中学教学研究

3+X

中学成功教学法体系

3公共科(语、数、外)卷㉝

中学数学思维能力的培养与思维方式训练(下)

数学卷⑨

内蒙古大学出版社

3+X 中学成功教学法体系·[illegible]

中学数学

思维能力的培养与思维方式训练（下）

本书编委会

☆

内蒙古大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学教学研究:3+X中学成功教学法体系/冯晓林主编.—呼和浩特:内蒙古大学出版社,2000.9

ISBN 7-81074-150-0

Ⅰ.中…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.中学-教学法-研究
Ⅳ.G632.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第71531号

书　　名	中学教学研究:3+X中学成功教学法体系
主　　编	冯克诚
责任编辑	莫久愚
封面设计	伍禾工作室
出　　版	内蒙古大学出版社 呼和浩特市大学西路235号(010021)
发　　行	内蒙古新华书店
印　　刷	北京市社科印刷厂
开　　本	850×1168/32
印　　张	736
字　　数	18464千字
版　　期	2000年9月第1版 2000年9月第1次印刷
标准书号	ISBN 7-81074-150-0/G·14
定　　价	全100册　1580.00元 (3公共科语数外卷47册分价:750.00元)

目 录

中学数学思维能力的培养与思维方式训练(下)

3+2中学成功教学法体系

中学数学思维能力的培养与思维方式训练(下)

◆数学联想思维及其教学培养

联想是指由一事物想到另一事物的心理过程。它是从已经掌握的途径、原则和方法去寻求接近当前问题解决的途径、原则和方法。心理学认为:思维起源于问题,联想是思维的渠道。

青少年都富于联想,但联想往往是在兴趣、关心新问题的激励等要素支配下进行的。他们分析问题较难,而独立解决问题更难,需要通过教师创造条件,提供恰当的问题,设置问题情境,投放“鱼饵”,来展开联想思维。

教师在数学教学中构建什么样的问题引发学生联想思维,这要从数学本身的知识结构和学生现实生活的经验及思维水平来考虑。袁铁林老师从以下几方面进行了总结:

1. 探索概念产生背景,以现实典例引发联想

教学方法论指出,知识结构的形成,都要依据其逻辑因素和历史因素的恰当配合。现代的公理法虽在科学上的见解有较高品质,

但在教学法上却有缺陷,因为如果人们对某事物不知道它是如何发展起来的,那么就不易理解它。作为教师明了每一数学概念产生的背景,准确而简明地选用现实生活典型例子引发学生联想、判断、归纳来揭示概念属性,对提高教学效果尤其重要。因为,没有实例引导学生联想思维,不管教师如何强调概念的重要性、意义和作用,学生仍是不易理解的。

例如"自然数"概念或"集合与对应"概念教学时,我们可以举出这样的实例:现有两个不满3岁的幼儿,每人口袋里装有大小不一的糖块若干块,不准数(其实他们都不会数),而这两个小孩却能比较出谁多谁少。这是为什么呢?这时学生们产生了极大兴趣,展开了积极联想:有的说一摸就知道了,有的说不对,因为糖块大小不一样,经过短时间争论,最后统一到"对应"比较,不讲自明。

又如"同余"概念,教师可对学生说,你只要说出几月几日,老题马上说出那天是星期几;你说出今年岁数多大,老师就会马上说出你的属相。学生兴趣盎然纷纷发言,想办法难倒老师,但老师无一答错。此时喧闹一时的课堂立即鸦雀无声,学生们都陷入了联想深思,追究为什么,很快悟出了道理之所在:当两个不同的自然数除以同一个自然数,余数一样时,便是老师说的同一个结果。这就是同余概念的本质属性。

探索数学概念产生背景以现实典例引发学生联想,既活跃了课堂气氛激发了学生的求知欲望,又促进学生联想思维的发展,对概念的理解、消化和掌握也起到了桥梁作用。

2.遇到疑难问题,引导学生类比联想

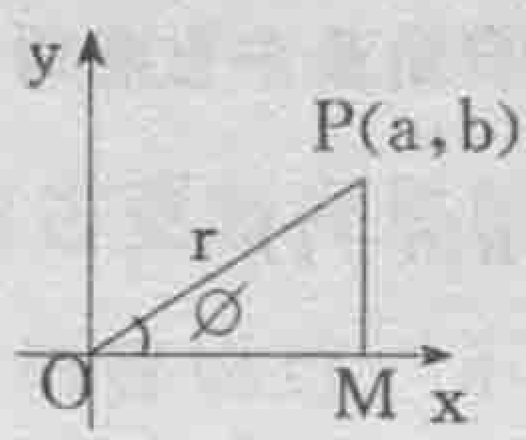
唯物辩证法告诉我们:万物之间都有联系,即使看起来极不相同或离得很远的区域都有某些相关和联系。数学系统中的知识结构更是如此。我们在寻求解决问题的方法时,就需要"左思右想"

“前连后牵”，最终拨云见日，思路畅通。

如高中代数上册第 194 页例 7 中化 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 为一个角的三角函数形式，教材中是从设 $a=x\sin\psi$ 入手，把原式由 $x\sin\alpha\cos\psi+x\cos\alpha\sin\psi$ 化为 $x\cos\psi, b=x\sin(\alpha+\psi)$ 的形式，再确定 x,ψ。学生对此解法感到突然，虽然表面上接受 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\psi)$，但仍疑惑不安。如果能引导学生类比联想：三角函数定义中的 $\sin\alpha=$____，$\cos\alpha$____，$r=$____，学生很容易回答：$\sin\alpha=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$。比较 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；学生自然回答类似。这时教师可以引导学生把 a,b 看作直角坐标平面内的一个点 $P(a,b)$，连线 OP（如图），

则 $|OP|=r$

$=\sqrt{a^2+b^2}$，



那么

$$\frac{a}{r}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\psi,$$

$$\frac{b}{r}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\psi。$$

由此 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=$

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\psi\sin\alpha+\sin\psi\cos\alpha)$$

$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\psi)$ 学生疑云顿开。

3. 寻求事物规律，引导学生归纳联想

归纳主要是通过对大量具体材料的观察、联想、比较、分类，找出材料间蕴含的共同特征，使之成为一定范围内较系统的知识。这是数学中常用的方法之一。

如排列 A_n^m 的计算公式推导时，可以先从具体问题下手：$A_5^2=5\times4$；$A_5^3=5\times4\times3$；$A_5^4=5\times4\times3\times2$；使学生观察，展开联想，比较，寻找各式间的相同和相异。经引导，学生自己可发现其规律：(1)等号右边是连续自然数之积(个数不一样)；(2)积中最大的都是5(最小的不一样)；(3)因数个数(虽不相同)都是所取元素的个数。这样由简单具体实例引导学生观察、联想、比较后归纳出的规律，再推导 A_n^m 的计算公式便可水到渠成，使学生易于理解且印象深刻。

又如，高中代数下册数学归纳法中出现的以下证明题：

(1)$1+2+3\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2)$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(3)$1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

这些题是启发学生归纳联想，开发智力，挖掘潜力的极好教材，机遇难得不可失掉。教学过程中，为了有目的地启发学生仔细观察、归纳联想、分类、判断、大胆猜测，一开始就可以有针对性地向学生提出："通过对数学归纳法的学习，看谁能从习题中发现具有共同特征的证明题，并且归纳上升到一般规律，然后证明它的成立，谁就是一名小发明家。"

学完本部分内容，在完成全章总复习后，班内有几名学生通过

一起讨论、研究，共同发现了这3个习题的一般性命题，并证明了它。即：

$$1\times2\times3\cdots\times m+2\times3\times\cdots\times(m+1)+\cdots+n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)$$

$$=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$$

（m为确定的自然数）

因此在教学中多从具体问题下手，引导学生观察、联想、归纳、验证，不但熟练了应用数学方法的技能，开阔了视野，还可以提高学生的创造思维。

4. 不满足书本结论，鼓励学生变式联想，发展学生的再创能力

人类总是在不断认识世界、改造世界的过程中得以生存和发展，不满足现有水平是促进更新发展的重要动力。美国物理学家、诺贝尔奖金获得者温伯格曾说过："不要安于书本上给你的答案，而要尝试一下，尝试发现什么与书本上不同的东西，这种素质可能比智力更重要。"因此在我们的教学中若能恰当选择某些数学问题，启发学生变式联想，多动手变换，确能推证、演绎出超越现有书本知识范围的数学命题。这虽不是真正的创新，但它孕育着创造思维的思想，有人称之为"再创能力"。

如上述提到的一般性命题的证明，除用数学归纳法证明外，还可以引导学生变换一个方式来考虑，启发学生联想，转化为组合计算公式来证明，既简捷又开辟了新的证明方法，对学生来说是又一次思维的飞跃。

即：$S_n=m!\ [\frac{1\times2\times3\cdots\times m}{m!}+$

$$\frac{2\times3\times4\cdots\times m(m+1)}{m!}+\cdots+$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{m!}]$$

$$=m!\ [C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{n+m-1}^m]$$

$$=m!\ C_{n+m}^{m+1}$$

$$=m!\ \frac{P_{n+m}^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$=\frac{1}{m+1}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)$$

又如数学中的"一式多变"、"猜想归纳与验证"、"正运算和逆运算"、"正定理与逆定理"、"直证法与反证法"等,若能引导学生从动态变化中多做这样的工作,不但能巩固学生原有知识和技能,培养正确的联想思维方法,而且还可以培养学生进一步探索未来知识的能力。

总之,数学教学中的联想思维是活跃学生积极思维的催化剂,是由学生的现有发展水平过渡到较高目标之间架起的桥梁,对开发学生智力,培养能力,无不有益。

◆数学相似思维及其教学培养

当两个相似事物之间建立起某种联系时,就能从其中一个事物的性质和变化规律去研究和发现另一事物的性质和变化规律。这种研究问题和解决问题的方法,在心理学上就叫相似思维法。

如果说逻辑思维是一种纵向思维,那么相似思维就是一种横向思维。逻辑思维主要依赖于推理,相似思维主要依赖于联想。用相似思维法研究问题的原理属于"原型启发原理",当我们研究事

物A时，依赖于联想的中介作用，由相似表象引起大脑记忆屏幕上A的相似原型B的再现，在原型B的启发之下，利用相似本质以达到研究事物A的目的。在数学教学中如何运用相似思维法去启迪学生思维、发展思维能力、培养良好的思维品质呢？江苏省东台市四灶乡七灶联中张志善、诚南中学王茂森老师总结了几点做法：

1. 相似纵向类比，培养思维的变通性

根据相似性原理，在同一学科中进行纵向类比，不仅可以强化知识，而且可以培养思维的灵活性、变通性。

例1　解方程：$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{2}{5}$·(90年沈阳中考题)

观察方程的结构特征，联想到方程：$x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}$，

两根为 $x_1=c, x_2=\frac{1}{c}$，就会将方程变形为：

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}}=2+\frac{1}{2},$$

$$\therefore \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=2, \text{或} \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=\frac{1}{2},$$

解为：$x_1=2, x_2=-3$

检验后可知这两解均为原方程的解。

2. 运用横向类比，培养思维的跳跃性

借助相似原理展开联想翅膀，就可以飞越数学各分支间的“鸿沟”，达到新的境界。

例2　已知 $a>0, b>0, c、d$ 为任意实数，求证：

$d^2+a+\sqrt{(c-d)^2+b}\geq c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$。

分析：若用代数方法证明，其过程将较繁冗，注意到所证等式中的三个根式与平面上两点间距离公式很相似，若从数转化为形来处理，易得下面简捷证法。

证明：如图1，设平面上三点 $A(0,\sqrt{a})$、$B(c,-\sqrt{b})$；$C(d,0)$

则 $|AC|=\sqrt{d^2+a}$，

$|BC|=\sqrt{(c-d)^2+b}$，

$|AB|=\sqrt{c^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$，

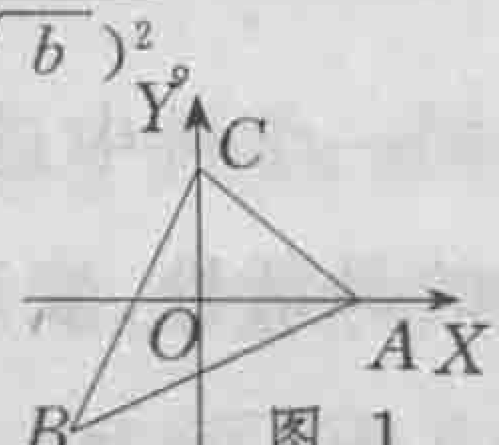


图 1

由 $|AC|+|BC|\geq|AB|$，即得要证的不等式。

例3　已知 P 是正方形 $ABCD$ 外接圆弧 AD 任意一点。

求证：$PA+PC=\sqrt{2}PB$；

$PA\cdot PC=P^2B^2-AB^2$。

观察结论，二式有 $PA+PC$ 和 $PA\cdot PC$，联想韦达定理，发现它们之间的相似点，因此可构造方程，运用代数方法来证。

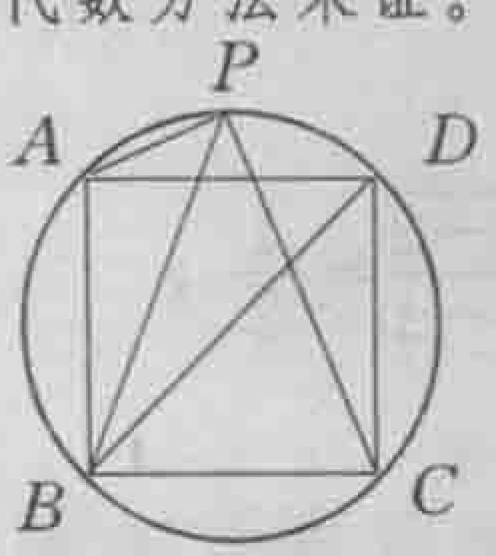


图2

证明：如图2，连 BD，则

$\angle ADB=\angle BDC=\angle APB=\angle BPC=45°$。

在 $\triangle APB$ 中，由余弦定理，得

$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cos45°$，

即：

$PA^2-(\sqrt{2}PB)PA+(PB^2-AB^2)=0$　(1)。

在$\triangle PBC$中,由余弦定理,得

$$BC^2=PB^2PC^2-2PB\cdot PC\cos45°。$$

又　$AB=BC$,可化为

$PC^2-(\sqrt{2}PB)PC+(PB^2-AB^2)=0$　(2)

由(1)、(2)可知,PA、PC是方程

$x^2-(\sqrt{2}PB)x+(PB^2-AB^2)=0$ 的两个根。

由韦达定理,得

$$PA+PC=\sqrt{2}PB,PA\cdot PC=PB^2-AB^2。$$

有些题目表面上看不出与其它学科有什么相似之处,似乎是井水不犯河水,但若注意挖掘相似性,巧用模型,就能得到其简捷解法。

例4　正数x、y、z满足方程组

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25, \\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9, \\ z^2+zx+x^2=16, \end{cases}$$

试求　$xy+2yz+3xz$。

分析:注意到x、y、z为正数这一特定条件,可猜上面三个方程可能有其几何背景,若将原方程组变形为:

$$\begin{cases} x^2+(\dfrac{y}{\sqrt{3}})^2-2x(\dfrac{y}{\sqrt{3}})\cos150°=5^2, & (1) \\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}^2+z^2=3^2, & (2) \\ z^2+x^2-2xz\cos120°=4^2。 & (3) \end{cases}$$

由于上述三式与余弦定理及勾股定理相似,故可构造如下图形:

(1)式可看作以x、$\dfrac{y}{\sqrt{3}}$为边,夹角为150°,第三边为5的$\triangle OPR$;(2)式

可看作以$\frac{y}{\sqrt{3}}$、z 为直角边，3 为斜边的直角△OPQ；(3)式可看作以 z、x 为

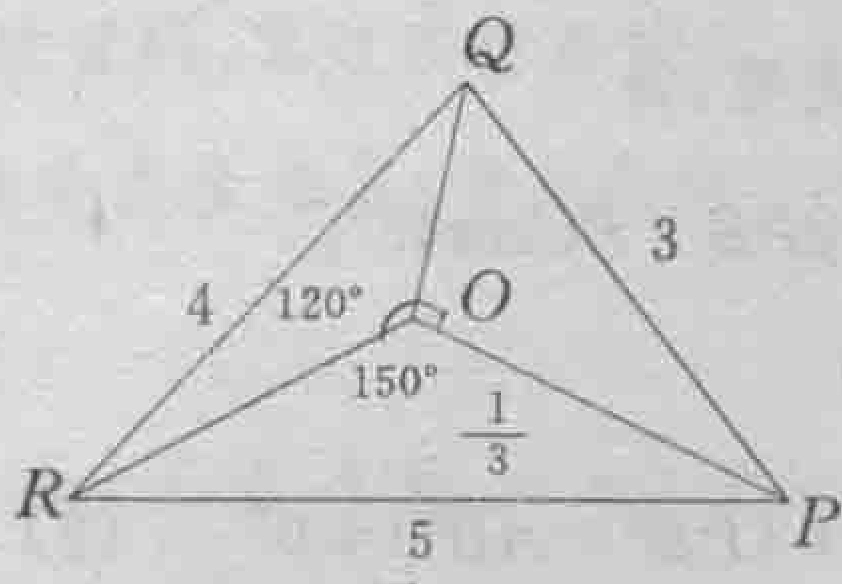


图 3

边，夹角为 120°，第三边为 4 的△OQR。在△PQR 中，

$\because RP^2=PQ^2+RQ^2$，$\therefore \angle PQR=90°$。

从而 $S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$。

又 $S_{\triangle PQR}=S_{\triangle OPR}+S_{\triangle OPQ}+S_{\triangle ORQ}$。

$=\frac{1}{2}x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}sin150°+\frac{1}{2}z\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}xzsin120°$

$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz)=6$

$\therefore xy+2yz+3xz=6\times 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$。

相似性原理在数学教学中的应用是广泛的、有效的。向我们揭示了它诱人的魅力，它确是一种好的思想方法。需要说明的是相似思维是一种较高级的思维活动，只有具备坚实的基础，才能面对新的信息立即产生“曾似相识”之感，因此，只有在大力加强双基教学的前提下，由浅入深地展开相似思维的训练，才能收到较好的效果。

数学转换思维中的若干思维指向

从宏观上说，解数学题的过程是不断转换问题的过程，在中学

数学教学中,培养和训练学生的转换思维,对于优化学生的思维品质,提高学生思维的灵活性和独创性,都是极其重要的,但有的学生在解题中虽有转换意识,但往往对转换的方式、方法心中无数。安徽枞阳中学刘汉顶老师举例说明了转换思维中的若干思维指向:

1. 变量转换

有些数学问题,隐含着某种潜在关系,一经挖掘,施行变量转换,即可获解。

例 1　函数

$f(x)=2\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{3+4x-x^2}$ 的值域是______。(1994 年合肥市高中数学竞赛题)

分析:易求得函数 $f(x)$ 的定义域为 $[2-\sqrt{7},1]U[3,2+\sqrt{7}]$,因 $x^2-4x+3\in[0,6]$,且 $(x^2-4x+3)+(3+4x-x^2)=6$,故可利用三角公式作变量转换。

令 $x^2-4x+3=6\cos^2\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$,则 $3+4x-x^2=6\sin^2\theta$,于是 $f(x)=\sqrt{30}\sin(\theta+\psi)$(其中 $\psi=\text{arctg}2$),易求得 $f(x)\in[\sqrt{6},\sqrt{30}]$。

2. 主元转换

某些含参变量问题,将参变量"反客为主",可收到事半功倍之效。

例 2　若方程 $\cos2x+\sin x-a=0$ 有实数解,求 a 的取值范围。

分析:原方程 $\Longleftrightarrow 2\sin^2x-\sin x+a-1=0$,若利用二次方程在 $[-1,1]$ 上有实根,求 a 的取值范围,则运算量较大,视 a 为 x 的函数;得 $a=-2\sin^2x+\sin x+1$,则问题转换为求函数的值域:

3+2中学成功教学法体系