

误差理论与 实验数据处理

黄天明 / 编著

第一章 误差理论基础

第二章 偶然误差

第三章 系统误差

第四章 常用物理量的测量

第五章 实验数据处理的基本方法

第六章 普通物理实验数据处理举例

贵州人民出版社

误差理论与 实验数据处理

第三版 丁 建

重庆大学出版社

误差理论与实验数据处理

黄天明 编著

贵州人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与实验数据处理/黄天明编著. —贵阳:贵州人民出版社, 2011. 10

ISBN 978 - 7 - 221 - 09800 - 9

I. ①误… II. ①黄… III. ①误差理论 - 高等师范院校 - 教材 IV. ①O241.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 213976 号

书 名 误差理论与实验数据处理
编 著 黄天明

责任编辑 陈继光 唐 博
封面设计 唐锡璋
出版发行 贵州人民出版社
印 刷 贵阳德堡快速印务有限公司
规 格 710 × 1000 毫米 1/16
字 数 230 千字
印 张 15.375
版 次 2011 年 10 月第 1 版
印 次 2011 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 221 - 09800 - 9
定 价 35.00 元



前 言

误差理论,是研究实验中实验测量、实验数据、实验结果误差产生的原因,判断实验结果优劣和如何减少或消除实验误差,提高实验结果可靠程度(可信度)的一门科学。因此,误差理论不但从理论上对实验误差产生的原因和来源进行了讨论分析,而且对如何减少、克服或排除实验误差,以及提高实验结果的可信度,提高实验者的实验技能和实验水平都具有十分重要的作用。误差理论是高等学校理工科,凡涉及有实验的相关专业都需要学习的一门课程。误差理论知识在物理学、化学、生物学、工程技术和其他诸多领域都有着广泛的应用。主要原因是,在上述研究领域中在做科学实验方面,需对实验过程、实验结果进行判断、评估和实验数据进行处理,这都涉及到误差理论方面的知识。

误差理论是人类在认识自然界和社会生产活动、科学实验中发展起来的一门专门的科学。众所周知,物理学等是以实验为基础的学科,是通过大量的科学实验基础上发展起来的。在大量的科学探究、科学实验中,面对具体的实验手段、实验方法、实验过程及实验操作,必须进行科学的分析、判断、设计。因此,面对每一个科学实验,我们不但要从实验理论、实验设计、实验仪器开发和实验仪器选取等方面加以综合考虑,而且还要对实验测量所得数据进行分析、判断、处理,以找到科学的实验方法和探究手段,在实验中尽量减少和克服误差产生,从而得到可靠的实验结果。这样,在实验中,分析误差产生的种种因素和条件,来指导我们在实验时减少、克服或消除实验中误差的产生,这是误差理论研究的内容。同时,对实验测量的大量实验数据,必须进行科学的数据处理,方能得到最好和最可靠的实验结果,实验数据处理也是误差理论研究的重要内容。

误差理论,对于高等师范院校理科专业的学生而言,是非常重要的——门基础课。因高等师范院校理科专业的学生,在大学学习中所涉及的实



验课非常多,每做一个实验,都涉及实验误差分析与实验数据处理问题。特别随着新课程改革的实施,为适应新课程改革,大学实验教学也从大量的验证性实验向探究性实验、设计性实验和综合性实验发展,这对学生掌握科学的实验方法、实验设计、实验手段的更新提出了新的要求。同时,对学生误差理论知识的掌握和实验数据处理能力的要求提出了更高的目标。因此,误差理论的学习和掌握,对学生探究能力、探索兴趣和创新意识的培养,促进学生实验操作技术、实验能力和实验创新能力的发展都有十分重要的意义。

误差理论与实验数据处理,主要介绍误差理论的基础知识,重点结合物理学专业里普通物理实验所需误差理论知识来展开,也可用于大学理科相关专业的基础实验中,涉及到的实验数据处理时的误差理论知识。

误差理论与实验数据处理第一章为误差理论基础知识,主要有实验测量知识,误差的分类,偶然误差的表示,测量结果的表示、间接测量偶然误差的传递与合成,有效数字的运算等。第二章偶然误差,专门讨论偶然误差,主要内容有:偶然误差与正态分布、标准误差、算术平均偏差、或然误差、平均或然误差、极限误差,偶然误差的置信区间和置信概率、测量结果偶然误差的表示等。第三章系统误差,专门介绍系统误差的特征、系统误差的发现方法、系统误差的消除或减小方法等。第四章为基本物理量的测量,有长度测量、时间的测量、温度的测量、电压的测量、电流的测量、电阻的测量以及力、压强的测量等。第五章为实验数据处理的基本方法,主要介绍了算法、列表法、作图法、最小二乘法、逐差法等实验数据常用处理方法。第六章物理实验数据处理举例与误差分析,主要内容有:力学实验、热学实验、光学实验、电磁学实验数据处理举例与误差分析。

在编著此书的过程中,得到物电学院不少老师的帮助和指导,在此表示感谢!限于水平和时间,本书中存在着不少不妥之处,深望老师、同学提出宝贵意见,以便修订和完善。

作者

2011年7月于贵州师范学院



目 录

第一章 误差理论基础	(001)
第一节 测量	(002)
第二节 误差及其分类	(007)
第三节 直接测量结果偶然误差的计算及表示	(015)
第四节 间接测量偶然误差的计算——误差的传递与合成	(024)
第五节 有效数字及其运算	(034)
第二章 偶然误差	(050)
第一节 偶然误差与正态分布	(050)
第二节 偶然误差的置信区间和置信概率	(059)
第三节 测量结果偶然误差的表示	(066)
第三章 系统误差	(070)
第一节 系统误差的特征和发现	(070)
第二节 系统误差的消除或减小方法	(080)
第三节 误差的综合表示	(084)



第四章 常用物理量的测量	(085)
第一节 长度的测量	(085)
第二节 质量的测量	(091)
第三节 密度的测量	(093)
第四节 时间的测量	(096)
第五节 力和压强的测量	(098)
第六节 温度的测量	(100)
第七节 电流、电压、电阻的测量	(102)
第八节 万用表测多种电学量	(110)
第五章 实验数据处理的基本方法	(114)
第一节 算法	(114)
第二节 列表法	(119)
第三节 作图法处理数据	(122)
第四节 最小二乘法	(134)
第五节 逐差法	(142)
第六章 普通物理实验数据处理举例	(153)
第一节 力学实验数据处理举例	(153)
第二节 热学实验数据处理举例	(174)
第三节 光学实验数据处理举例	(188)
第四节 电磁学实验数据处理举例	(212)



第一章 误差理论知识

误差理论,是研究实验测量数据、实验结果误差产生的原因,判断实验结果优劣和如何减少或消除实验误差,提高实验结果可靠程度(可信度)的一门科学。因此,误差理论不但从理论上对实验误差产生的原因和来源进行了讨论分析,而且对如何减少、克服或排除实验误差,以及提高实验结果的可信度,提高实验者的实验技能和实验水平都具有十分重要的作用。同时,误差理论的学习,对于实验探究意识和创新意识的培养,促进科学探究能力、创新能力的发展都有十分重要的意义。

各种科学实验过程的可重复性,以及各种科学实验结论的可计量性,在实验中为应用数学统计方法提供了可能,从而形成了实验的误差理论。误差理论的确立又使各种科学实验结论具备了客观性,正是实验结论的这种客观性,最终使相关的理论成为一门科学。

本书以物理实验为例来阐述误差理论。物理实验过程是可重复的,其实验结论的可计量特性,使数学方法应用在物理实验中,因而形成物理实验误差理论。物理实验误差理论的确立,使物理实验结论具备客观性,而这一性质,最终使物理成为一门科学。物理实验误差理论的建立,基于两个物理事实。第一,物理实验中物理量的测量值总是一个近似值。这一事实证明,任何两个测量值必然存在差值;第二,任何一个待测物理量总有一个客观值,客观值通常称为真值。这一事实证明,误差就是近似的测量值与真值之差。

误差理论是人类在认识自然界和社会生产活动、科学实验中发展起来的一门专门的科学,要深入全面地讨论研究它,需要有丰富的实践和较深的数学知识,在本章中,着重介绍和讨论有关误差理论的基础知识。

第一节 测量

自然界是由物质构成的,从基本粒子、原子、分子到日月星辰,从电磁场到万有引力场,从蛋白质、细胞到人,都是物质构成的,自然界是物质的世界。人类怎样认识物质世界?人类认识物质世界的基本手段是什么呢?人类认识物质世界的基本手段之一,就是对物质世界的各种物质的相关物理量进行测量。测量是人类生存过程中发展起来的一种认识自然界和物质世界的手段。通过测量,人们对客观事物获得数量概念,然后对测量的数据进行分析、归纳,总结出一般规律,从而建立定理定律。

一、测量

1. 测量

测量就是将待测量与标准量进行比较的过程。实际上,测量是借助由标准量制定的某一计量单位的仪器,把物体的某一待测量的大小比较表示出来的过程。所以测量是一个比较的过程,作为比较,首先要有一个标准,这就是标准量。

2. 标准量

测量过程中,必须有一个作为比较单位的标准量,国际上规定作为测量标准的物体,称为标准量。在国际单位制中(即 SI 制)中,规定了七个标准量及单位,见表 1-1。

表 1-1 SI 制中规定的七个标准量及单位名称

名称	长度	质量	时间	热力学温度	电 流	光的强度	物质的量
单位	米	千克	秒	开尔文(开)	安培	坎德拉	摩尔
符号	m	kg	s	K	A	cd	mol

七个标准量及单位,简称基本单位,每一基本单位都有自己的定义:

长度标准量,最早是国际米原器,它是一根铂铱合金棒,现保存于法国巴黎的国际度量衡局。米原器的横截面为 X 形,在它的凹沟里靠近两端的地



方各刻有一条横线,与棒长垂直,当温度为0℃时,规定两端横线之间的距离为1米,这就是长度单位米最早的规定。但由于国际米原器长度会受到外界的影响而随时间发生微小变化,1960年第11界国际计量大会决定,米等于氪-86原子的电子在于2P10和5ds能级之间,跃迁时所对应辐射波(橙红色)在真空中的650 763. 73个波长的长度,即以氪-86原子发出的橙红色光的波长作为长度单位米的标准。米的第三次定义,是在1983年第17届国际计量大会作出的米的新定义:“米是光在真空中在1/299 792 458秒时间间隔内运行的路程的长度。”

质量的标准物是保存在国际度量衡局中的铂铱合金国际千克原器,1千克质量等于该国际千克原器的质量。

时间单位是秒,1秒为铯-133原子基态的两个超精细能级之间跃迁所对应的辐射周期的9 192 631 770倍的持续时间。

电流单位是安培,安培为恒定电流强度,若保持在处于真空中相距1米的两根无限长而圆截面积积极小的平直导线内,则此两根导线之间每米长度上产生的力等于 2×10^{-7} 牛顿。

热力学温度单位是开尔文,简称开(K),1开等于纯水的三相点热力学温度的1/273. 16。

物质的量的单位是摩尔,摩尔是一物质系统中所包含的结构粒子数为0. 012千克碳-12的原子数目相等的量。

光的发光强度单位是坎德拉(cd),坎德拉是一个光源在给定方向上的光强度,该光源发出频率为 540×10^{12} HZ的单色辐射,且在此方向上的辐射强度为1/683瓦特球面度。

在国际单位制(SI)中,除七个基本单位外,还有两个辅助单位及若干导出单位,见表1-2、表1-3。

表 1 - 2 国际单位制(SI) 的两个辅助单位

量的名称	基本单位	符 号	作 用
平面角	弧 度	Rad	量度平面角
立体角	球面度	Sr	量度立体角



表 1-3 国际单位制(SI) 常见的导出单位

量的名称	基本单位	符 号	量的名称	基本单位	符 号
面 积	平方米	m^2	电 容	法拉	F
体 积	立方米	m^3	电 感	亨利	H
密 度	千克/立方米	kg/m^3	电 量	库伦	C
速 度	米/秒	m/s	电压、电位差、电动势	伏特	V
加速度	米/秒平方	m/s^2	电场强度	伏特/米	V/m
角速度	弧度/秒	rad/s	频率	赫兹(1/秒)	Hz
角加速度	弧度/秒平方	rad/s^2	磁场强度	安培/米	A/m
力	牛顿	N	磁感应强度	特斯拉	T
压 强	帕斯卡	Pa	磁通量	韦伯	Wb
功、能、热量	焦耳	J	光通量	流明	lm
功 率	瓦特	W	光量度	坎德拉/立方米	Cd/m^2
电 阻	欧姆	Ω	光照度	勒克斯	lx

3. 数量

数量是表示测量结果的大小及单位的物理量。数量涉及数值和单位。待测量是标准量倍数的多少称为数值,待测量用数值和单位表示出来就是数量。

如测量得一物体长度为 1.269 米,若用 L 表示: $L = 1.269(\text{m})$,测量一物体的质量为 86 千克,若用 M 表示: $M = 86(\text{kg})$ 。

对待测量进行测量时,所得结果与单位的选择有关,所选择的单位越小,所得结果的数值就越大。因此,要正确表示测量结果,必须在测量数值后加上单位。单位一般用基本单位,但也可用基本单位的十进制倍数的分单位。如长度基本单位是米(m),但也还常用千米(km)、厘米(cm)、毫米(mm)等分单位, $1\text{km} = 10^3\text{m}$, $1\text{cm} = 10^{-2}\text{m}$, $1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$ 。



4. 测量仪器(工具)

人们认识自然界的各种物质的特性时,其首要手段就是对物质的各种特性进行观察测量,获得第一手资料。而测量是待测量与标准量进行比较,但不可能每一次都将待测量与国际标准物进行直接比较,这是测量工作不允许的。那么,拿什么和待测量进行比较呢?这就需要借助测量仪器(工具)。测量仪器,就是预先严格按标准量定制好的测量物体。测量仪器(工具)的制作,往往是借助国际单位制中规定的标准量来严格制作的。如质量的千克单位,先借助国际千克原器来精确复制出其复制品,再以千克原器的精确复制品为依据,制作出质量测量工具,如天平等。又如长度测量工具米尺,游标卡尺等,是按标准量米的单位来定制刻度的。

二、测量的分类

在实验中,测量一般可分为两大类,即直接测量和间接测量。

1. 直接测量

直接测量,就是直接用测量仪器去进行测量,并且能从测量仪器上直接得到测量的结果数值。例如用米尺测量长度,用天平测量物体质量,用温度计测量温度,用秒表测量时间,用电压表(伏特表)测量电压等等,皆是直接测量。直接测量根据测量次数的多少,又分为单次测量和多次测量。

(1) 单次测量

所谓单次测量,就是只进行一次的测量。在一些实验中,由于受实验条件的限制,不可能在同一条件下进行多次重复测量,这时只能单次测量。如混合法测固体比热实验中,热平衡时的温度转瞬即逝,无法进行多次测量。因此,对待测量的精度要求不高时,没有必要进行重复测量,对上述两种情况,就采用单次测量。

(2) 多次测量

所谓多次测量,就是对待测量进行重复测量。多次测量在一些实验中应用较为广泛,多次测量的方法可减少测量误差,提高测量结果的可靠性。如用米尺测一物体的长度,往往用米尺进行多次测量,然后再算出其平均长度。又如用天平称物体质量,往往也用多次测量的方法。

在多次测量中,根据是否使用同一测量仪器,或精度相同的仪器来多次测量同一待测量,多次测量又分为等精度测量和非等精度测量。实验中对同

一待测量,用同一测量仪器或等精度相同的测量仪器,在同一条件下进行的多次测量,称等精度测量。实验中对同一待测量,用不同的测量仪器(其精度也不相同),在同一条件下进行的多次测量,或同一测量仪器在不同条件下进行的多次测量,称为非等精度测量。

在生产、科研、教学、实验中进行的各种测量,大多数都是等精度测量,而只有在测量结果要求不高或受测量仪器限制情况下,才使用非等精度测量。

2. 间接测量

在测量中,待测量的数值能由测量仪器直接测量出来,而必须先用直接测量的方法测量出与待测量有关的一些物理量,然后借助一定的理论计算公式,将待测量推算出来,这类测量称为间接测量。

例如:测一运动物体的速度,若用米尺、秒表为测量仪器,则米尺只能测量出运动物体的位移 Δs ,秒表只能测出物体运动的时间 Δt ,这两种测量仪器都不能直接测量物体运动速度(率) v ,还必须用速度(率)公式: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ 推算出物体运动的速度(率)来。

如测量固体密度,若用物理天平和米尺或游标卡尺,是不能直接测量出物体的密度 ρ 的,物理天平只能测量出物体的质量 m ,米尺只能测量物体(规则物体)的外形尺寸,其体积 V 就需用体积公式计算出来,最后物体的密度需用密度 ρ 公式

$$\rho = \frac{m}{V} \text{ 推算出来。}$$

上述速度、密度的测量就不属于直接测量,而是属于间接测量。

一般来说,若测量量 N 不能直接测量,而是作为几个直接测量 $x, y, z, \dots$ 的函数:即 $N = f(x, y, z, \dots)$,若要测量出 N ,必须先直接测量出 $x, y, z, \dots$ 后,代入函数关系式 $N = f(x, y, z, \dots)$ 中,就可推算出 N , N 就为间接测量。

直接测量和间接测量的区分,不是完全绝对的。其实,一个待测量是直接测量量还是间接测量量,通常与测量选用的测量仪器有关,而待测量本身无关。如测量一个球体的体积 V ,若选用长度测量测出球体的直径 d ,再用公式 $V = \frac{1}{6}\pi \cdot d^3$ 算出球的体积 V , V 就是间接测量;若选用量筒测球的体积





V , V 就是直接测量。随着科学技术的不断发展,测量工具的不断更新,将会给直接测量提供更多更精密的测量仪器,使现在的间接测量将会变为直接测量。

第二节 误差及其分类

在各种实验和科学研究中,都离不开对相关量进行测量,在测量过程中,不管是直接测量还是间接测量,不论是单次测量还是多次测量,也无论是等精度测量还是非等精度测量,或用不同种方法的各种测量,对同一待测量所测得的结果总是不完全相同的。即使在测量过程中操作很细心准确,仪器设备非常好,各次所测得的结果也会总是不完全一样,测量者也无法判断哪一个结果绝对正确。换句话说,在实验中,在任何测量中,由于受测量仪器、实验方法、实验条件、个人因素等限制,无论我们作任何努力,总使得测量结果与被测量客观存在的真值之间有一定的差异,这种差异就是测量误差。

一、误差

1. 真值

任何物质都有自身的各种特性,反映物质某种特性的客观真实数值,称为物质这种特性的真值。

物理量真值之所以存在,是因为物理量是描述物质运动规律的量,而物质运动规律是客观存在的。真值具有四个属性:

- (1) 存在性:指真值是客观存在的。
- (2) 确定性:指物理量在任一时刻的真值是确定的。
- (3) 变化性:指物理量在任一段时间内的真值可能是不同的。
- (4) 不可得性:指真值在实际测量中是不可得到的。或者说真值只有在极限情况下才能测量到。

测量是人类认识大千世界、了解自然界奥秘最直接的方法,测量是实验

中最基本的手段,测量也是科学研究中最常用的手段。测量的目的,就是力图得到待测量的真值(用 N' 表示)。但是,由于受实验条件、实验仪器等因素的限制,又不可能真正得到真值。故测量的真正目的,是力图接近真值,即在测量中力图接近真值,或得到最能代表真值的值。

真值是客观存在的,但它是一个理想概念。由于在实验测量相关量时,自始至终存在测量的局限和不完善,在一般情况下,真值是不能真正测到的,也就不能准确知道了。但在以下几种情况,可以视为知道真值的:

(1) 理论真值。如平面三角形的三个内角之和等于 180° , 直角等于 90° 等。

(2) 国际计量大会决议约定的值,可以视为近似真值。如基本物理量的单位标准量以及会议约定的基本物理常数数值等,都可视为近似真值。在这里必须指出:这些物理常数反映了大会决议时的测量水平,也含有一定的误差,只不过其误差较一般实验室所测得的误差小得多。

(3) 公认准确度高的实验测量值。

(4) 呈任何分布的有限次测量数据的算术平均值。

真值在实验中有着重要作用,常常我们在实验中将所测量的值,与上述的真值或标准值做比较,来衡量实验结果是否可靠、准确,从而分析实验是否存在误差。实验中,很多测量值不知其真值,我们往往会用多次测量结果的平均值来代替真值,作为实验测量值的比较对象。

2. 误差 ΔN

在测量中,由于测量仪器、实验方法、实验条件等多种因素的影响,使得测量结果与被测量客观存在的真值之间总有一定的差异,而且无论我们作出何种努力,这种测量结果与真值之间的差异总是存在,这种差异就是测量误差。

具体来讲,所谓误差,就是测量值与真值之差。若用 N 表示测量值(或称测量结果),表示真值, $\Delta N'$ 表示误差,则有:

$$\Delta N = N - N' \quad (1.1)$$

误差存在于一切测量中,由于测量方法、测量仪器、实验方法、实验环境和测量者自身素质等多种因素的影响,测量不可能完全是精确的,总会存在误差。测量误差贯穿于整个测量过程的始末。每使用一种仪器,每进行一次



测量,都会引进误差,测量所根据的实验理论、实验方法越多,所使用的仪器越多,实验测量所经历的时间越长,引进误差的机会就越多。

3. 偏差(残差) ΔV

在实验测量中,真值是无法确切得到的,无论采取什么方法、手段,一个待测量的真值,是无法得到的。因此,误差 ΔN 也就无法求出。在实际测量中,我们只能用最接近真值的值——最可信值来代替真值。最可信值用 $\hat{N}$ 表示。这样,测量值 N 与最可信值 $\hat{N}$ 之差,称为偏差(又称残差),用 ΔV 表示:

$$\Delta V = N - \hat{N} \quad (1.2)$$

在后面我们将会学习到,由最小二乘法原理可以证明,最可信值 $\hat{N}$ 就是多次测量的算术平均值 $\bar{N}$,即 $\bar{N} = \hat{N}$ 。所以,我们把测量值与真值之间的差称为误差,而把测量值与平均值之间的差称为偏差,偏差 ΔV 就可表示为:

$$\Delta V = N - \bar{N} \quad (1.3)$$

在有限次测量中,算术平均值 $\bar{N}$ 容易求得:

$$\bar{N} = \frac{1}{n} = (N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i \quad (1.4)$$

上式中 n 表示对某一待测量进行了 n 次测量, n 次测量值分别为 N_1 、 N_2 、 N_3 、 $\cdots$ 、 N_n 。

当 n 增至无限多时,在系统误差又可忽略时,算术平均值 $\bar{N}$ 就趋向真值 N_0 。即

$$\bar{N} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} N_i = N_0 \quad (1.5)$$

在实际测量中,不管实验也好,科研也好,对待测量不可能进行无限多次测量,故真值也就不可能得到。在有限次测量中,因得不到真值 N' ,误差 ΔN 也就不可能得到,只能求出偏差 ΔV ,当测量次数 n 增至无穷多次时,偏差趋向误差。但在习惯上,却常把偏差称为误差,这是不太准确的称法,但已习以为常。在本书中,我们常常把偏差也称为误差,在以后的学习内容中,也这样近似称谓。

二、误差分类

我们学习误差理论的目的,是为了判断测量数据的可靠性和怎样提高

