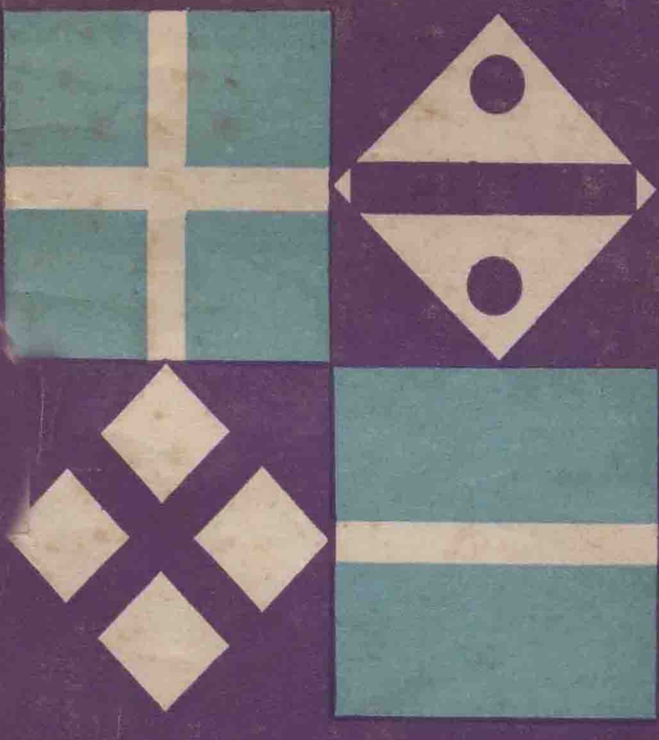
初中代数妙题巧解

CHUZHONG DAISHU MIAOTI QIAOJIE

蒋 声 编著



上海科技教育出版社

初中代数妙题巧解

蒋声 编

上海科技教育出版社

初中代数妙题巧解

蒋 声 编

上海科技教育出版社出版发行

（上海冠生园路 393 号）

各地新华书店经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 5.75　字数 127000

1989 年 9 月第 1 版　1989 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—10400

ISBN 7-5428-0316-6

G·317

定价：1.65 元

前　言

一道好的数学题和一个好的解答，常能使人反复吟味，深受启发。编写这本《初中代数妙题巧解》的目的，就是想集中介绍很多巧妙的初中代数题目和巧妙的解答，供初中学生阅读、练习和研究。这些题目散见于各种中外文资料，富有启发性，并具有新鲜感，对于培养读者思维的敏捷、灵活和对知识的透彻理解将有一定帮助。这些巧妙的题目是无数命题者和解题者的智慧和汗水的结晶，由于篇幅所限，不能将所参考的各种资料逐一列出，在此谨向各有关同志表示由衷的感谢。在编写过程中，不可避免地要添进编者自己的许多思考、改进、串联和翻新等工作，其中错误和缺点在所难免，恳切希望广大读者批评指正。

编者　蒋　声　1988年12月

于扬州师范学院

目　录

1. 末四位数字

问题 把23个数：3,33,333,…,$\underbrace{33\cdots3}_{23个}$相加,所得的和的末四位数字是____。

解 和的末四位数字,只与各个加数的末四位数字有关。所以，只要考虑3、33、333和20个3333的和的末四位数字。而

$$3+33+333+3333\times20=67029,$$

它的末四位数字是7029，所以原题中的23个数的和的末四位数字也是7029。在本题的横线上面应该填写：7029。

本题是上海市1988年初中一年级数学竞赛的一道试题。解答这道题所用的思考方法,叫做"局部化",就是只考虑与任务有关的那些情况,把无关的内容撇开不管，"眼不见，心不烦",这样就把原来看上去很复杂的问题变得简单多了。

2. 安排住宿

问题 某宾馆底楼客房比二楼少5间。某旅游团有48人,若全安排住底楼,每间住4人,房间不够;每间住5人,有房间没有住满5人。又若全安排住二楼,每间住3人,房间不够;每间住4人,有房间没有住满4人,该宾馆底楼有客房________间。

上面这道有趣的填空题,是上海市1988年初中一年级数学竞赛的试题。

解 设底楼有客房x间,则二楼有客房$(x+5)$间。依题

意有：

$$\begin{cases} 4x<48, & ① \\ 5x>48, & ② \\ 3(x+5)<48, & ③ \\ 4(x+5)>48. & ④ \end{cases}$$

由①、②分别得到

$$x<12, \quad ⑤$$

$$x>9.6; \quad ⑥$$

从③、④分别得到

$$x+5<16, x+5>12,$$

即

$$x<11, \quad ⑦$$

$$x>7. \quad ⑧$$

x 是整数，又要同时满足条件⑤、⑥、⑦、⑧，只能是 $x=10$. 因此，本题的空格中应该填：10。

3. 讨论字母系数

问题 1 设 m 和 n 表示任意正数，解方程

$$\frac{n(n+x)}{m}=\frac{m(m+x)}{n}.$$

解 用 mn 去乘方程两边，得

$$n^3+n^2x=m^3+m^2x,$$

$$(m^2-n^2)x=n^3-m^3. \quad ①$$

将方程①的两边分解因式，得

$$(m+n)(m-n)x=(n-m)(n^2+nm+m^2). \quad ②$$

由于 m、n 是正数，所以 $m+n\neq0$。如果 $m\neq n$，那么由②式可

得，

$$x=-\frac{m^2+mn+n^2}{m+n}。$$

如果 $m=n$，那么②式成为 $0\cdot x=0$（原方程成为 $n+x=n+x$），x 可为任意实数。

遇到含有字母系数的方程或方程组，在需要用含字母的式子除方程两边时，都要考虑这个除式是否会等于0。

问题 2 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a+m}+\dfrac{y}{b+m}=1,\\ \dfrac{x}{a+n}+\dfrac{y}{b+n}=1。\end{cases}$$

解 要使原方程有意义，$a+m$、$b+m$、$a+n$、$b+n$ 都不能为0。去分母，原方程组化为

$$\begin{cases}(b+m)x+(a+m)y=ab+(a+b)m+m^2, & ①\\ (b+n)x+(a+n)y=ab+(a+b)n+n^2。 & ②\end{cases}$$

①－②，得

$$(m-n)(x+y)=(m-n)(a+b+m+n)。 \quad ③$$

如果 $m\neq n$，那么可从③式得到

$$x+y=a+b+m+n,$$

$$\therefore\quad y=a+b+m+n-x。 \quad ④$$

把④式代入①式，得

$$(b+m)x+(a+m)(a+b+m+n)-(a+m)x$$
$$=(a+m)(b+m),$$

$$(b-a)x=-(a+m)(a+n)。 \quad ⑤$$

如果这时还有 $a\neq b$，那么由⑤式得到

$$x=\frac{(a+m)(a+n)}{a-b}. \qquad ⑥$$

代入④式，可得

$$y=\frac{(b+m)(b+n)}{b-a}. \qquad ⑦$$

总之，当 $m\neq n$ 且 $a\neq b$ 时，原方程组有唯一解，由⑥式和⑦式给出。

如果 $m=n$，那么原方程组中的两个方程重合成一个方程，这时原方程组有无穷多解，它们可用下面的等式给出：

$$\begin{cases}x=t(a+m),\\ y=(1-t)(b+m),\end{cases}$$

其中 t 为任意实数。

如果 $m\neq n$ 而 $a=b$，那么由于 $a+m\neq 0$，$a+n\neq 0$，⑤式成为 $0\cdot x\neq 0$，无解，因而原方程组无解。

练习　解方程组 $\begin{cases}px-qy=p^2-q^2,\\ qx-py=q^2-p^2。\end{cases}$

4. 求 体 重

问题　五个同学量体重，每人和其他各人分别合秤一次，记录千克数如下：111，112，113，114，115，116，117，118，119，121。求每个同学的体重。

解　由于十个记录千克数互不相等，所以这五个同学的体重各不相同。设他们的体重千克数从小到大顺次是 u、v、x、y、z：

$$u<v<x<y<z。 \qquad ①$$

根据不等式①把这五个未知数中每两数之和按照从小到大

的顺序排列，那么可以肯定，$u+v$ 最小，$u+x$ 第二小，$y+z$ 最大，$x+z$ 第二大，其余各个和的大小关系不能确定。由此得到四个方程：

$$u+v=111, \qquad ②$$

$$u+x=112, \qquad ③$$

$$y+z=121, \qquad ④$$

$$x+z=119。 \qquad ⑤$$

共有五个未知数，还需要第五个方程。由于每人都分别与其余四人合秤一次，所以每人都秤过四次。因而把十个记录千克数全部加起来，总和应该等于各人的体重千克数之和的四倍：

$$\begin{aligned}&4(u+v+x+y+z)\\&\quad=111+112+113+114+115+116\\&\qquad+117+118+119+121。\end{aligned}$$

化简，得

$$u+v+x+y+z=289。 \qquad ⑥$$

⑥－②－④，得

$$x=57。 \qquad ⑦$$

③－⑦： $u=55。$ ⑧

②－⑧： $v=56。$

⑤－⑦： $z=62。$ ⑨

④－⑨： $y=59。$

最后验算每两数之和，除去已写出的②～⑤式以外，其余六个和如下：

$$v+x=56+57=113,$$

$$u+y=55+59=114,$$

$$v+y=56+59=115,$$

$$x+y=57+59=116,$$
$$u+z=55+62=117,$$
$$v+z=56+62=118。$$

因而所得的解完全满足问题的要求；所以这五个同学的体重分别是：55 千克，56 千克，57 千克，59 千克，62 千克。

上面这个有趣的问题，是一道知识竞赛题。它的妙处，在于题目中仅仅把十个记录数字按照从小到大的顺序排列，而没有说明哪个记录数字是哪两个人的体重千克数之和。通常写出五个数中每两数之和时，最容易想到的顺序是

$$u+v,u+x,u+y,u+z;$$
$$v+x,v+y,v+z;$$
$$x+y,x+z;$$
$$y+z。$$

这是一种防漏防重的排列顺序，与从小到大的顺序并不完全一致。如果麻痹大意，认为题目简单，列方程时把两种排列顺序混为一谈，随手写下

$$u+v=111,$$
$$u+x=112,$$
$$u+y=113,$$
$$u+z=114,$$
$$\cdots\cdots,$$

结果就会得到十个互相矛盾的方程。

5．和是一百的倍数

问题 在 1，2，3，…，1988 这 1988 个自然数中，最多能取______个数，使在所取的数中，任意两个数的和能被 100 整

除。

本题是上海市1988年初中二年级数学竞赛的一道试题。

解 如果取出 100、200、300、…、1900，其中每个数都是100的倍数，那么其中任意两个数的和当然能被100整除。这样取出的数有19个。能不能取到一组更多的满足条件的数呢？

设 x、y、z 是在一组满足条件的数中的任意三个不同的数，依题意有

$$\begin{cases} x+y=100m, & ① \\ y+z=100n, & ② \\ z+x=100k, & ③ \end{cases}$$

其中 m、n、k 是正整数。(①+②+③)÷2，得

$$x+y+z=50(m+n+k)。 \quad ④$$

分别从④式减去②、③、①式，得

$$x=50(m-n+k),$$
$$y=50(m+n-k),$$
$$z=50(n+k-m)。$$

这样就证明了，在任何一组满足条件的数中，只要一组中包含3个或更多个数，那么其中每个数都必须是50的倍数。因此，这些数的末两位数字或者是00，或者是50。又因为一组中每两个数的和都要能被100整除，所以在同一组中，只要有一个数以00结尾，就必须每个数都以00结尾；只要有一个数以50结尾，就必须每个数都以50结尾。在前1988个自然数中，以00结尾的自然数共有19个，以50结尾的共有20个（50，150，…，1950）。因而，把所有以50结尾的不大于1988的自然数取出来，这样得到的一组数，个数最多，等于20。所以本题的空格中应该填写：20。

6. 含绝对值的方程

问题 1 解方程组

$$\begin{cases}|x-y|=x+y-2, & ① \\ |x+y|=x+2。 & ②\end{cases}$$

解 由①式得

$$x+y=|x-y|+2。\qquad ③$$

由于 $|x-y|\geqslant 0$,所以从③式得

$$x+y>0,$$

$$\therefore\quad |x+y|=x+y。\qquad ④$$

把④式代入②式,得

$$x+y=x+2,$$

$$\therefore\quad y=2。$$

把 $y=2$ 代入①式,得

$$|x-2|=x。$$

由此得

$$x-2=x \qquad ⑤$$

或

$$2-x=x。\qquad ⑥$$

方程⑤无解。从方程⑥得到 $x=1$,因而本题的解是

$$x=1,y=2。$$

问题1如果按通常想法,要区分$x+y\geqslant 0$和$x+y<0$两种可能情形,把方程②分成两个不同的方程 $x+y=x+2$ 和$-(x+y)=x+2$,对于方程①也要作类似的处理,这样就很麻烦。在上面的解法中,充分利用绝对值的定义和性质,从方程①发现必然有 $x+y>0$,因而立刻消去方程②中的绝对值符号,给解题带来很大方便。

问题 2 方程$|x-|2x+1||=3$的不同的解的个数是( )

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4。

解 当$x\geqslant-\frac{1}{2}$时,$2x+1\geqslant0$,并且

$$x+1\geqslant\frac{1}{2}>0,$$

因而

$$|x-|2x+1||=|x-(2x+1)|=|-x-1|$$
$$=|x+1|=x+1.$$

原方程化为

$$x+1=3,$$
$$\therefore\quad x=2。$$

当$x<-\frac{1}{2}$时,$2x+1<0$,并且

$$3x<-\frac{3}{2},3x+1<-\frac{1}{2}<0。$$

因而

$$|x-|2x+1||=|x-(-2x-1)|$$
$$=|3x+1|=-3x-1,$$

原方程化为

$$-3x-1=3,$$
$$\therefore\quad x=-\frac{4}{3}。$$

总之,原方程的不同的解的个数是 2,应该选 (C)。

本题是一道美国中学数学竞赛试题。由于包含双重绝对值符号,所以如果按照通常方法,需要分两次讨论,每次去掉一个绝对值符号。而在上面的解法中,只根据$x\geqslant-\frac{1}{2}$或$x<-\frac{1}{2}$