

“十一五”国家重点图书出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Time Series Analysis

时间序列分析

下册

詹姆斯·D·汉密尔顿 (James D. Hamilton) 著

 中国人民大学出版社

“十一五”国家重点图书出版规划项目

· 经 / 济 / 科 / 学 / 译 / 丛 ·

Time Series Analysis

时间序列分析

下册

詹姆斯·D·汉密尔顿 (James D. Hamilton) 著

夏晓华 译

胡毅 校



中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

时间序列分析/ () 汉密尔顿著; 夏晓华译. —北京: 中国人民大学出版社, 2014. 12
(经济科学译丛)

书名原文: Time • series • analysis

ISBN 978-7-300-20213-6

I. ①时… II. ①汉… ②夏… III. ①时间序列分析 IV. ①O211. 61

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 243124 号

“十一五”国家重点图书出版规划项目

经济科学译丛

时间序列分析

詹姆斯·D·汉密尔顿 著

夏晓华 译

胡毅 校

Shijian Xulie Fenxi

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

电 话 010-62511242 (总编室)

010-82501766 (邮购部)

010-62515195 (发行公司)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

规 格 185mm×260mm 16 开本

印 张 59.25 插页 4

字 数 1 143 000

邮政编码 100080

010-62511770 (质管部)

010-62514148 (门市部)

010-62515275 (盗版举报)

版 次 2015 年 1 月第 1 版

印 次 2015 年 1 月第 1 次印刷

定 价 118.00 元 (上下册)

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

《经济科学译丛》编辑委员会

学术顾问 高鸿业 王传纶 胡代光

范家骧 朱绍文 吴易风

主 编 陈岱孙

副主编 梁 晶 海 闻

编 委 (按姓氏笔画排序)

王一江 王利民 王逸舟

贝多广 平新乔 白重恩

刘 伟 朱 玲 许成钢

张宇燕 张维迎 李 扬

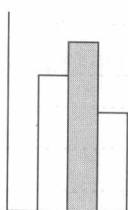
李晓西 李稻葵 杨小凯

汪丁丁 易 纲 林毅夫

金 碚 姚开建 徐 宽

钱颖一 高培勇 梁小民

盛 洪 樊 纲

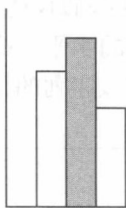


目 录

第 15 章 非平稳时间序列模型	505
15.1 简介	505
15.2 为什么考虑线性时间趋势和单位根?	508
15.3 趋势平稳和单位根过程的比较	509
15.4 单位根检验的含义	515
15.5 趋势时间序列的其他方法	519
附录 15. A 第 15 章部分公式的推导	523
第 15 章参考文献	524
第 16 章 确定性时间趋势过程	527
16.1 简单时间趋势模型普通最小二乘估计的渐近分布	528
16.2 简单时间趋势模型的假设检验	535
16.3 含确定性时间趋势的自回归过程的渐近推断	538
附录 16. A 第 16 章部分公式的推导	548
第 16 章习题	550
第 16 章参考文献	550
第 17 章 带有单位根的单变量过程	552
17.1 简介	553
17.2 布朗运动	555
17.3 泛函中心极限定理	557

17.4	真实系数为 1 时一阶自回归的渐近性质	565
17.5	存在一般序列相关的单位根过程的渐近结论	585
17.6	单位根的非利普斯-佩龙检验	588
17.7	p 阶自回归的渐近性质和增广的迪基-富勒单位根检验	599
17.8	单位根检验的其他方法	614
17.9	贝叶斯分析和单位根	615
	附录 17. A 第 17 章性质证明	617
	第 17 章习题	621
	第 17 章参考文献	627
第 18 章	多变量时间序列的单位根	632
18.1	非平稳向量过程的渐近结果	632
18.2	包含单位根的向量自回归过程	638
18.3	伪回归	648
	附录 18. A 第 18 章性质证明	653
	第 18 章习题	660
	第 18 章参考文献	662
第 19 章	协整	664
19.1	简介	664
19.2	零假设为没有协整关系的检验	677
19.3	协整向量的假设检验	698
	附录 19. A 第 19 章性质证明	716
	第 19 章习题	725
	第 19 章参考文献	728
第 20 章	协整系统的完全信息极大似然分析	731
20.1	典则相关	732
20.2	极大似然估计	737
20.3	假设检验	747
20.4	单位根检验综述——差分还是不差分?	755
	附录 20. A 第 20 章性质证明	756
	第 20 章习题	759
	第 20 章参考文献	760

第 21 章 带有异方差的时间序列模型	762
21.1 自回归条件异方差(ARCH)	762
21.2 扩展	771
附录 21. A 第 21 章部分公式的推导	780
第 21 章参考文献	782
第 22 章 机制变化的时间序列建模	786
22.1 简介	786
22.2 马尔可夫链	788
22.3 独立同分布的混合分布的统计分析	795
22.4 机制变化的时间序列模型	799
附录 22. A 第 22 章部分公式的推导	809
第 22 章习题	813
第 22 章参考文献	813
附录 A 数学回顾	816
A.1 三角学	816
A.2 复数	821
A.3 微积分	824
A.4 矩阵代数	835
A.5 概率和统计	856
附录 A 参考文献	868
附录 B 统计表	870
附录 C 部分习题答案	888
附录 D 本书所用的希腊字母与数学符号	907
主题索引	911
译后记	926



到目前为止,我们的分析都局限在平稳过程内。本章介绍建立非平稳时间序列模型的几种方法,并分析不同的非平稳模型的动态性质。后面的章节中研究讨论统计推断的非平稳性结果。

15.1 简介

在第 3 章和第 4 章中,我们讨论了单变量时间序列模型,它可以写成如下形式

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots = \mu + \psi(L)\varepsilon_t, \quad [15.1.1]$$

其中 $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, $\psi(z)=0$ 的根在单位圆之外,且 $\{\varepsilon_t\}$ 是白噪声序列,其均值为零,方差为 σ^2 。这里我们重复一下该过程的两个特征。首先,这一变量的非条件期望是一个常数,且独立于观察的时期:

$$E(y_t) = \mu。$$

其次,当人们试图进一步预测未来的序列时预测 $\hat{y}_{t+s|t} \equiv \hat{E}(y_{t+s} | y_t, y_{t-1}, \cdots)$ 收敛于非条件均值:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{y}_{t+s|t} = \mu。$$

对于实践中遇到的许多经济和金融时间序列而言，这些假设毫无意义。例如，图 15.1 描绘了第二次世界大战后美国名义国民生产总值的水平。毫无疑问，这一序列具有向上的时间趋势，而且此种趋势应当纳入任何对该序列的预测之中。

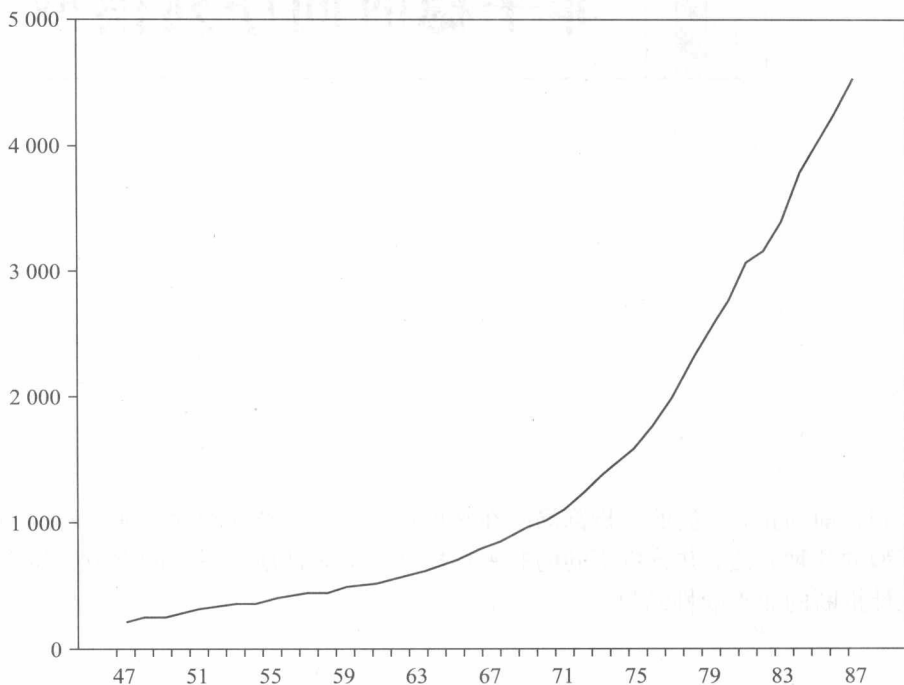


图 15.1 美国名义 GNP, 1947—1987

通常，有两种方法描述这种趋势。第一种包含一个确定性时间趋势：

$$y_t = \alpha + \delta t + \psi(L)\epsilon_t。 \quad [15.1.2]$$

因此，平稳^①过程式 [15.1.1] 的均值 μ 被第 t 期的线性函数所取代。这一过程有时被称为“趋势平稳”，因为如果从式 [15.1.2] 中减去趋势 $\alpha + \delta t$ ，则结果是一个平稳过程。

第二种方法是一个单位根过程，

$$(1-L)y_t = \delta + \psi(L)\epsilon_t, \quad [15.1.3]$$

其中 $\psi(1) \neq 0$ 。对于一个单位根过程而言，形如式 [15.1.1] 的平稳形式描述了

① 回忆一下，这里的“平稳”指的是“协方差平稳”。

序列的变化。我们很快就会知道原因，用 δ 而非 μ 表示 $(1-L)y_t$ 的均值。

由于一阶差分算子 $(1-L)$ 将频繁出现，我们用一个特殊符号（希腊字母 Δ ）来表示它：

$$\Delta y_t \equiv y_t - y_{t-1}.$$

令式 [15.1.3] 中的 $\psi(L)$ 等于 1 可以得到一个单位根过程的典型例子：

$$y_t = y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t. \quad [15.1.4]$$

该过程称为含漂移 δ 的随机游走。

在式 [15.1.3] 对于单位根过程的定义中，假定 $\psi(1)$ 不为零，其中 $\psi(L)$ 表示多项式

$$\psi(z) = 1 + \psi_1 z^1 + \psi_2 z^2 + \dots$$

在 $z=1$ 处的值。为了弄清楚为什么这样一个约束必须是单位根过程定义的一部分，假定原始序列 y_t 实际上以

$$y_t = \mu + \chi(L)\varepsilon_t$$

的平稳形式表示。对这一平稳过程求差分，结果为

$$(1-L)y_t = (1-L)\chi(L)\varepsilon_t \equiv \psi(L)\varepsilon_t,$$

其中 $\psi(L) \equiv (1-L)\chi(L)$ 。这种表示方法形如式 [15.1.3]——若原始序列 y_t 是平稳的，则 Δy_t 同样平稳。然而，表示 Δy_t 特征的移动平均算子 $\psi(L)$ 具有如下性质： $\psi(1) = (1-1) \cdot \chi(1) = 0$ 。当我们规定式 [15.1.3] 中 $\psi(1) \neq 0$ 时，就因此排除了原始序列 y_t 平稳的可能性。

有时，单位根过程式 [15.1.3] 的一个略微不同的表示有助于简化分析。考虑如下设定：

$$y_t = \alpha + \delta t + u_t, \quad [15.1.5]$$

其中 u_t 服从一个零均值 AMRA 过程：

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) u_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t \quad [15.1.6]$$

且式中的移动平均算子 $(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)$ 可逆。假定将式 [15.1.6] 中的自回归算子分解为方程 [2.4.3] 中的形式：

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L).$$

如果所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 都在单位圆内，那么式 [15.1.6] 可表示为

$$u_t = \frac{1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q}{(1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \dots (1 - \lambda_p L)} \varepsilon_t \equiv \psi(L)\varepsilon_t,$$

其中 $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, 且 $\phi(z)=0$ 的根在单位圆之外。因此, 当对于所有的 i 都有 $|\lambda_i| < 1$ 时, 过程式 [15.1.5] 可看成是趋势平稳过程式 [15.1.2] 的一个特例。

假定 $|\lambda_i| < 1$ 且对 $i=2, 3, \dots, p$, 有 $\lambda_1=1$ 。那么式 [15.1.6] 可变为

$$(1-L)(1-\lambda_2L)(1-\lambda_3L)\cdots(1-\lambda_pL)u_t = (1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q)\varepsilon_t, \quad [15.1.7]$$

它意味着

$$(1-L)u_t = \frac{1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q}{(1-\lambda_2L)(1-\lambda_3L)\cdots(1-\lambda_pL)}\varepsilon_t \equiv \psi^*(L)\varepsilon_t,$$

其中 $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j^*| < \infty$, 且 $\psi^*(z)=0$ 的根在单位圆之外。因此, 若对式 [15.1.5] 求一阶差分, 则结果为

$$(1-L)y_t = (1-L)\alpha + [\delta t - \delta(t-1)] + (1-L)u_t = 0 + \delta + \psi^*(L)\varepsilon_t,$$

这就是单位根过程式 [15.1.3] 的形式。

式 [15.1.5] 中的表示解释了术语“单位根过程”的作用。式 [15.1.6] 中自回归多项式的根或特征值 (λ_1) 等于 1, 其他所有特征值都在单位圆内。

另一种可能用到的表达式为过程式 [15.1.3] 是一阶单整。这意味着 $y_t \sim I(1)$ 。术语“单整”来自微积分: 若 $dy/dt=x$, 则 y 是 x 的积分。在离散时间序列中, 若 $\Delta y_t = x_t$, 则 y 也可看成是 x 的积分或 x 在 t 上的和。

如果形如式 [15.1.5] 和式 [15.1.6] 的一个过程的两个特征值 λ_1 和 λ_2 都等于 1, 且其他特征值都在单位圆内, 那么在得到一个平稳时间过程前, 应对这个数据求二阶差分:

$$(1-L)^2 y_t = \kappa + \psi(L)\varepsilon_t.$$

这样一个过程称为二阶单整, 记作 $y_t \sim I(2)$ 。

把形如式 [15.1.5] 和式 [15.1.6] 的一般过程称为自回归积分的移动平均过程, 用 $ARIMA(p, d, q)$ 表示。第一个参数 (p) 指自回归滞后的数量 (不算单位根), 第二个参数 (d) 指单整阶数, 第三个参数 (q) 给出了移动平均滞后值的数量。对 $ARIMA(p, d, q)$ 求 d 阶差分即可得到一个平稳的 $ARMA(p, q)$ 过程。

15.2 为什么考虑线性时间趋势和单位根?

人们可能会疑惑, 为什么在趋势平稳设定式 [15.1.2] 中, 该趋势被指定为关于时间的线性函数 (δt) 而不是二次函数 ($\delta t + \gamma t^2$) 或指数函数 ($e^{\alpha t}$)。的确,

如同许多经济和金融时间序列一般,指数趋势比线性趋势能更好地描述图 15.1 中的 GNP 序列的特征。指数序列表示常数按比例增长,这就是说,若

$$y_t = e^{\delta t}, \quad [15.2.1]$$

则 $dy/dt = \delta \cdot y_t$ 。如果新生儿占现有人口的比例为常数,那么人口将会呈现比例增长。如果政府试图通过发行货币得到固定水平的真实收入,那么价格将会呈现比例增长(或常数通货膨胀)。这些事例往往是初步考虑时间趋势的一个很有吸引力的起点,并且图 15.1 中序列的直观表现通常证实了这种指数增长。正因为如此,许多经济学家简单地假设增长是指数形式的。

请注意,如果我们取指数趋势式 [15.2.1] 的自然对数,则结果是一个线性趋势,

$$\log(y_t) = \delta t.$$

因此,在使用模型式 [15.1.2] 描述数据前,我们通常取数据的对数。

以此类推,应用式 [15.1.3] 之前同样取其自然对数。这一小小的变化可以使变量对数的一阶差分近似于变量的百分比变化:

$$\begin{aligned} (1-L)\log(y_t) &= \log(y_t/y_{t-1}) \\ &= \log\{1 + [(y_t - y_{t-1})/y_{t-1}]\} \\ &\cong (y_t - y_{t-1})/y_{t-1}, \end{aligned}$$

我们已经使用了当 x 趋近于 0, 则 $\log(1+x) \cong x$ 这一事实。^① 因此,若指定变量的对数服从一个单位根过程,则可以假设该序列的增长率是一个平稳随机过程。在应用式 [15.1.2] 前取其对数的理由同样也适用于在应用式 [15.1.3] 前取其对数。

如果将 $\log(y_t)$ 乘以 100, 那么单位的使用将更加方便。这种变化可以直接用百分比变化表示。例如,若 $(1-L)[100 \times \log(y_t)] = 1.0$, 则 y_t 比 y_{t-1} 高 1%。

15.3 趋势平稳和单位根过程的比较

本节中,我们从对时间序列的预测、预测误差的方差、动态乘子和达到平稳所需的变形方面比较了趋势平稳过程式 [15.1.2] 和单位根过程式 [15.1.3]。

□ 预测的比较

要对趋势平稳过程式 [15.1.2] 进行预测,可以将已知确定项 $(\alpha + \delta t)$ 简单

^① 见本书后的数学回顾(附录 A)中的结果式 [A.3.36]。

地加入平稳随机项的预测中

$$\hat{y}_{t+s|t} = \alpha + \delta(t+s) + \psi_s \epsilon_t + \psi_{s+1} \epsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \epsilon_{t-2} + \dots \quad [15.3.1]$$

此处, $\hat{y}_{t+s|t}$ 表示 y_{t+s} 在常数和 y_t, y_{t-1}, \dots 上的线性投影。值得注意的是, 对于非平稳过程而言, 我们将遵循惯例, 允许线性投影中的“常数”项, 即本例中的 $\alpha + \delta(t+s)$, 在每个 $t+s$ 期可以不同。当预测水平 (s) 增大时, $\{\psi_j\}$ 的绝对可加意味着该预测依均方收敛于时间序列

$$E[\hat{y}_{t+s|t} - \alpha - \delta(t+s)]^2 \rightarrow 0, s \rightarrow \infty。$$

要对单位根过程式 [15.1.3] 进行预测, 变化量 Δy_t 是一个平稳过程, 它可用标准公式预测

$$\begin{aligned} \Delta \hat{y}_{t+s|t} &\equiv \hat{E}[(y_{t+s} - y_{t+s-1}) | y_t, y_{t-1}, \dots] \\ &= \delta + \psi_s \epsilon_t + \psi_{s+1} \epsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \epsilon_{t-2} + \dots \end{aligned} \quad [15.3.2]$$

该变量在第 $t+s$ 期的水平是 t 期和 $t+s$ 期之间的变化量的简单加总

$$\begin{aligned} y_{t+s} &= (y_{t+s} - y_{t+s-1}) + (y_{t+s-1} - y_{t+s-2}) + \dots + (y_{t+1} - y_t) + y_t \\ &= \Delta y_{t+s} + \Delta y_{t+s-1} + \dots + \Delta y_{t+1} + y_t \end{aligned} \quad [15.3.3]$$

取式 [15.3.3] 在一个常数项和 y_t, y_{t-1}, \dots 上的线性投影, 并代入式 [15.3.2], 有

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+s|t} &= \Delta \hat{y}_{t+s|t} + \Delta \hat{y}_{t+s-1|t} + \dots + \Delta \hat{y}_{t+1|t} + y_t \\ &= \{\delta + \psi_s \epsilon_t + \psi_{s+1} \epsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \epsilon_{t-2} + \dots\} \\ &\quad + \{\delta + \psi_{s-1} \epsilon_t + \psi_s \epsilon_{t-1} + \psi_{s+1} \epsilon_{t-2} + \dots\} \\ &\quad + \dots + \{\delta + \psi_1 \epsilon_t + \psi_2 \epsilon_{t-1} + \psi_3 \epsilon_{t-2} + \dots\} + y_t \end{aligned}$$

或

$$\hat{y}_{t+s|t} = s\delta + y_t + (\psi_s + \psi_{s-1} + \dots + \psi_1) \epsilon_t + (\psi_{s+1} + \psi_s + \dots + \psi_2) \epsilon_{t-1} + \dots \quad [15.3.4]$$

我们可以分析一些特殊情况, 以便进一步了解单位根过程的预测。首先考虑含漂移的随机游走式 [15.1.4], 其中 $\psi_1 = \psi_2 = \dots = 0$ 。那么式 [15.3.4] 变为

$$\hat{y}_{t+s|t} = s\delta + y_t。$$

我们预期, 不论一个漂移为 δ 的随机游走的当前值 y_t 是多少, 它每期都以固定速度 δ 恒定增长。

接下来, 考虑一个 $ARIMA(0, 1, 1)$ 设定 ($\psi_1 = \theta, \psi_2 = \psi_3 = \dots = 0$)。那么

$$\hat{y}_{t+s|t} = s\delta + y_t + \theta \epsilon_t \quad [15.3.5]$$

在此, 序列 y_t 的当前水平与当前新息 ϵ_t 再次共同定义了一个基础, 其中变量预期按固定速度 δ 增长。注意, ϵ_t 是前一期的预测误差

$$\epsilon_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}。$$

对于 $\delta=0$ 和 $s=1$, 式 [15.3.5] 有

$$\hat{y}_{t+1|t} = y_t + \theta(y_t - \hat{y}_{t|t-1}) \quad [15.3.6]$$

或

$$\hat{y}_{t+1|t} = (1+\theta)y_t - \theta\hat{y}_{t|t-1}. \quad [15.3.7]$$

方程 [15.3.7] 使用了简单一阶差分方程的形式, 使得 $\hat{y}_{t+1|t}$ 与其本身的滞后值和输入变量 $(1+\theta)y_t$ 相关。给定条件 $|\theta| < 1$, 我们可以用结果式 [2.2.9] 将式 [15.3.7] 改写成

$$\begin{aligned} \hat{y}_{t+1|t} &= [(1+\theta)y_t] + (-\theta)[(1+\theta)y_{t-1}] \\ &\quad + (-\theta)^2[(1+\theta)y_{t-2}] + (-\theta)^3[(1+\theta)y_{t-3}] + \cdots \\ &= (1+\theta) \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j y_{t-j}. \end{aligned} \quad [15.3.8]$$

人们有时把式 [15.3.7] 称为适应性预期, 且它的含义式 [15.3.8] 称为指数平滑; 典型应用假设 $-1 < \theta < 0$ 。令 y_t 表示收入, Friedman (1957) 用指数平滑法构造了其持久收入测度。Muth (1960) 注意到, 当且仅当 y_t 服从 $ARIMA(0, 1, 1)$ 过程, 并且选择的平滑权重 $(-\theta)$ 等于差分后数据的移动平均系数 (θ) 的相反数时, 适应性预期或指数平滑法才对应于对未来收入的理性预测。

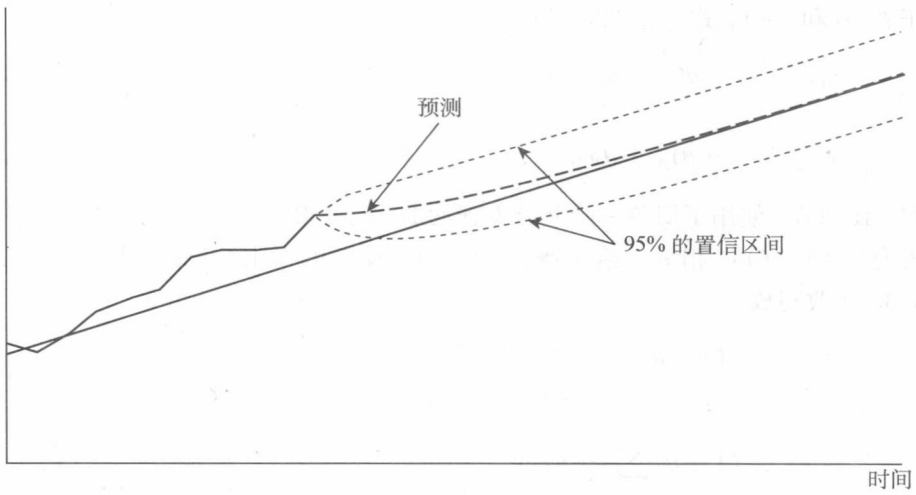
对于一个 $ARIMA(0, 1, q)$ 过程而言, y_t 的值和 ϵ_t 的 q 个最近的值会影响预测 $\hat{y}_{t+1|t}$, $\hat{y}_{t+2|t}$, \cdots , $\hat{y}_{t+q|t}$, 但我们预期此后这个序列将以 δ 的速度增长。对一个 $ARIMA(p, 1, q)$ 而言, 预测增长率渐近地接近 δ 。

因此, 单位根过程式 [15.1.3] 中的参数 δ 扮演了类似于确定时间趋势式 [15.1.2] 中的 δ 的角色。不论采用哪种设定, 式 [15.3.1] 或式 [15.3.4] 中的预测值 $\hat{y}_{t+s|t}$ 收敛于预测水平为 s 、斜率为 δ 的线性函数; 见图 15.2。关键的差别在于直线的截距。对于趋势平稳过程而言, 预测值收敛于一条截距不随 y_t 的值变化的线。相反, 单位根过程的极限预测值的截距随 y_t 的每个新观察值连续变化。

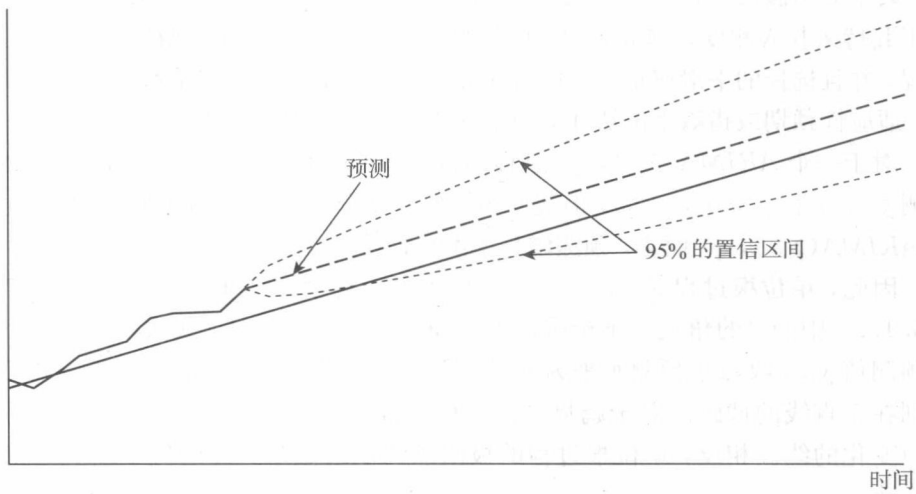
□ 预测误差的比较

趋势平稳和单位根设定在预测误差的方差的含义上也不尽相同。对趋势平稳过程式 [15.1.2] 而言, 前 s 期预测误差是

$$\begin{aligned} y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t} &= \{\alpha + \delta(t+s) + \epsilon_{t+s} + \psi_1 \epsilon_{t+s-1} + \psi_2 \epsilon_{t+s-2} + \cdots \\ &\quad + \psi_{s-1} \epsilon_{t+1} + \psi_s \epsilon_t + \psi_{s+1} \epsilon_{t-1} + \cdots\} \\ &\quad - \{\alpha + \delta(t+s) + \psi_s \epsilon_t + \psi_{s+1} \epsilon_{t-1} + \psi_{s+2} \epsilon_{t-2} + \cdots\} \\ &= \epsilon_{t+s} + \psi_1 \epsilon_{t+s-1} + \psi_2 \epsilon_{t+s-2} + \cdots + \psi_{s-1} \epsilon_{t+1}. \end{aligned}$$



(a) 趋势平稳过程



(b) 单位根过程

图 15.2 预测和 95% 的置信区间

该预测的均方误差(MSE)为

$$E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = \{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{s-1}^2\} \sigma^2.$$

MSE 随预测水平 s 增长, 而随着 s 增大, 未来预测不确定性的增加将变得无关紧要:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = \{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots\} \sigma^2.$$

注意, 极限 MSE 恰为平稳项 $\psi(L)\epsilon_t$ 的无条件方差。

比较而言, 对于单位根过程式 [15.1.3], 前 s 期的预测误差是

$$\begin{aligned} y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t} &= \{\Delta y_{t+s} + \Delta y_{t+s-1} + \cdots + \Delta y_{t+1} + y_t\} \\ &\quad - \{\Delta \hat{y}_{t+s|t} + \Delta \hat{y}_{t+s-1|t} + \cdots + \Delta \hat{y}_{t+1|t} + y_t\} \\ &= \{\epsilon_{t+s} + \phi_1 \epsilon_{t+s-1} + \cdots + \phi_{s-1} \epsilon_{t+1}\} \\ &\quad + \{\epsilon_{t+s-1} + \phi_1 \epsilon_{t+s-2} + \cdots + \phi_{s-2} \epsilon_{t+1}\} + \cdots + \{\epsilon_{t+1}\} \\ &= \epsilon_{t+s} + \{1 + \phi_1\} \epsilon_{t+s-1} + \{1 + \phi_1 + \phi_2\} \epsilon_{t+s-2} + \cdots \\ &\quad + \{1 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{s-1}\} \epsilon_{t+1}, \end{aligned}$$

且其 MSE 为

$$\begin{aligned} E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 &= \{1 + (1 + \phi_1)^2 + (1 + \phi_1 + \phi_2)^2 + \cdots \\ &\quad + (1 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{s-1})^2\} \sigma^2. \end{aligned}$$

MSE 再次随着预测水平 s 而增长, 但与趋势平稳的情况不同, 当 s 趋向无穷时, MSE 不收敛于任何固定值。它渐近趋于 s 的一个斜率为 $(1 + \phi_1 + \phi_2 + \cdots)^2 \sigma^2$ 的线性函数。例如, 对 $ARIMA(0, 1, 1)$ 过程而言,

$$E[y_{t+s} - \hat{y}_{t+s|t}]^2 = \{1 + (s-1)(1+\theta)^2\} \sigma^2. \quad [15.3.9]$$

总结如下, 对于趋势平稳过程, 随着预测水平扩大, MSE 会达到一个有限界, 而对于单位根过程而言, MSE 最终会随着预测水平 s 线性增长。图 15.2 中再次说明了这一结论。

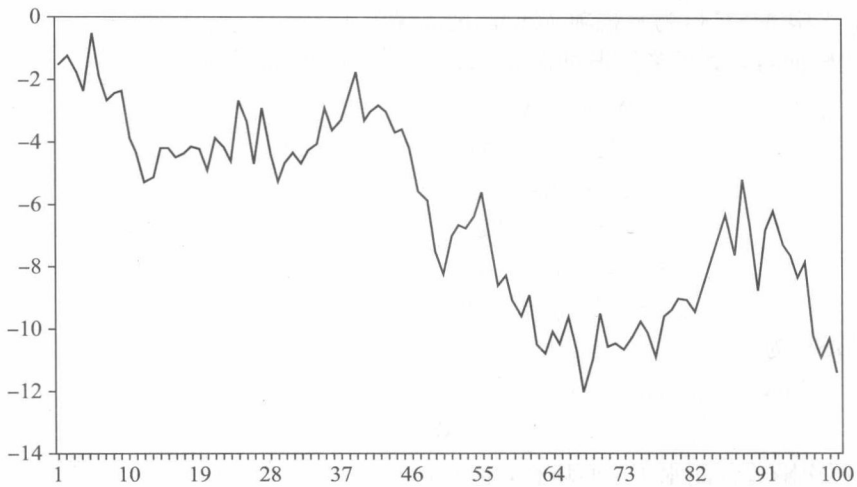
注意, 由于 MSE 随着预测水平 s 线性增长, 预测误差的标准差将随 s 的平方根增长。另一方面, 如果 $\delta > 0$, 那么预测本身随 s 线性增长。因此, y_{t+s} 的 95% 的置信区间比序列水平扩展得慢, 这表明如果观察期间足够长, 那么由一个漂移为正的 单位根过程得到的数据必定表现出向上趋势。从这个意义上来说, 由非零漂移 δ 产生的趋势渐近主导了由单位根项引起的随时间推移产生的增长变化率。这一结论对理解第 17 章和第 18 章内描述的渐近统计结果非常重要。

图 15.3 描绘了一个含或不含漂移的高斯随机游走的实现。图 (a) 中的不含漂移的随机游走并未显示回归初始值或任意非条件均值的趋势。图 (b) 中描绘的含漂移的随机游走没有表现出回归固定的确定性趋势线的趋势, 但该序列渐近地由正漂移项主导。

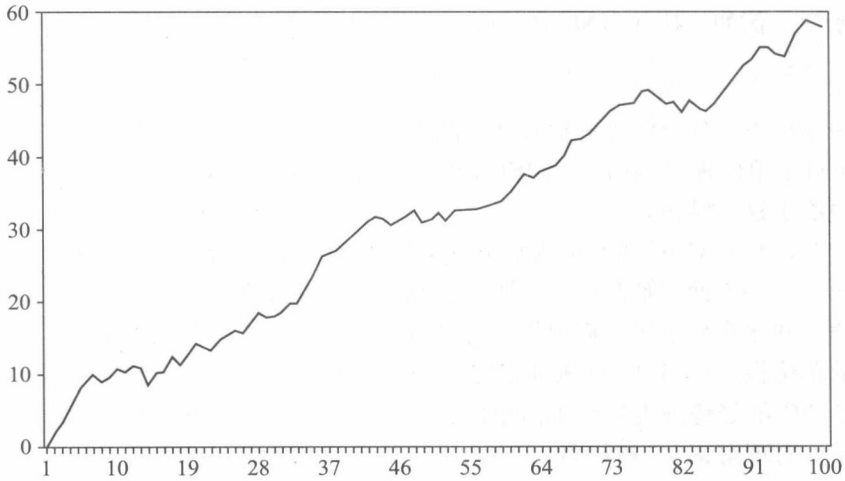
□ 动态乘子的比较

趋势平稳和单位根过程的另一个差别在于新息的持续性。考虑如果 ϵ_t 增加一个单位, 而其他各期的 ϵ 不变时对 y_{t+s} 产生的影响。对于趋势平稳过程式 [15.1.2] 而言, 这个动态乘子为

$$\frac{\partial y_{t+s}}{\partial \epsilon_t} = \psi_s.$$



(a) 不含漂移的随机游走



(b) 含漂移的随机游走

图 15.3 高斯单位根过程中的样本实现

因此，对趋势平稳过程来说，任意随机扰动的影响最终都会消失：

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial y_{t+s}}{\partial \epsilon_t} = 0。$$

相对地，就单位根过程而言，从式 [15.3.4] 中可以看出，对 y_{t+s} 的影响为^①

① 当然，这一点与描述 ϵ_t 对介于 y_{t+s} 和 y_{t+s-1} 之间的变化量的影响的乘子不同，为

$$\frac{\partial \Delta y_{t+s}}{\partial \epsilon_t} = \psi_s。$$