College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

同济大学应用数学系 编

高等数学
习题全解指南(上册)

同济·四、五版

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

高等数学习题全解指南

同济·四、五版(上册)

同济大学应用数学系　编

高等教育出版社

内容提要

本书是与同济大学应用数学系主编的《高等数学》第四、五版相配套的学习辅导书，由同济大学应用数学系的教师编写．本书内容由三部分组成，第一部分是按《高等数学》（上册）的章节顺序编排，给出习题全解．部分题目在解答之后对该类题的解法作了小结、归纳，有的提供了多种解法；第二部分是全国硕士研究生入学考试数学试题选解，所选择的试题以工学类为主，少量涉及经济学类试题；第三部分是同济大学高等数学考卷选编，以及考题的参考解答．

本书对教材具有相对的独立性，可为工科和其他非数学类专业学生学习以及准备报考硕士研究生的人员复习高等数学提供解题指导，也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解指南．（上册）：同济·四、五版/同济大学应用数学系编．—北京：高等教育出版社，2003.7

ISBN 7-04-011991-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．同…　Ⅲ．高等数学-高等学校-解题　Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025208 号

策　划　张忠月　**编　辑**　胡乃冏　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　杜晓丹
版式设计　王艳红　**责任校对**　殷　然　**责任印制**　杨　明

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　址**	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经　销　新华书店北京发行所
排　版　高等教育出版社照排中心
印　刷　国防工业出版社印刷厂

开　本	787×960　1/16	**版　次**	2003 年 7 月第 1 版
印　张	19	**印　次**	2003 年 7 月第 1 次印刷
字　数	350 000	**定　价**	20.10 元

前　言

本书是同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第四、五版)的配套用书,主要是为学习《高等数学》的大学生以及准备报考硕士研究生的人员复习《高等数学》提供一本解题指导的参考书,也可供讲授《高等数学》的教师在备课和批改作业时参考。

本书内容由三部分组成,第一部分是《高等数学》(第五版)的习题全解,包括各章的习题与总习题及解答,在解答中,有的题在解答之后,以注释的形式对该类题的解法作了归纳小结,有的题提供了常用的具有典型意义的多种解法。第二部分是全国硕士研究生入学统一考试数学试题选解,按照2002年4月教育部制定的数学考试大纲中关于数学一类型的高等数学内容的顺序,分函数、极限、连续,一元函数微分学,一元函数积分学,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程八个部分,每一部分选编的题量控制在25题之内,在每道试题的前面都注明了试题的年份及类别,如(1998.I)表示为1998年第一类考题(1987—1996年考题共分为五类,1997年以后只分为四类)。所选择的试题以工科类为主,少量涉及经济学类试题,每道试题都给出了解题的思路与方法,有的还给出了多种解法,以供读者参考。第三部分是同济大学期中、期末考试《高等数学》试卷选编。按上、下册内容,选了期中、期末各两套试卷,并提供了试题的参考解答。

本书由同济大学应用数学系的教师编写,其中第一部分第一、八章,第二部分(一)、(二)、(五)由邱伯驺,第一部分第二、三、七章由徐建平;第一部分第四、五、六章,第二部分(三)由朱晓平;第一部分第九、十章,第二部分(四)、(六)由郭镜明;第一部分第十一、十二章,第二部分(七)、(八)由应明;第三部分由应明、朱晓平完成。

本书中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

二〇〇二年十二月

目　　录

一、《高等数学》(第五版)上册习题全解

二、硕士研究生入学考试数学试题选解

三、同济大学《高等数学》试卷选编

一、《高等数学》(第五版)上册习题全解

第一章　函数与极限

习 题 1-1

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$ 及 $A\setminus(A\setminus B)$ 的表达式.

解　$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，$A\cap B=[-10,-5)$，

$A\setminus B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$，$A\setminus(A\setminus B)=[-10,-5)$.

注　$A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$.

2. 设 A、B、C 是任意三个集合，证明对偶律：$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证　$x\in(A\cap B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^C$ 或 $x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cup B^C$.

3. 设映射 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset X$. 证明

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证　(1) $y\in f(A\cup B)\Leftrightarrow\exists\, x\in A\cup B$，$y=f(x)\Leftrightarrow\exists\, x\in A$ 或 $x\in B$，$y=f(x)\Leftrightarrow y\in f(A)$ 或 $y\in f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

(2) $y\in f(A\cap B)\Rightarrow\exists\, x\in A\cap B$，$y=f(x)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cap f(B)$.

注意：反之，由 $y\in f(A)\cap f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ 且 $y\in f(B)\Rightarrow\exists\, x\in A$，$y=f(x)$；$\exists\, x'\in B$，$y=f(x')$. 由于 f 不一定是单射，未必有 $x=x'$. 例如，函数 $f(x)=x^2$，$x\in\mathbf{R}$. $A=(-\infty,0]$，$B=[-1,+\infty)$，$A\cap B=[-1,0]$，$f(A\cap B)=[0,1]$，但 $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty)$.

4. 设映射 $f:X\to Y$，若存在一个映射 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，$f\circ g=I_Y$，其中 I_X、I_Y 分别是 X、Y 上的恒等映射，即对于每一个 $x\in X$，有 $I_Xx=x$；对于每一个 $y\in Y$，有 $I_Yy=y$. 证明：f 是双射，且 g 是 f 的逆映射：$g=f^{-1}$.

证　先证 f 是单射：设 $x_1,x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，要证 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 用反证法. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则由假设，存在 $g:Y\to X$，使 $g\circ f=I_X$，故 $x_1=I_Xx_1=$

$(g\circ f)(x_1)=g[f(x_1)]=g[f(x_2)]=(g\circ f)(x_2)=I_X x_2=x_2$,导出矛盾.因此 f 是单射.

再证 f 是满射且 $g=f^{-1}$:由于 $g:Y\to X$,故 $\forall y\in Y$,有 $g(y)=x\in X$.而 $f\circ g=I_Y$,因此,$y=I_Y y=(f\circ g)(y)=f[g(y)]=f(x)$,即 f 是满射,且由逆映射定义知 $g=f^{-1}$.

5. 设映射 $f:X\to Y,A\subset X$,记 $f(A)$ 的原像为 $f^{-1}(f(A))$.证明:

(1) $f^{-1}(f(A))\supset A$;

(2) 当 f 是单射时,有 $f^{-1}(f(A))=A$.

证 (1) $x\in A\Rightarrow f(x)\in f(A)$.因为记号 $f^{-1}(B)$ 表示集合 B(在映射 f 下)的原像,即 $f^{-1}(B)=\{x\mid f(x)\in B,x\in D_f\}$,所以 $f(x)\in f(A)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(A))$,即 $A\subset f^{-1}(f(A))$.

(2) 由(1),只要证:$x\in f^{-1}(f(A))\Rightarrow x\in A$.

用反证法.若 $x\notin A$,则对 $\forall x'\in A,x\neq x'$,f 是单射 $\Rightarrow f(x)\neq f(x')$,从而 $f(x)\notin f(A)$,即 $x\notin f^{-1}(f(A))$,导出矛盾.所以 $x\in A$,从而 $f^{-1}(f(A))\subset A$.

6. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{3x+2}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$; (4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y=\sin\sqrt{x}$; (6) $y=\tan(x+1)$;

(7) $y=\arcsin(x-3)$; (8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y=\ln(x+1)$; (10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $3x+2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant -\dfrac{2}{3}$,即定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(2) $1-x^2\neq 0\Rightarrow x\neq\pm 1$,即定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0\Rightarrow x\neq 0$ 且 $|x|\leqslant 1$,即定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(4) $4-x^2>0\Rightarrow |x|<2$,即定义域为 $(-2,2)$.

(5) $x\geqslant 0$,即定义域为 $[0,+\infty)$.

(6) $x+1\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

(7) $|x-3|\leqslant 1\Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$,即定义域为 $[2,4]$.

(8) $3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$,即定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0\Rightarrow x>-1$,即定义域为 $(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$,即定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

注 本题是求函数的自然定义域,一般方法是先写出构成所求函数的各个简单函数的定义域,再求出这些定义域的交集,即得所求定义域.下列简单函数及其定义域是经常用到的:

$y=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$, $P(x)\neq 0$;

$y=\sqrt[2n]{x}$, $x\geqslant 0$;

$y=\log_a x$, $x>0$;

$y=\tan x$, $x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\cot x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;

$y=\arcsin x$, $|x|\leqslant 1$;

$y=\arccos x$, $|x|\leqslant 1$.

7. 下列各题中,函数 $f(x)$和 $g(x)$是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$, $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1$, $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解 (1) 不同,因为定义域不同.

(2) 不同,因为对应法则不同,$g(x)=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(3) 相同,因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同,因为定义域不同.

8. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases} |\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\varphi(-2)$,并作出函数 $y=\varphi(x)$的图形.

解

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi(-2)=0$.

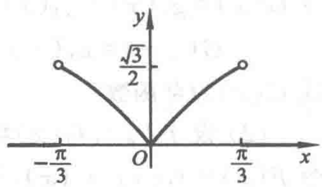

图 1-1

$y=\varphi(x)$的图形如图 1-1 所示.

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\frac{x}{1-x},(-\infty,1)$；

(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证 (1) $y=f(x)=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x},(-\infty,1)$.

设 $x_1<x_2<1$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{1-x_2}-\frac{1}{1-x_1}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_1)(1-x_2)}>0$，所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) $y=f(x)=x+\ln x,(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$. 因为 $f(x_2)-f(x_1)=x_2+\ln x_2-x_1-\ln x_1=x_2-x_1+\ln\frac{x_2}{x_1}>0$，所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$，由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的.

证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证 (1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 是奇函数，则 $g_1(-x)=-g_1(x),g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$，于是

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 均为偶函数，则 $f_1(-x)=f_1(x),f_2(-x)=f_2(x)$. 令 $F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$. 于是

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 为奇函数,则 $g_1(-x)=-g_1(x), g_2(-x)=-g_2(x)$. 令 $G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$. 于是

$$G(-x)=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数,则 $f(-x)=f(x), g(-x)=-g(x)$. 令 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$,于是

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)\cdot g(x)=-H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?

(1) $y=x^2(1-x^2)$; (2) $y=3x^2-x^3$;

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$; (4) $y=x(x-1)(x+1)$;

(5) $y=\sin x-\cos x+1$; (6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解 (1) $y=f(x)=x^2(1-x^2)$,因为 $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $y=f(x)=3x^2-x^3$,因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3$, $f(-x)\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(3) $y=f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) $y=f(x)=x(x-1)(x+1)$,因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) $y=f(x)=\sin x-\cos x+1$,因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1$, $f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$,所以 $f(x)$ 既非偶函数又非奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$,因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=\cos 4x$;

(3) $y=1+\sin \pi x$; (4) $y=x\cos x$;

(5) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 是周期函数,周期 $l=2\pi$.

(2) 是周期函数,周期 $l=\frac{\pi}{2}$.

(3) 是周期函数,周期 $l=2$.

(4) 不是周期函数.

(5) 是周期函数,周期 $l=\pi$.

14. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$; (2) $y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$; (4) $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$; (6) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$.

分析 函数 f 存在反函数的前提条件为:$f:D\to f(D)$是单射.本题中所给出的各函数易证均为单射,特别(1)、(4)、(5)、(6)中的函数均为单调函数,故都存在反函数.

解 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$解得 $x=y^3-1$,即反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\frac{1-x}{1+x}$解得 $x=\frac{1-y}{1+y}$,即反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$解得 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$,即反函数为 $y=\frac{-dx+b}{cx-a}$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\right)$解得 $x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,即反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$解得 $x=\mathrm{e}^{y-1}-2$,即反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}-2$.

(6) 由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$解得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,即反函数为 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$.

15. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

解 设 $f(x)$在 X 上有界,即存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M, x\in X.$$

故

$$-M\leqslant f(x)\leqslant M, x\in X,$$

即 $f(x)$在 X 上有上界M,下界$-M$.

反之,设 $f(x)$在 X 上有上界K_1,下界 K_2,即

$$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1, x\in X.$$

取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$,则有

$$|f(x)|\leqslant M, x\in X,$$

即 $f(x)$在 X 上有界.

16. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2, u=\sin x, x_1=\dfrac{\pi}{6}, x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u, u=2x, x_1=\dfrac{\pi}{8}, x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}, u=1+x^2, x_1=1, x_2=2$;

(4) $y=\mathrm{e}^u, u=x^2, x_1=0, x_2=1$;

(5) $y=u^2, u=\mathrm{e}^x, x_1=1, x_2=-1$.

解 (1) $y=\sin^2 x, y_1=\dfrac{1}{4}, y_2=\dfrac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x, y_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, y_2=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2}, y_1=\sqrt{2}, y_2=\sqrt{5}$.

(4) $y=\mathrm{e}^{x^2}, y_1=1, y_2=\mathrm{e}$.

(5) $y=\mathrm{e}^{2x}, y_1=\mathrm{e}^2, y_2=\mathrm{e}^{-2}$.

17. 设 $f(x)$的定义域 $D=[0,1]$,求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)(a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$.

解 (1) $0\leqslant x^2\leqslant 1 \Rightarrow x\in[-1,1]$.

(2) $0\leqslant \sin x\leqslant 1 \Rightarrow x\in[2n\pi,(2n+1)\pi], n\in\mathbf{Z}$.

(3) $0\leqslant x+a\leqslant 1 \Rightarrow x\in[-a,1-a]$.

(4) $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1.\end{cases} \Rightarrow$ 当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$时,$x\in[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$时,定义域为 $\varnothing$.

18. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=\mathrm{e}^x,$$

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解 $f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

$f[g(x)]$与 $g[f(x)]$的图形依次如图 1－2,1－3 所示.

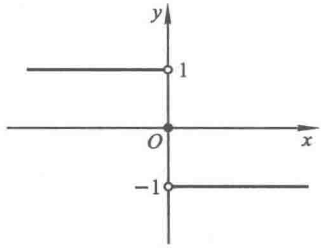

图 1－2

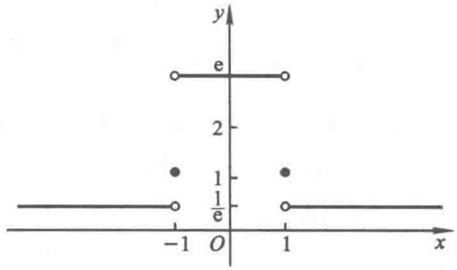

图 1－3

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi=40°$(图 1－4). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$与水深 h 之间的函数关系式,并指明其定义域.

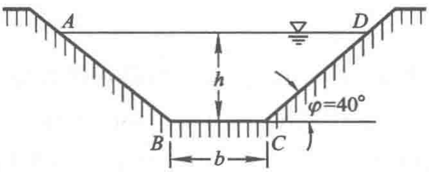

图 1－4

解 $AB=CD=\dfrac{h}{\sin 40°}$,

又 $$S_0=\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot 40°\cdot h)],$$

得 $$BC=\frac{S_0}{h}-\cot 40°\cdot h,$$

所以 $$L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos 40°}{\sin 40°}h,$$

而 $h>0$ 且 $\dfrac{S_0}{h}-\cot 40°\cdot h>0$,因此湿周函数的定义域为$(0,\sqrt{S_0\tan 40°})$.

20. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台以上的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

解 设订购 x 台,实际售价每台 p 元,厂方所获利润 P 元.则按题意,有

当 $x\in[0,100]$时,$p=90$,$P=(90-60)x=30x$,

当 $x>100$ 时,超过 100 台的订购量为 $x-100$,售价降低 $0.01(x-100)$,但最低价为 75,即降价数不超过 $90-75=15$,故

$$0.01(x-100)\leqslant 15,\Rightarrow x\leqslant 1\,600.$$

于是

当 $x\in(100,1\,600]$时,$p=90-0.01(x-100)=91-0.01x$,$P=(91-0.01x-60)x=31x-0.01x^2$.

当 $x\in(1\,600,+\infty)$时,$p=75$,$P=(75-60)x=15\,x$.

因此,有

(1)

$$p=\begin{cases}90, & x\in[0,100],\\ 91-0.01x, & x\in(100,1\,600],\\ 75, & x\in(1\,600,+\infty).\end{cases}$$

(2)

$$P=\begin{cases}30x, & x\in[0,100],\\ 31x-0.01x^2, & x\in(100,1\,600],\\ 15x, & x\in(1\,600,+\infty).\end{cases}$$

(3) $x=1\,000$,$P=31\times10^3-0.01\times10^6=21\times10^3$(元).

习 题 1-2

1. 观察一般项 x_n 如下的数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n=\dfrac{1}{2^n}$;　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$;

(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$;　　(4) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$;

(5) $x_n=n(-1)^n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}=0$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$.

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

(5) $\{n(-1)^n\}$没有极限.

2. 设数列$\{x_n\}$的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问$\lim_{n\to\infty}x_n=$? 求出 N, 使当 $n>N$ 时, x_n 与其极限之差的绝对值小于正数ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时,求出数 N.

解 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 证明如下:

因为 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$,

要使$|x_n-0|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

所以$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$|x_n-0|<\varepsilon$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时,取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1\,000$. 即若 $\varepsilon=0.001$,只要 $n>1\,000$,就有 $|x_n-0|<0.001$.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$; (2) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$; (4) $\lim_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

证 (1) 因为要使$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,

所以$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$,即$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

(2) 因为$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$,要使$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,只要$\frac{1}{4n}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{4\varepsilon}$,

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,就有$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$,即 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

注 本题中所采用的证明方法是:先将$|x_n-a|$等价变形,然后适当放大,使 N 容易由放大后的量小于ε 的不等式中求出. 这在按定义证明极限的问题中