要系统中至少存在一个非线性环节,则该系统就是非线性系统。对于实际系统来说,很多因素可以导致系统的非线性特性。由于非线性本身包含的内容十分丰富,其来源也相当广泛,如运动体的速度等物理量具有上界而导致的饱和和非线性,机械系统的间隙,非线性摩擦,继电器特性等情形。对于控制系统来说,常见的非线性系统包括:线性对象与非线性环节组成的非线性系统(如带有摩擦特性非线性环节的线性系统),非线性被控对象与控制器组成的非线性闭环系统,线性被控对象与非线性控制器组成的非线性闭环系统(如线性系统的自适应控制和变结构控制)等情形。此外,随着数字控制技术的广泛应用,在数字控制系统中普遍存在着由于 A/D, D/A 转换而引入的量化非线性特性和饱和非线性特性。

线性系统由于满足叠加原理这一特性,许多成熟的数学工具可以应用于对线性系统的研究,目前已经建立起了相对完整的分析和设计体系,如同步控制(频域校正)、过程控制(PID 控制)、飞行器控制(最优控制)等。但是,对于非线性系统进行深入的研究,仍是十分必要的。因为非线性系统具有广泛性,更重要的是,很多现象利用线性模型是无法涵盖的,致使必须建立非线性的分析和设计体系。

1.1.1 线性化方法的局限

从严格意义上来说,一切实际的动态系统都是非线性的。线性系统是非线性系统的一种近似的、简化的描述形式,在近似处理的过程中,一般需对系统进行一定的处理,如限定系统的运行范围、省略非线性特性等。而针对非线性系统进行研究,可以更加深入地揭示线性系统理论无法涵盖的非线性现象,并且通过非线性方法可以得到线性控制器无法

实现的控制品质,如提高系统的鲁棒性、响应速度等。将非线性系统简化为线性系统,即对非线性系统进行线性近似是有条件的,一般要求系统是在其工作点附近小范围运行的。

例 1.1 如图 1.1 所示,考虑一个带有摩擦阻尼的单摆系统,动力学方程描述为

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta} \quad (1.1)$$

其中, m 为单摆的质量; l 为摆长(假设为无质量的刚性连接); θ 为单摆离开垂直线(平衡位置)的角度; k 为摩擦阻尼系数; g 为重力加速度。

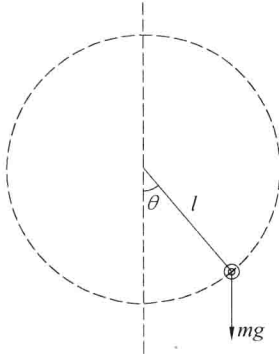


图 1.1 单摆

取 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 则可得非线性的状态空间模型,即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

对上述系统可以利用线性化方法进行分析。当系统在平衡位置附近小范围运行时,即 θ 和 $\dot{\theta}$ 较小时, $\sin\theta$ 近似等于 θ , 因此系统(1.1)可近似地写为

$$ml\ddot{\theta} = -mg\theta - kl\dot{\theta} \quad (1.3)$$

仍取 $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}$, 则可得状态空间模型,即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

线性化分析方法的主要思想是在平衡点附近利用线性模型与非线性模型之间误差较小的特点,利用线性化模型分析非线性系统的性质,如进行稳定性分析,在这里就是对线性化模型(1.3)、(1.4)进行分析,以便得到原非线性系统(1.2)的性质。容易看出,线性模型(1.4)的平衡点(0,0)是稳定的,而非线性模型(1.1)在(0,0)也有一个平衡点,是局部稳定的。因此,利用线性化方法可以对系统的平衡点(0,0)进行局部稳定性分析。但当系统在大范围运行时,随着线性模型与非线性模型之间的误差的加大,可能会导致线性模型失效,即由于线性化模型(1.4)的状态与原非线性系统(1.2)的状态之间的误差随运行范围的增大而增大。另外,线性模型(1.4)只有一个平衡点,而非线性系统的模型(1.2)在 $(\pi, 0)$ 还有一个不稳定的平衡点。

用线性系统来近似描述非线性系统,实际上是假设所要描述的非线性系统是可以进

行线性化的,即在工作点附近要求系统中的非线性项是可导的。对于实际系统中许多非线性环节来说,描述其非线性特性的函数是不可导的,如饱和特性(图 1.2)和死区特性(图 1.3)。此外,还存在不连续的非线性特性,如继电特性(图 1.4)和量化特性(图 1.5)。在一些复杂情况下,有些非线性特性甚至是没有办法用函数关系来描述的,如滞环特性(图 1.6)。这些非线性特性称为本质非线性。

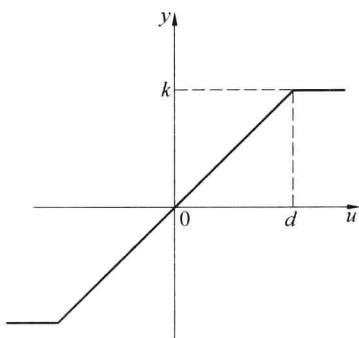


图 1.2 饱和特性

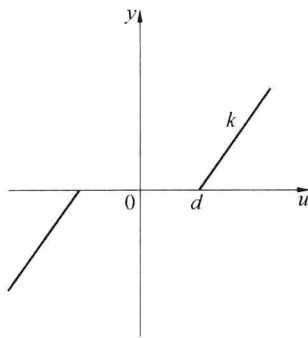


图 1.3 死区特性

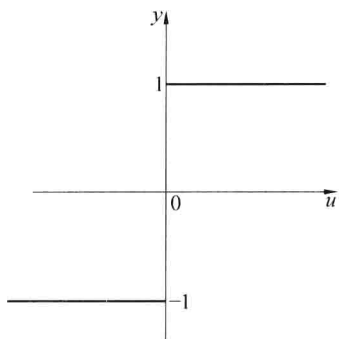


图 1.4 继电特性

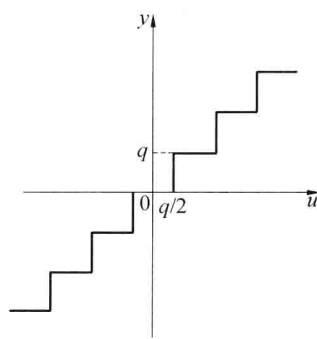


图 1.5 量化特性

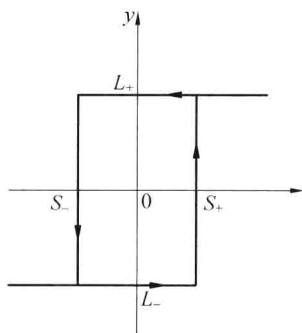


图 1.6 滞环特性

1.1.2 利用非线性特性改善系统的性能

线性系统理论目前已形成了完整、成熟的体系,如频域法等分析设计方法具有明确的物理意义,因而获得了广泛的应用。线性控制器的一个突出优点是实现简单,但是随着计

计算机技术的发展和数字控制技术的广泛应用,利用数字控制器实现非线性控制规律,与实现线性控制规律没有本质差别。

在控制系统设计中,可以通过人为引入非线性环节来改善系统的特性,如常见的时间最优控制、智能控制、自适应控制、变结构控制等。考虑线性系统的时间最优控制,对控制加以约束,则形成 Bang-Bang 控制,控制形式具有非线性的形式。智能控制中的模糊控制、神经网络等方法本质上都是非线性的。无论是针对线性对象还是非线性对象,利用自适应控制律所构成的闭环系统都是非线性的。滑模控制能够在一定条件下实现对干扰和扰动等不确定性的完全适应性,具有很好的鲁棒性。滑模控制也是一种典型的非线性控制,实际上,只有非线性的(实际上是非光滑的)控制律,才能够保证系统状态在有限时间内到达切换面且保持在其上,而线性控制律只能实现对切换面的渐近趋近。

例 1.2 线性系统的滑模变结构控制。考虑线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

通常在进行滑模控制律设计时,首先根据设计要求,确定滑模控制的切换函数,即

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{Sx}, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

确定的原则是在滑动面上的滑动模态稳定,且具有好的动态特性。然后利用切换函数构造变结构控制律,即

$$u_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}), & s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}), & s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

以保证到达条件得到满足,即保证系统的状态在有限时间内到达切换面且保持在其上,进入滑动模态运动。一般来说, $u_i^+(\mathbf{x}) \neq u_i^-(\mathbf{x})$, 控制律 $u_i(\mathbf{x})$ 依据切换函数的数值在 $u_i^+(\mathbf{x})$ 和 $u_i^-(\mathbf{x})$ 之间切换,表现为非线性。

例 1.3 线性系统自适应控制。考虑如下线性系统

$$\dot{y} = -a_p y + b_p u$$

其中, a_p, b_p 为定常参数,控制的目标是使系统的输出 y 跟踪参考信号 y_m , 参考信号由如下参考模型给出

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + b_m r(t), a_m > 0$$

如果 a_p, b_p 已知,则可以设计控制律

$$u = a_r r + a_y y, a_r = \frac{b_m}{b_p}, a_y = \frac{a_p - a_m}{b_p}$$

所得闭环系统为

$$\dot{y} = -a_m y + b_m r$$

同参考模型具有相同的形式,可以实现输出信号对参考信号的渐近跟踪。当 a_p, b_p 未知但 b_p 的符号已知时,可以设计自适应控制律。取跟踪误差 $e = y - y_m$, 自适应控制律为

$$\begin{aligned} u &= a_r(t)r + a_y(t)y \\ \dot{a}_r(t) &= -\operatorname{sgn}(b_p)\gamma e r \\ \dot{a}_y(t) &= -\operatorname{sgn}(b_p)\gamma e y, \gamma > 0 \end{aligned}$$

则可以实现 $e \rightarrow 0$ 的控制目标,这一点可以通过 Lyapunov 稳定性理论和 Barbalat 引理进行分析。

例 1.4 智能控制。模糊控制、神经网络控制等智能控制方法可以应用于具有不确定性、难于精确建模的系统,这些控制方法本质上都是非线性的。

模糊控制中推广的 Takagi-Sugeno 模型的模糊规则为

$$L^i: \text{if } \mathbf{x}(t) \text{ is } A^i \text{ and } u(t) \text{ is } B^i, \text{ then } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u, i = 1, 2, \dots, n$$

其中, $A^i(\mathbf{x}), B^i(\mathbf{x})$ 为模糊隶属度函数(一般来说是非线性的)。上述模糊规则的输出为

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \mu_i(\mathbf{x}) (\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i u)$$

其中, $\sum_{i=1}^n \mu_i(\mathbf{x}) = 1, \mu_i(\mathbf{x})$ 是与模糊隶属度函数 $A^i(\mathbf{x}), B^i(\mathbf{x})$ 有关的非线性函数,显然上述模糊系统是非线性的。

人工神经网络可以用来逼近非线性的输入输出映射关系,一般采用多层结构。在多层神经网络的输出层上,输出节点使用非线性函数,如广泛使用的 Sigmoid 类函数,即

$$g(u) = \frac{e^{\lambda u} - e^{-\lambda u}}{e^{\lambda u} + e^{-\lambda u}} = \tanh \lambda u, \lambda > 0$$

针对线性系统,在控制器设计中,有目的地引入非线性因素,可以有效改善系统的控制性能。而线性对象与非线性控制器的结合,构成了非线性闭环系统,如将滑模变结构控制、自适应控制等非线性控制方法应用于线性系统。

1.2 非线性系统的特性

线性系统由于满足叠加原理,在考虑线性系统的解时,如果将初始状态 x_0 按比例放大,解的类型不变,而且与初值 x_0 成比例(考虑非受迫系统的情况),则对于线性系统来说,平衡点的局部性质实际上在整个状态空间上都是成立的。非线性系统不满足叠加性原理,系统的性质是非常复杂的。研究系统平衡点的性质时,很多时候都是讨论局部性质的。一般来说,非线性系统的局部性质同全局性质有较大的差别。

1.2.1 多平衡点

孤立平衡点,是指如果 \mathbf{x}_e 为系统的平衡点,则存在 \mathbf{x}_e 的一个邻域,在此邻域内不存在其他平衡点。考虑如下线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

当 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ 时,系统存在唯一平衡点 $\mathbf{x} = 0$; 当 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 系统存在多个平衡点。当线性系统具有多个平衡点时,这些平衡点都不是孤立的,为状态空间中的直线、平面或低维流形。当系统受到扰动时,在一般情况下,多平衡点现象都会消失。而对于一个非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

平衡点是如下方程的解

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

在求解平衡点时必须求解 n 个非线性代数方程的解,可能有 0 到无穷个解。

例 1.5 单摆的平衡点。从数学上来说,单摆系统(1.2)存在无穷多个平衡点,对应于实际物理系统的两个平衡点,分别是图 1.1 中速度为零时的圆轨迹上的最高点和最低点,因此对于单摆的非线性模型,系统具有两个孤立的平衡点。而考虑线性化模型(1.4)时,系统具有唯一的平衡点,为图 1.1 中速度为零时的圆轨迹上的最低点。

例 1.6 考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = -x + x^2, x \in \mathbb{R}$$

令 $-x + x^2 = 0$, 则方程存在两个相异的根: $x_1 = 0, x_2 = 0$ 。因此系统存在两个孤立的平衡点。

1.2.2 有限逃逸时间

在研究系统的性质时一般假定系统解存在,因此对于给定的状态初值,该初值决定了系统的一个解,记为 $\mathbf{x}(t)$ 。粗略地说,如果系统的解是发散的,则系统是不稳定的。对于不稳定的线性系统来说,系统状态的发散趋势为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$$

上述条件隐含的是:尽管系统状态是发散的,但对于任意给定的有限时间 t , $\|\mathbf{x}(t)\|$ 是有限的。而对于不稳定的非线性系统来说,系统的状态却有可能在有限的时间内发散,即存在有限的 t_1 ,使得

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$$

例 1.7 考虑如下一维非线性系统

$$\dot{x} = 1 + x^2, x(0) = 0$$

这个系统的解为

$$x(t) = \tan t$$

系统的解在 $[0, \pi/2)$ 内有定义。当 $t \rightarrow \pi/2$ 时,有 $x(t) \rightarrow \infty$, 即系统的状态在有限时间内发散。

1.2.3 极限环

非线性系统中可能存在自持振荡,系统的解为周期解,在状态空间中系统的解的轨迹形成一个孤立的封闭相轨线,将其称为极限环。如果在极限环的邻域中所有的相轨线都随时间而渐近地趋近于极限环,则极限环是稳定的。

例 1.8 考虑范德波尔(Van der Pol)方程

$$m\ddot{x} + 2c(x^2 - 1)\dot{x} + kx = 0, m > 0, c > 0, k > 0 \quad (1.5)$$

该方程可以看作一个带有非线性阻尼的质量-弹簧系统。该系统在状态空间中存在一个稳定的极限环,相平面图如图 1.7 所示,其中系统的初值为 $x(0) = 5, \dot{x}(0) = 0$ 。系统形成极限环是由于非线性阻尼项的作用。对于系统中的非线性阻尼项可以进行定性的分析:当 x 较大时, $2c(x^2 - 1) > 0$, 系统中的阻尼导致能量消耗,系统状态 x, \dot{x} 的范数减

小。当 x 较小时, $2c(x^2 - 1) < 0$, 负的阻尼导致系统产生能量, 系统的状态 x, \dot{x} 的范数增大。由于 $(x = 1, \dot{x} = 0)$ 和 $(x = -1, \dot{x} = 0)$ 不是系统的平衡点, 因此上述过程会不断重复, 系统状态出现周期振荡, 形成极限环。

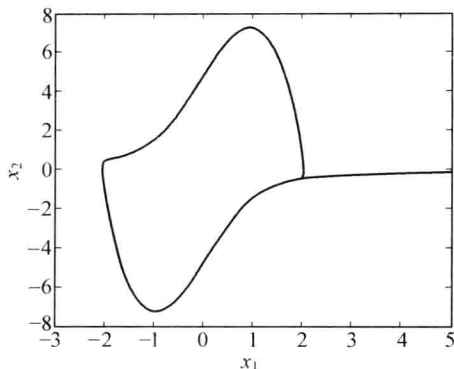


图 1.7 极限环

极限环只能在非线性系统中产生, 是非线性系统的特征。对于无输入的二阶线性系统, 当系统的特征值位于虚轴上时, 系统的状态也表现为等幅振荡, 如考虑线性的质量 - 弹簧系统

$$m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = 0, m > 0, k > 0$$

当 $c = 0$ 时就会出现这种情形。但是线性系统中的振荡与非线性系统的极限环本质上是完全不同的。线性系统中的振荡是严格的正弦振荡, 频率由系统的特征值所决定, 而幅值由系统的初值所决定, 在状态空间中系统的初值就在系统的振荡状态所形成的封闭轨线上; 而非线性系统中稳定的极限环不一定是正弦振荡, 而且极限环与系统状态的初值无关, 当系统的初始状态不在极限环上时, 系统的轨线是渐近地趋向于极限环的。

对于稳定的线性系统, 当输入正弦振荡信号、系统的状态在稳态时, 是正弦振荡信号, 此时振荡信号的幅值与频率是由系统本身的参数和输入信号决定的。

1.2.4 混沌

混沌系统的主要特征是系统的运动轨迹对于系统状态的初值是非常敏感的。

考虑针对不同的系统状态初值对应的系统状态轨迹, 如果系统状态的初值存在微小的差别, 对于正常系统来说, 系统的状态轨迹之间的差别也是微小的, 即系统的解对于状态初值具有连续依赖性。实际上, 这也是我们利用数字计算机对实际物理过程进行数字仿真的理论依据。对于混沌系统来说, 微小的初值变化, 会导致系统状态轨迹的明显差别, 经过一段时间之后, 系统状态的轨迹会完全不同。因此, 对于混沌系统来说, 系统的状态轨迹是不可预测的。混沌现象只能出现在非线性系统中, 而不会出现在线性系统中。

例 1.9 考虑如下的 Lorenz 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= x(R - z) - y \\ \dot{z} &= -Bz + xy \end{aligned}$$

其中, σ, R, B 为定常参数。这个方程是美国科学家 Edward Lorenz 在研究天气预报时针对气象现象的研究建立的, 并且发现了其中的混沌现象。如果取系统的如下参数

$$\sigma = 10, B = \frac{8}{3}, R = 28$$

则系统表现出混沌特性: 系统的轨迹对于初值的敏感性。

下面通过数值仿真对此进行说明。第一次仿真中系统初值取为

$$x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$$

第二次仿真中系统初值取为

$$x(0) = 1.00001, y(0) = 2.00001, z(0) = 3.00001$$

即两次仿真中的初值相差为万分之一。两次仿真结果如图 1.8 所示, 其中实线与虚线分别为第一组与第二组初值所对应的仿真结果。

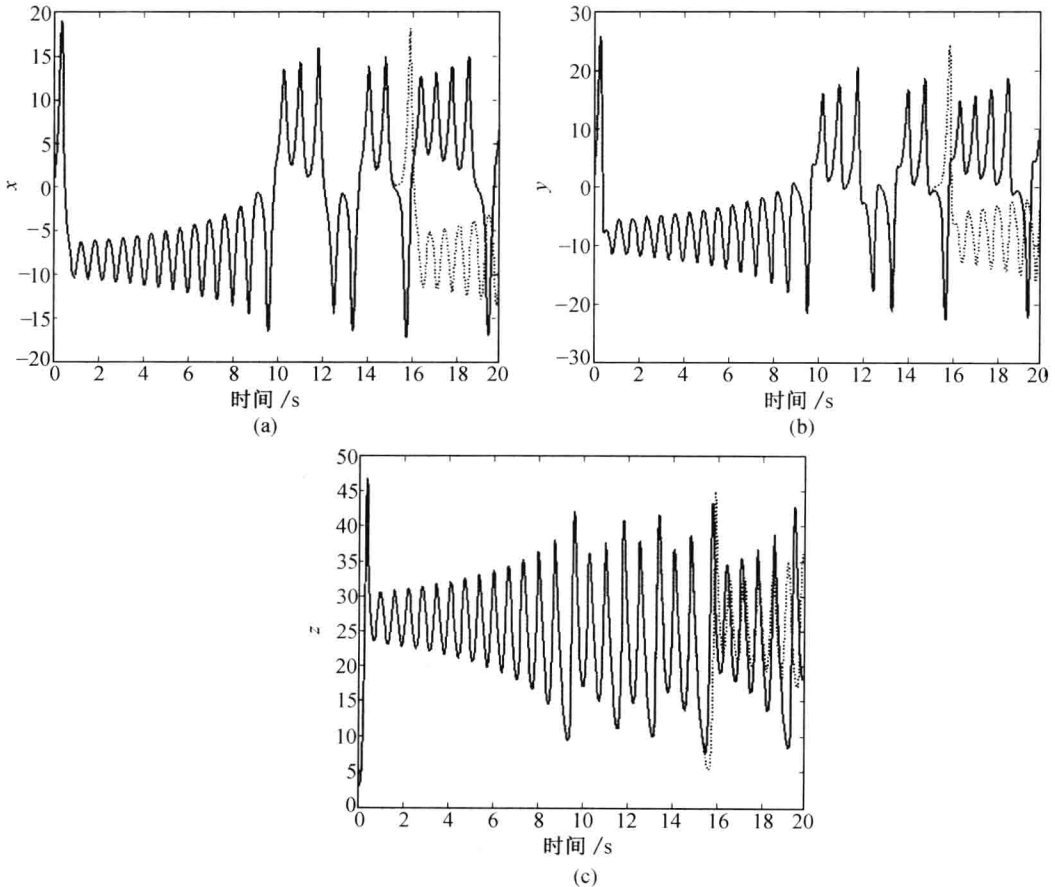


图 1.8 Lorenz 系统仿真结果(1)

从仿真结果可以看出, 系统初值的微小差别导致系统状态的明显差异, 说明系统对初值的敏感性。因此, 对于混沌系统无法进行精确的长期预测。

上述轨线为非周期震荡(有界、非周期), 实际上体现了一种混沌特性, 即混沌吸引子。在相空间中系统的状态轨线可以通过“Matlab 中的命令 Lorenz”来查看。

利用计算机仿真研究混沌现象,实际上得到的轨迹并非系统的真实轨迹,能起到定性分析的作用和一定的定量分析的作用。这是由于数字计算机进行数值积分时在每一步计算中都引入一定的误差,如离散计算方法与连续系统之间的误差,计算机位数限制产生的舍入误差等。这一点可以通过利用不同精度进行数值仿真来说明。仿真中系统初值均为

$$x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$$

在 Matlab 中分别使用单精度和双精度进行仿真(四阶 Runge-Kutta,步长 0.001),结果如图 1.9 所示,其中实线与虚线分别对应于双精度数与单精度数的仿真结果。

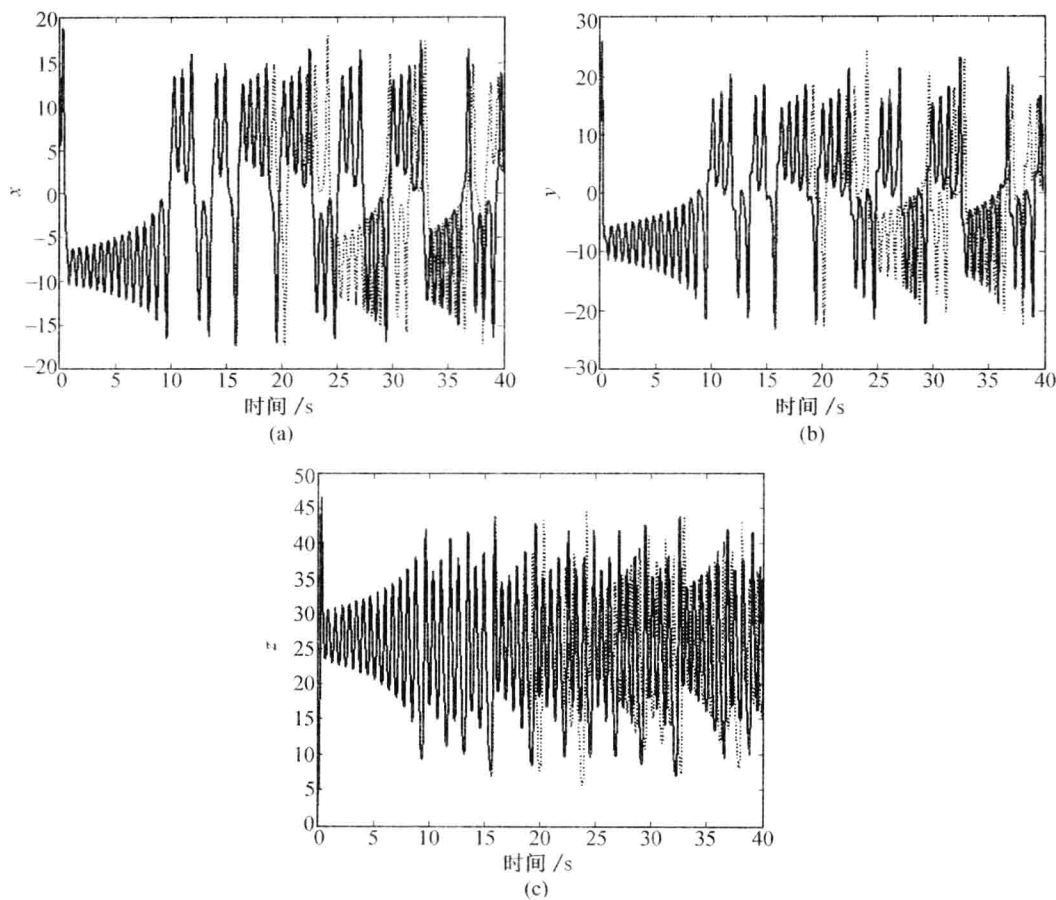


图 1.9 Lorenz 系统仿真结果(2)

对于正常系统,通过算法的选择可以将仿真计算的误差控制在一定的范围内(可以利用数值分析方法在理论上分析出误差的范围)。而对于混沌系统,仿真计算所产生的误差会导致计算轨迹与真实轨迹之间是完全不同的。

1.3 非线性控制的主要研究内容及本书的研究内容

与线性系统相比,非线性系统的特性是极其复杂的,其研究内容也是非常丰富的。对