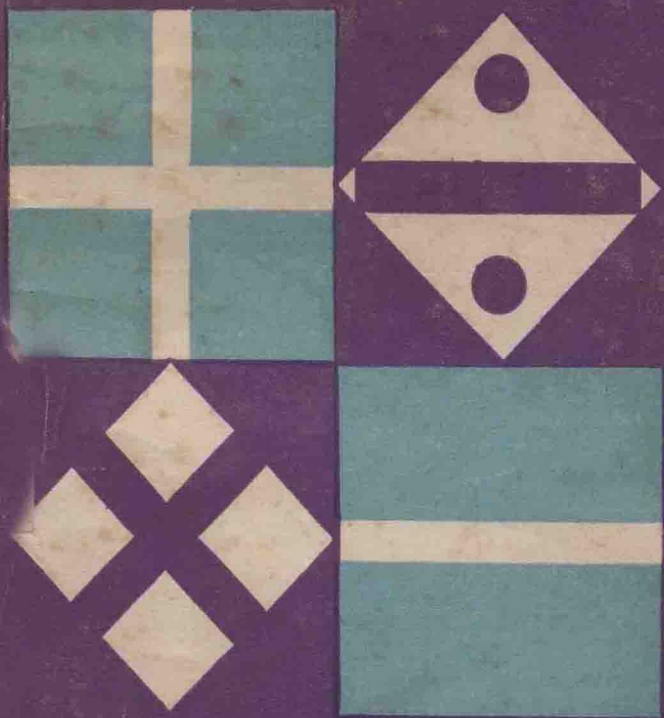


初中代数妙题巧解

CHUZHONG DAISHU MIAOTI QIAOJIE

蒋声 编著



上海科技教育出版社

初中代数妙题巧解

蒋声编

ISBN 7-5328-0218-6

C·817

上海科技教育出版社

初中代数妙题巧解

蒋 亮 著

初中代数妙题巧解

蒋 亮 编

上海科技教育出版社出版发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 5.75 字数 127000

1989年9月第1版 1989年9月第1次印刷

印数 1—10400

ISBN 7-5428-0316-6

G·317

定价：1.65元

前 言

一道好的数学题和一个好的解答,常能使人反复吟味,深受启发。编写这本《初中代数妙题巧解》的目的,就是想集中介绍很多巧妙的初中代数题目和巧妙的解答,供初中学生阅读、练习和研究。这些题目散见于各种中外文资料,富有启发性,并具有新鲜感,对于培养读者思维的敏捷、灵活和对知识的透彻理解将有一定帮助。这些巧妙的题目是无数命题者和解题者的智慧和汗水的结晶,由于篇幅所限,不能将所参考的各种资料逐一列出,在此谨向各有关同志表示由衷的感谢。在编写过程中,不可避免地要添进编者自己的许多思考、改进、串联和翻新等工作,其中错误和缺点在所难免,恳切希望广大读者批评指正。

编者 蒋 声 1988年12月

于扬州师范学院

目 录

前言

1. 末四位数字	1
2. 安排住宿	1
3. 讨论字母系数	2
4. 求体重	4
5. 和是一百的倍数	6
6. 含绝对值的方程	8
7. 个位数字	10
8. 和差配合	11
9. 整数表示成平方和	12
10. 左顾右盼	13
11. 整数趣题	15
12. 夹缝里的数	17
13. 球赛比分	20
14. 从系数看因式	21
15. 换元分解因式	23
16. 逐步分解	24
17. 一个有用的公式	25
18. 整除问题	27
19. 末位是零	28
20. 推陈出新	30
21. 挤答案	32

22. 用字母表示大数	34
23. 消去法证明等式	35
24. 条件等式	37
25. “1”的妙用	38
26. 减少计算量	40
27. 分母相加	41
28. 分母有理化	43
29. 根号套根号	46
30. 先化简, 再比较	48
31. 凑立方	49
32. 数字穿墙	50
33. 多多益善	52
34. 无理数的小数部分	53
35. 隐含条件	54
36. 凑零求值	56
37. 平方求值	58
38. 迂回求值	59
39. 能省力处须省力	61
40. 换元简化运算	63
41. 含绝对值的化简	65
42. 根号下的相反数	66
43. 分析余数	68
44. 找规律	70
45. 公共根	71
46. 不解方程求值	72
47. 作二次方程	73
48. 奇数和偶数	74

49. 各有巧妙不同	76
50. 日新月异的试题	77
51. 两根的分界点	79
52. 绝对值的平方	81
53. 至少一个	82
54. 僧多粥少	84
55. 反客为主	86
56. 列方程求值	87
57. 倒数方程	89
58. 特殊四次方程	91
59. 一望而知	93
60. 且慢动笔	95
61. 拆分式	97
62. 平方对平方	99
63. 增添未知数	101
64. 巧用共轭无理式	103
65. 精益求精	105
66. 含立方根的方程	107
67. 种瓜得豆	110
68. 特殊方程特殊解法	112
69. 等于零的平方和	113
70. 公共汽车	114
71. 多设少求	115
72. 见机而作	117
73. 连比式, 看比值	120
74. 滚雪球	122
75. 方程组与分解因式	125

76. 一个分式方程组	127
77. 相邻整数的平方根	130
78. 四、六、九	131
79. 引进参数	132
80. 似错非错	134
81. 避免除法	135
82. 关于质数的问题	137
83. 对数方程	138
84. 转换目标	141
85. 巧证无理数	142
86. 绝对值与距离	143
87. 三角问题代数化	145
88. 化与消	146
89. 三角形的形状	148
90. 兵分两路	149
91. 勾股数	151
92. 四个整数	153
93. 整数部分	154
94. 平方根的整数部分	156
95. 猴子分桃	159
96. 和等于积	161
97. 逢山开路,遇水架桥	164
98. 递降法	166
99. 没有砝码的天平	168
100. 福尔摩斯的算题	170
练习题答案和提示	173

1. 末四位数字

问题 把 23 个数: $3, 33, 333, \dots, \underbrace{33\dots3}_{23\text{个}}$ 相加, 所得的和的末四位数字是_____。

解 和的末四位数字, 只与各个加数的末四位数字有关。所以, 只要考虑 $3, 33, 333$ 和 20 个 3333 的和的末四位数字。而

$$3 + 33 + 333 + 3333 \times 20 = 67029,$$

它的末四位数字是 7029, 所以原题中的 23 个数的和的末四位数字也是 7029。在本题的横线上面应该填写: 7029。

本题是上海市 1988 年初中一年级数学竞赛的一道试题。解答这道题所用的思考方法, 叫做“局部化”, 就是只考虑与任务有关的那些情况, 把无关的内容撇开不管, “眼不见, 心不烦”, 这样就把原来看上去很复杂的问题变得简单多了。

2. 安排住宿

问题 某宾馆底楼客房比二楼少 5 间。某旅游团有 48 人, 若全安排住底楼, 每间住 4 人, 房间不够; 每间住 5 人, 有房间没有住满 5 人。又若全安排住二楼, 每间住 3 人, 房间不够; 每间住 4 人, 有房间没有住满 4 人, 该宾馆底楼有客房_____间。

上面这道有趣的填空题, 是上海市 1988 年初中一年级数学竞赛的试题。

解 设底楼有客房 x 间, 则二楼有客房 $(x+5)$ 间。依题

意有:

$$\begin{cases} 4x < 48, & \text{①} \\ 5x > 48, & \text{②} \\ 3(x+5) < 48, & \text{③} \\ 4(x+5) > 48. & \text{④} \end{cases}$$

由①、②分别得到

$$x < 12, \quad \text{⑤}$$

$$x > 9.6; \quad \text{⑥}$$

从③、④分别得到

$$x+5 < 16, x+5 > 12,$$

即

$$x < 11, \quad \text{⑦}$$

$$x > 7. \quad \text{⑧}$$

x 是整数, 又要同时满足条件⑤、⑥、⑦、⑧, 只能是 $x=10$. 因此, 本题的空格中应该填: 10.

3. 讨论字母系数

问题 1 设 m 和 n 表示任意正数, 解方程

$$\frac{n(n+x)}{m} = \frac{m(m+x)}{n}.$$

解 用 mn 去乘方程两边, 得

$$\begin{aligned} n^3 + n^2x &= m^3 + m^2x, \\ (m^2 - n^2)x &= n^3 - m^3. \end{aligned} \quad \text{①}$$

将方程①的两边分解因式, 得

$$(m+n)(m-n)x = (n-m)(n^2 + nm + m^2). \quad \text{②}$$

由于 m, n 是正数, 所以 $m+n \neq 0$. 如果 $m \neq n$, 那么由②式可

得

$$x = -\frac{m^2 + mn + n^2}{m+n}.$$

如果 $m=n$, 那么②式成为 $0 \cdot x = 0$ (原方程成为 $n+x=n+x$), x 可为任意实数.

遇到含有字母系数的方程或方程组, 在需要用含字母的式子除方程两边时, 都要考虑这个除式是否会等于0.

问题 2 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{a+m} + \frac{y}{b+m} = 1, \\ \frac{x}{a+n} + \frac{y}{b+n} = 1. \end{cases}$$

解 要使原方程有意义, $a+m, b+m, a+n, b+n$ 都不能为0. 去分母, 原方程组化为

$$\begin{cases} (b+m)x + (a+m)y = ab + (a+b)m + m^2, & \text{①} \\ (b+n)x + (a+n)y = ab + (a+b)n + n^2. & \text{②} \end{cases}$$

①-②, 得

$$(m-n)(x+y) = (m-n)(a+b+m+n). \quad \text{③}$$

如果 $m \neq n$, 那么可从③式得到

$$x+y = a+b+m+n,$$

$$\therefore y = a+b+m+n-x. \quad \text{④}$$

把④式代入①式, 得

$$\begin{aligned} (b+m)x + (a+m)(a+b+m+n) - (a+m)x \\ = (a+m)(b+m), \end{aligned}$$

$$(b-a)x = -(a+m)(a+n). \quad \text{⑤}$$

如果这时还有 $a \neq b$, 那么由⑤式得到

$$x = \frac{(a+m)(a+n)}{a-b} \quad \textcircled{6}$$

代入④式,可得

$$y = \frac{(b+m)(b+n)}{b-a} \quad \textcircled{7}$$

总之,当 $m \neq n$ 且 $a \neq b$ 时,原方程组有唯一解,由⑥式和⑦式给出。

如果 $m = n$, 那么原方程组中的两个方程重合成一个方程,这时原方程组有无穷多解,它们可用下面的等式给出:

$$\begin{cases} x = t(a+m), \\ y = (1-t)(b+m), \end{cases}$$

其中 t 为任意实数。

如果 $m \neq n$ 而 $a = b$, 那么由于 $a + m \neq 0$, $a + n \neq 0$, ⑤式成为 $0 \cdot x \neq 0$, 无解,因而原方程组无解。

① 练习 解方程组
$$\begin{cases} px - qy = p^2 - q^2, \\ qx - py = q^2 - p^2. \end{cases}$$

4. 求 体 重

问题 五个同学量体重,每人和其他各人分别合秤一次,记录千克数如下: 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121。求每个同学的体重。

解 由于十个记录千克数互不相等,所以这五个同学的体重各不相同。设他们的体重千克数从小到大顺次是 u, v, x, y, z ;

$$u < v < x < y < z. \quad \textcircled{1}$$

根据不等式①把这五个未知数中每两数之和按照从小到大

的顺序排列,那么可以肯定, $u+v$ 最小, $u+x$ 第二小, $y+z$ 最大, $x+z$ 第二大,其余各个和的大小关系不能确定。由此得到四个方程:

$$u+v=111, \quad \text{②}$$

$$u+x=112, \quad \text{③}$$

$$y+z=121, \quad \text{④}$$

$$x+z=119. \quad \text{⑤}$$

共有五个未知数,还需要第五个方程。由于每人都分别与其余四人合秤一次,所以每人都秤过四次。因而把十个记录千克数全部加起来,总和应该等于各人的体重千克数之和的四倍:

$$\begin{aligned} &4(u+v+x+y+z) \\ &=111+112+113+114+115+116 \\ &\quad +117+118+119+121. \end{aligned}$$

化简,得

$$u+v+x+y+z=289. \quad \text{⑥}$$

⑥-②-④,得

$$x=57. \quad \text{⑦}$$

$$\text{③}-\text{⑦}: \quad u=55. \quad \text{⑧}$$

$$\text{②}-\text{⑧}: \quad v=56. \quad \text{⑨}$$

$$\text{⑤}-\text{⑦}: \quad z=62. \quad \text{⑩}$$

$$\text{④}-\text{⑩}: \quad y=59. \quad \text{⑪}$$

最后验算每两数之和,除去已写出的②~⑤式以外,其余六个和如下:

$$v+x=56+57=113,$$

$$u+y=55+59=114,$$

$$v+y=56+59=115,$$

$$x+y=57+59=116,$$

$$u+z=55+62=117,$$

$$v+z=56+62=118.$$

因而所得的解完全满足问题的要求；所以这五个同学的体重分别是：55 千克，56 千克，57 千克，59 千克，62 千克。

上面这个有趣的问题，是一道知识竞赛题。它的妙处，在于题目中仅仅把十个记录数字按照从小到大的顺序排列，而没有说明哪个记录数字是哪两个人的体重千克数之和。通常写出五个数中每两数之和时，最容易想到的顺序是

$$u+v, u+x, u+y, u+z;$$

$$v+x, v+y, v+z;$$

$$x+y, x+z;$$

$$y+z.$$

这是一种防漏防重的排列顺序，与从小到大的顺序并不完全一致。如果麻痹大意，认为题目简单，列方程时把两种排列顺序混为一谈，随手写下

$$\begin{aligned} u+v &= 111, & \text{①} \\ u+x &= 112, & \text{②} \\ u+y &= 113, & \text{③} \\ u+z &= 114, & \text{④} \\ & \dots\dots\dots, & \text{⑤} \end{aligned}$$

结果就会得到十个互相矛盾的方程。

5. 和是一百的倍数

问题 在 1, 2, 3, ..., 1988 这 1988 个自然数中，最多能取 _____ 个数，使在所取的数中，任意两个数的和能被 100 整

除。

本题是上海市1988年初中二年级数学竞赛的一道试题。

解 如果取出100、200、300、…、1900,其中每个数都是100的倍数,那么其中任意两个数的和当然能被100整除。这样取出的数有19个。能不能取到一组更多的满足条件的数呢?

设 x 、 y 、 z 是在一组满足条件的数中的任意三个不同的数,依题意有

$$\begin{cases} x+y=100m, & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=100n, & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z+x=100k, & \text{③} \end{cases}$$

其中 m 、 n 、 k 是正整数。 $(\text{①}+\text{②}+\text{③})\div 2$,得

$$x+y+z=50(m+n+k). \quad \text{④}$$

分别从④式减去②、③、①式,得

$$x=50(m-n+k),$$

$$y=50(m+n-k),$$

$$z=50(n+k-m).$$

这样就证明了,在任何一组满足条件的数中,只要一组中包含3个或更多个数,那么其中每个数都必须是50的倍数。因此,这些数的末两位数字或者是00,或者是50。又因为一组中每两个数的和都要能被100整除,所以在同一组中,只要有一个数以00结尾,就必须每个数都以00结尾;只要有一个数以50结尾,就必须每个数都以50结尾。在前1988个自然数中,以00结尾的自然数共有19个,以50结尾的共有20个(50,150,……,1950)。因而,把所有以50结尾的不大于1988的自然数取出来,这样得到的一组数,个数最多,等于20。所以本题的空格中应该填写:20。

6. 含绝对值的方程

问题 1 解方程组

$$\begin{cases} |x-y|=x+y-2, & \text{①} \\ |x+y|=x+2. & \text{②} \end{cases}$$

解 由①式得

$$x+y=|x-y|+2. \quad \text{③}$$

由于 $|x-y| \geq 0$, 所以从③式得

$$\begin{aligned} \text{④} \quad & x+y > 0, \\ \text{⑤} \quad & \therefore |x+y|=x+y. \end{aligned} \quad \text{④}$$

把④式代入②式, 得

$$\begin{aligned} \text{⑥} \quad & x+y=x+2, \\ & \therefore y=2. \end{aligned}$$

把 $y=2$ 代入①式, 得

$$|x-2|=x.$$

由此得

$$x-2=x \quad \text{⑤}$$

$$\text{或} \quad 2-x=x \quad \text{⑥}$$

方程⑤无解。从方程⑥得到 $x=1$, 因而本题的解是

$$x=1, y=2.$$

问题1如果按通常想法, 要区分 $x+y \geq 0$ 和 $x+y < 0$ 两种可能情形, 把方程②分成两个不同的方程 $x+y=x+2$ 和 $-(x+y)=x+2$, 对于方程①也要作类似的处理, 这样就很麻烦。在上面的解法中, 充分利用绝对值的定义和性质, 从方程①发现必然有 $x+y > 0$, 因而立刻消去方程②中的绝对值符号, 给解题带来很大方便。

问题 2 方程 $|x - |2x+1|| = 3$ 的不同的解的个数是()
(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

解 当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, $2x+1 \geq 0$, 并且

$$x+1 \geq \frac{1}{2} > 0,$$

因而

$$\begin{aligned} |x - |2x+1|| &= |x - (2x+1)| = |-x-1| \\ &= |x+1| = x+1. \end{aligned}$$

原方程化为

$$x+1=3,$$

$$\therefore x=2.$$

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $2x+1 < 0$, 并且

$$3x < -\frac{3}{2}, 3x+1 < -\frac{1}{2} < 0.$$

因而

$$\begin{aligned} |x - |2x+1|| &= |x - (-2x-1)| \\ &= |3x+1| = -3x-1, \end{aligned}$$

原方程化为

$$-3x-1=3,$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3}.$$

总之,原方程的不同的解的个数是 2, 应该选 (C).

本题是一道美国中学数学竞赛试题。由于包含双重绝对值符号,所以如果按照通常方法,需要分两次讨论,每次去掉一个绝对值符号。而在上面的解法中,只根据 $x \geq -\frac{1}{2}$ 或 $x < -\frac{1}{2}$