大学课程教学同步练习丛书

高等数学

指导与提高

主编　褚维盘

西北工业大学出版社

高等数学指导与提高

主　编　褚维盘
副主编　王雪峰　曹根牛
编　者　褚维盘　王雪峰　曹根牛
　　　　乔宝明　谢建平　赵高长
　　　　廖登洪

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书对《高等数学》(同济大学编)教材中的每一章内容做了简明扼要的归纳与综合,精选了典型例题进行分析和评注,书中不仅指出解题的思路和技巧,而且为开拓思路,有的还给出了多种解法。每章后面配有补充习题,可帮助读者加深理解基本理论并灵活运用解题方法。

本书主要供大学本科生课程学习和考研复习使用,也可作为一般工程技术人员学习的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学指导与提高/褚维盘主编,王雪峰,曹根牛副主编.—西安:西北工业大学出版社,2003.8

ISBN 7-5612-1665-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①褚… ②王… ③曹… Ⅲ.高等数学—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 052354 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 **邮编**:710072 **电话**:029－8493844

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西天元印务有限公司

开 本:850mm×1 168mm 1/32

印 张:9.875

字 数:245 千字

版 次:2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1～8 000 册

定 价:13.00 元

前　言

本书按照高等院校工科数学教材编写会议确定的编写大纲，以及国家教委全国高校工科数学教学委员会关于面向21世纪教学改革精神，针对普通工科院校大学生学习高等数学的具体情况，编者根据近四年来在为本科生阶段复习、高等数学提高班及考研复习班专题讲座而编写的讲义的基础上改编而成的。它与现行教材《高等数学》(同济·第五版)配套使用，以帮助学生复习、巩固、提高所学知识，培养运用高等数学方法分析问题与解决问题的能力。

全书与教材《高等数学》(同济·第五版)同步，分为十二章。内容提要部分从不同方面对本章的一些重要概念和难点给予讲述，以便读者正确理解，对重点的内容也做了分类处理，简明扼要地归纳与综合，并针对考研的需要，基于教材，又高于教材。精选的典型例题部分有三个特色：一是大部分题解答前有详细的分析，指出了解题的思路和技巧；二是解答比较详细，有的含多种解法，以便开拓解题思路；三是解答后有评注，总结了该类型题的一般解法及适当推广，指出应注意的地方，有利于提高读者的分析综合能力。在这部分中，还选编讲解了有一定难度的题及考研试题，帮助学有余力的同学进一步提高。补充习题的目的，是为了使读者加深理解基本理论和掌握解题的方法和技巧。

本书第一、十一章由乔宝明编写，第二、十章由王雪峰编写，第三、十二章由曹根牛编写，第四、八章由赵高长编写，第五、九章由廖登洪编写，第六章由谢建平编写，第七章由褚维盘编写；由褚维盘任主编，曹根牛与王雪峰任副主编。西安建筑科技大学刘林教授对本书进行了审阅并提出了宝贵意见。本书在编写过程中，得到了西北

工业大学出版社的大力支持，在此我们表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，书中一定有不少缺点和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 4 月

于西安科技大学

目　录

第一章　函数与极限

一、内容提要

1. 复合函数、隐函数

(1) 设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 且 $\varphi(x)$ 的值域全落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f(\varphi(x))$ 为由函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，u 称为中间变量.

(2) 若在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某一区间上任取一确定值时，相应的总有满足这个方程的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在该区间上确定了 y 为 x 的隐函数.

2. 极限

(1) 若对于任给的 $\varepsilon>0$(无论多么小)，总存在正整数 N，使得对一切满足 $n>N$ 的 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立. 那么称常数 a 为数列 x_n 当 $n\to\infty$ 时的极限，或者称数列 x_n 收敛到 a，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty)$$

(2) 若对于任给的 $\varepsilon>0$(无论多么小)，总存在 $\delta>0$，使得对于一切适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，对应的函数 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

(3) 若在(2) 中，将 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $-\delta<x-x_0<0$，即 $x_0-\delta<x<x_0$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = A$$

若在(2)中,将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $0 < x - x_0 < \delta$,即 $x_0 < x < x_0 + \delta$,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限,记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = A$$

(4) 若对于任给的 $\varepsilon > 0$(无论多么小),总存在 $X > 0$ 使得对一切适合不等式 $|x| > X$ 的 x,对应的函数 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty)$$

当 $x \to +\infty$ 及 $x \to -\infty$ 时 $f(x) \to A$ 的定义,请读者自己复习.

3. 极限的性质

(1) 收敛数列必有界.有界是收敛的必要条件,但不充分,例如

$$x_n = (-1)^n$$

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,$A > 0$(或 $A < 0$)则一定存在着 x_0 的 δ 去心邻域,使得当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$ 时,有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

(3) 若 $f(x) \geqslant 0$(或 $f(x) \leqslant 0$)且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).以上二性质,称为极限的保号性.

(4) 函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是:函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 且 $x \to x_0^+$ 时的极限都存在,并且相等.

4. 极限的运算法则

设 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$\lim f(x)$,$\lim g(x)$ 存在,则

(1) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$,

(2) $\lim(f(x)g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$,

(3) 若 $\lim g(x) \neq 0$,则 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$,

(4) 若 $|f(x)| < M$,而 $\lim g(x) = 0$. 则 $\lim[f(x)g(x)] = 0$.

注意 在(1)中,若 $\lim f(x)$ 存在,$\lim g(x)$ 不存在,则

$\lim(f(x)\pm g(x))$ 一定不存在.

若 $\lim f(x)$ 不存在,而 $\lim g(x)$ 也不存在,则 $\lim(f(x)\pm g(x))$ 有可能存在.

5. 极限存在准则与无穷小的比较

(1) 夹逼准则:若数列 x_n, y_n, z_n 满足

(i) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n=1,2,\cdots)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

则数列 x_n 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注意 ① 此定理对函数 $y(x), f(x)$ 及 $z(x)$ 仍然正确.

② 在(i)中,不必要求 $n=1,2,\cdots$,只要求 n 从某一项开始,定理仍成立.

(2) 单调有界准则:单调有界数列必有极限.

注意 在运用此准则中,要会运用 $x_{n+1}-x_n>0$(或 $x_{n+1}-x_n<0$),或在已知 $x_n>0$ 时,通过证明 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>1$ 来证明数列的单调性.

(3) 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad (\text{或} \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e})$$

注意 在此极限中,应理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$,其余同样理解.

(4) 等价无穷小替换定理:

若 $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 都是自变量同一变化过程中的无穷小量,$\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,则有 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 成立.

6. $x\to 0$ 时,常用的等价无穷小

$\sin x\sim x,\qquad \tan x\sim x,\qquad 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},$

$\arcsin x\sim x,\qquad \arctan x\sim x,\qquad \mathrm{e}^x-1\sim x,$

$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$，　　$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$

注意　在这 8 个等价无穷小中，以第 1 个为例，应理解为当 $\varphi(x) \to 0$ 时，$\sin\varphi(x) \sim \varphi(x)$，其余 7 个应同样理解.

7. 函数连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ 或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\text{ 在 }x_0\text{ 处有定义} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\text{ 存在} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$$

8. 间断点的分类

若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，且左、右极限存在，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

不是第一类间断点的间断点称为 $f(x)$ 的第二类间断点.

间断点的四种特殊情况：

$$\begin{cases} \text{第一类间断点：跳跃间断点，可去间断点} \\ \text{第二类间断点：无穷间断点，振荡间断点} \end{cases}$$

9. 连续函数的性质与初等函数的连续性

(1) 有限个连续函数的和、差、积、商(分母不为零)，仍为连续函数.

(2) 单值单调连续函数的反函数在对应的区间上也为单值单调的连续函数.

(3) 连续函数的复合函数也是连续函数.

(4) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

10. 闭区间上连续函数的性质

(1) 介值定理：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，其最大值为 M，最小值为 m，则对于介于 M 与 m 之间的任何值 c，至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = c$.

(2) 最大值最小值定理：

设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上一定取得最大值 M 与最小值 m.

二、基本要求

(1) 理解极限、无穷小、无穷大的概念及它们之间的关系.

(2) 熟悉两个重要极限、等价无穷小的替换定理. 掌握求极限的一般方法.

(3) 掌握函数连续与间断的定义，能够熟练地判别函数的连续性和间断点的类型.

(4) 掌握利用函数的连续性求极限的方法.

(5) 知道闭区间上连续函数的性质，并能利用这些性质解决一些简单问题.

三、典型题解析

例 1.1 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

解 由条件可知

$$0\leqslant x+a\leqslant 1,\quad 0\leqslant x-a\leqslant 1$$

即

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

得到

当 $0<a\leqslant \dfrac{1}{2}$ 时，所求定义域为$[a,1-a]$；

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，所求定义域不存在.

例 1.2 试证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

证明　对任意的 $\varepsilon > 0$,要使

$$|f(x) - A| = \left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| =$$

$$|x^2 + x + 1 - 3| = |x - 1| \cdot |x + 2| < \varepsilon$$

当 $x \neq 1$ 且当 $x \to 1$ 时,不妨设 $|x - 1| < 1$,即 $0 < x < 2$.

则 $$|f(x) - A| = |x - 1| \cdot |x + 2| < |x - 1| \cdot 4$$

要使 $$|x - 1| \cdot |x + 2| < \varepsilon$$

只要 $$4|x - 1| < \varepsilon$$

即可,即 $$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$$

所以取 $$\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$$

可见,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{4}\}$,则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时,总有 $|f(x) - A| = \left|\frac{x^3 - 1}{x - 1} - 3\right| < \varepsilon$ 成立.

故 $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

例 1.3　设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1 + x_1}, \cdots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} \cdots$ 试证明 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在,并求此极限.

证明　显然有 $x_n > 0$, $x_2 - x_1 = \frac{x_1}{1 + x_1} > 0$.

设 $x_n > x_{n-1}$,则

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\right) - x_n =$$

$$\left(1 + \frac{x_n}{1 + x_n}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}\right) =$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} > 0$$

由归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递增,又 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}} < 2$,知 $\{x_n\}$ 有

上界.

由单调有界准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设其为 a，则

由 $$x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$$

两边取极限有 $$\lim_{n\to\infty}x_n = 1 + \frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}}$$

即 $$a = 1 + \frac{a}{1+a}$$

解之，得 $a = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，由于 $x_n > 0$，知 $a = \lim\limits_{n\to\infty}x_n \geqslant 0$.

所以 $$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

例 1.4 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{a+b+b^2+\cdots+b^n}$，其中，$|a|<1$，$|b|<1$.

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{a+\dfrac{b(1-b^n)}{1-b}} =$

$$\frac{\dfrac{1}{1-a}}{a+\dfrac{b}{1-b}} \xlongequal{(\text{由于}\lim\limits_{n\to\infty}a^n = \lim\limits_{n\to\infty}b^n = 0)}$$

$$\frac{1-b}{(1-a)(a-ab+b)}$$

例 1.5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解 因为

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\left(\frac{4^2-1}{4^2}\right)\cdots\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=$$

$$\frac{(2+1)(2-1)}{2^2}\cdot\frac{(3+1)(3-1)}{3^2}\cdot$$

$$\frac{(4+1)(4-1)}{4^2}\cdots\frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}=$$

$$\frac{n+1}{2n}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$$

例 1.6 求数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n+\sqrt{n}})$；

(2) $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n+\sqrt{n}})=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n})-(n+\sqrt{n})}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2\sqrt{n}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}+\sqrt{n+\sqrt{n}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}=-1$$

(2) 由条件知：

$$x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)^{\frac{1}{n}}$$

对任意的 n，有 $\quad 1<1+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n<3$