浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

修波（shearlet）的理论及应用

邱继征 著

科学出版社

浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

修波(shearlet)的理论及应用

邸继征 著

浙江省级重点学科应用数学建设基金资助
浙江省信号处理重点实验室建设基金资助
浙江工业大学专著与研究生教材项目基金资助
浙江工业大学重点教材建设基金资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍修波（shearlet）的基本理论及应用. 全书共6章, 先介绍框架, 包括一元小波框架和修波框架, 在此基础上讲述修波的构造和应用, 其核心内容是最新的有关修波的研究成果. 本书概念清晰, 推理严密, 论证细致, 对每部分内容, 都展示是什么, 为什么和怎么做的全过程, 并将基础和应用并重的教育理念融入其中.

本书不要求读者具有高深的数学基础, 可供研究修波和希望了解修波基本内容的人士参考, 也可作为大学数学和应用数学专业、信息与计算科学专业和信息类、软件类高年级本科生与研究生的教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

修波(shearlet)的理论及应用/邸继征著. —北京：科学出版社, 2014.12
(浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书)
ISBN 978-7-03-042792-2

Ⅰ. ①修… Ⅱ. ①邸… Ⅲ. ①小波理论 Ⅳ. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 291654 号

责任编辑：胡海霞 石 悦／责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨／封面设计：华路天然设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2014 年 12 月第一次印刷 印张：15 7/8
字数：320 000

定价：59.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书”编委会

总　序

近年来, 关于数学的各种新观点不断出现.

一种观点认为：随着数学的发展, 数学已经从自然科学中分离出来, 成为独立的科学门类 —— 数学科学.

持这种观点的学者的依据是：①从现代数学的发展情况可以看出, 数学的许多内容和方法的产生, 不再是基于研究自然界中存在的物质运动规律的需要, 而是基于数学自身的需要. 例如, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5=3+7, 等等, 即每一个大于等于 6 的偶数都可以表示为两个奇素数的和, 这就是哥德巴赫猜想, 至今还没有证明. 但是, 这样一个在数学中显得十分重要的著名的猜想, 其结果的对与否, 不会对数学之外的任何学科产生影响, 证明它不是自然科学的需要, 而仅仅是数学科学的需要. ②数学不仅具有应用功能, 而且具有其他学科不能比拟的文化教育功能. 数学的应用功能表现在：没有数学, 现代科技无从谈起；任何一种学科, 只有应用了数学, 才能成为科学学科. 数学的教育功能表现在：在中国, 语数外被认为是初等教育中最重要的三门课程; 在世界范围内, 有不学中文的学生, 有不学英语的学生, 但没有不学数学的学生.

我同意这种观点, 希望在数学教学改革和科学研究中体现这种观点.

数学教学改革, 首先需要的是教材的改革, 而教材的改革, 涉及的只有两个方面, 一是内容, 二是方法.

如何在一本数学教材中以数学科学的观点选取内容, 介绍方法?

我们的认识是：无论选取内容方面, 还是介绍方法方面, 都要关注数学的应用功能和教育功能的展现.

在内容的选取方面, 既不是不管数学的教育功能, 狭隘地全部以目前生产生活的实际应用为目的, 打乱系统, 什么“有用”就选什么, 什么“没用”就跳过什么, 也不是完全从数学的需要出发, 一点也不考虑所选取的内容和实际应用的联系. 本套丛书采取有实际应用背景的内容优先选取的原则. 我们的考虑是：没有迹象表明, 没有实际应用背景的内容在体现数学的教育功能时强于有实际应用背景的内容, 既然如此, 后者更有利于同时展现数学的应用功能和教育功能.

在方法的介绍方面, 既不完全采用公理化体系的做法, 让读者在接受严格数学训练的基础上自然地受到数学科学的熏陶；也不完全摈弃数学特有的推理过程, 以急功近利的方式只讲结果, 只讲计算公式. 我们知道, 公理化体系的做法是将数学的训练目的不直接说出来, 而是藏起来, 藏在严密的过程背后, 让学生不知不觉得

到严格的数学训练. 这种体系在介绍内容时, 不交代前因后果, 一上来就是莫名其妙的定义、公理, 然后一步步以极其严密的方式展开讨论. 这种做法在知识门类相对少的过去是有效的, 但在知识爆炸、课程门类不断增加、学生同时要有做学问和实际应用两手准备的现在, 没有时间这样做. 训练要有, 但训练目的不是藏起来, 而是尽可能直接讲出来. 例如, 数学书籍中一定会用到归纳法、演绎法、反证法, 这些方法不是数学特有的, 但可以被数学最为有效地传授给学生, 这一事实恰好可以说明数学的教育功能的强大. 但是, 如果我们去问一下数学系的毕业生什么是演绎法, 恐怕很少有人能说周全, 究其原因, 是我们的教材没有明确地告诉学生演绎法的基本内容和过程. 本套丛书将致力于改变这种状况.

本套丛书注意到: 根据课程和授课对象的不同, 数学的应用功能和教育功能的展现需分层次, 两种功能的展现要有机配合. 例如, 有的数学分支本来就属应用数学, 对这样的课程, 在选取内容和介绍方法时必须首先保证应用方面的需要, 其次才考虑教育功能的融入; 有的授课对象是文科学生, 对这些学生, 在编写教材时就要充分注意他们的基础、兴趣、思维方式和希望通过数学的学习要达到的目的, 因此要首先考虑数学的教育功能, 其次才考虑应用功能的融入.

现代化的标志是数字化, 也就是要在所有的领域尽最大可能地使用计算机技术, 因此, 在数学教学中, 对数字化的配合和适应是必需的. 这样, 为了展现数学的应用功能, 在数学教学的每个环节, 都应该关注计算机技术, 包括有意考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题. 我们知道, 介绍如何应用数学软件的最好环境, 当为相应的数学课程. 因此, 本套丛书中的教材, 特别注意介绍与主要内容配套的软件的应用, 例如, 介绍相应的 MATLAB 软件包的使用.

科学研究成果整理成学术著作, 可以总结和条理化研究问题, 这对于传播研究成果、深化研究工作是有利的, 这些著作还可以作为研究生教材使用.

本套丛书中学术著作的撰写, 遵循了如下的原则:

首先, 作为介绍学术成果的学术著作要有新内容、新观点, 学术系统应是明显的, 不是杂乱的、拼凑的, 特别是著作中作者的成果应有重要的分量.

其次, 本套丛书中的学术著作特别注意内容的系统性、完备性.

再次, 也是最重要的, 本套丛书中的学术著作, 和教材一样注意展现数学的应用功能和教育功能, 在必要时, 还考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题.

最后, 在写作细节上, 本套丛书要求作者以严格的科学态度对待自己的著作, 概念和符号应明确, 推导和介绍要细致, 避免突然出现翻遍全书都找不到介绍的概念和符号, 避免用显然、易知等词语掩盖困难的证明过程.

教学改革涉及的问题很多, 有些问题需要一步步解决, 有的还需要根据形势的

变化调整解决方案. 我们仅做了初步的尝试, 加之水平有限, 本套丛书中的问题一定很多, 迫切希望读者批评指正.

邱继征

2013 年 3 月 8 日

前 言

修波 (shearlet) 理论从小波分析发展而来, 可以说, 修波是一种特殊的多元小波.

小波分析是近年来迅速发展起来的数学分支. 除在数学学科本身中的价值外, 小波分析在许多非数学领域也有广泛的应用.

经典小波分析最核心的内容, 是给出小波特别是紧支集小波 ψ, 由其伸缩平移产生的函数列 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}=\{2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x-k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 成为一元平方可积函数空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基.

小波分析的价值, 在于随着 j,k 的变化, $\psi_{j,k}(x)$ 为"宽度"和"有效部分"位置不同的函数, 在函数 f 的展式中, 取一定位置附近的"宽"函数求和, 就得到了 f 在这个位置的轮廓, 取"窄"函数求和, 就得到了 f 在这个位置的细节, 从而实现对函数的滤波.

本书对小波分析最精华的部分做了介绍.

然而, 正像许多珍贵事物的获得都有高昂代价一样, 这样一套优美的结果, 其代价是 ψ 的构造较为困难, 除了简单的 Haar 小波, ψ 没有表达式, 由此带来的直接问题, 是 $f\in L^2(\mathbf{R})$ 通过 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 展开时, 展开式的系数 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ 的精确值无法得到, 因为内积由积分给出, 对没有表达式的函数, 与其相关的积分无法精确计算. 尽管 Mallat 算法为这些系数的计算提供了重要工具, 但该算法的基础是知道某个层次的系数而计算其余层次的系数, 作为基础的系数计算还是离不开积分, 因而仍然得不到精确值.

为了弥补小波难以构造的缺陷, 双正交小波分析得以建立. 这种分析的核心内容, 是给出两个小波 $\psi,\tilde{\psi}$, 分别由其伸缩平移产生的函数列 $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}=\{2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}x-k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}=\{2^{-\frac{j}{2}}\tilde{\psi}(2^{-j}x-k)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ 交叉正交, 对 $L^2(\mathbf{R})$ 中元 f, 可分别以 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}$ 或 $\langle f,\tilde{\psi}_{j,k}\rangle\psi_{j,k}$ 为项对其进行展开, 也有相应的 Mallat 算法. 尽管从理论上看, 双正交小波分析没有经典小波分析优美, 但双正交小波具有正交小波没有的优点, 例如, $\psi,\tilde{\psi}$ 构造相对容易, 可以有表达式, 还可以根据要求进行构造, 例如, 可以通过样条函数构造对称或反对称双正交小波. 特别地, 以 $\langle f,\psi_{j,k}\rangle\tilde{\psi}_{j,k}$ 为项对 f 进行展开的方式得到函数利用框架进行展开的借鉴, 显示了它的价值.

本书介绍双正交小波的基本内容.

经典小波分析的另一个重要问题是不能构造真正意义上的多元正交小波. 利用经典的一元小波, 可以构造张量积形式的多元正交小波. 这种小波不是真正意义上

的多元正交小波, 这是因为通过张量积构造的这些小波是可分离变量函数, 在二元情形, 即形如 $\psi(x,y)=\psi_1(x)\psi_2(y)$ 的函数, 亦即由一元函数凑起来的多元函数, 不是"真正的"多元函数. 这类函数缺少所谓各向异性的特点, 以其作伸缩平移构成的序列对多元函数进行展开, 不能灵活反映函数在各个方向上的变化规律.

本书介绍二元张量积小波.

除了张量积小波, 多元正交小波至今没有找到.

鉴于小波的缺陷, 人们致力于对小波框架的研究. 小波框架与一般框架的区别, 在于其与小波基一样, 由一个或几个小波生成. 小波框架理论与经典小波分析的区别, 在于前者研究的是一种框架而不一定是基, 尤其对函数进行展开时, 只能保证在弱收敛的意义下展开, 而不是在范数意义下展开, 后者研究的是小波基而收敛是在范数意义下. 正因为框架比基的要求简单, 弱收敛比按范数收敛要求低, 所以, 构造小波框架中的小波, 比构造小波分析中的小波要容易得多, 很有希望构造出具有表达式的小波和具有各向异性特点的多元小波.

本书对框架理论, 特别是小波框架和修波框架, 作了较为详细的介绍.

修波正是应这种要求构造的一种特殊的多元小波.

修波的英文单词为 shearlet, 意为修剪小波. 正如小波有经典模式一样, 狭义的修波也有一个具代表性的模式, 该修波针对 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 给出, 其显著特点是: 在 $\mathbf{R}^2$ 中引入伪极坐标, 以此为基础给出频域 $\mathbf{R}^2$ 的一个特殊分割, 通过两个或三个辅助函数 u,v 或 u,v,w, 构造 $\hat{\psi}$, 通过 Fourier 逆变换得 ψ, 再由伸缩、转向与平移相结合的线性变换得 ψ_{jlk}. 基本目标是寻找赋予 ψ 的条件, 使 $\{\psi_{jlk}\}_{(j,l)\in\Delta,k\in\mathbf{Z}^2}$ 为 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 的框架.

为什么从赋予 $\hat{\psi}$ 的条件出发, 而不是直接从赋予 ψ 的条件出发呢?

这样做的主要原因如下:

构造框架 $\{\psi_{jlk}\}_{(j,l)\in\Delta,k\in\mathbf{Z}^2}$ 的目的, 是在一定意义下, 将任意 $f\in L^2(\mathbf{R}^2)$ 展为伸缩、转向和平移情况不同的函数之和, 即

$$f=\sum_{(j,l)\in\Delta}\sum_{k\in\mathbf{Z}^2}\langle f,\psi_{jlk}\rangle\psi_{jlk},$$

因为 j 与伸缩相关, l 与转向相关, k 与平移相关, 随着这些指标的变化, 与 ψ 相比, ψ_{jlk} 的图形发生不同程度的伸缩、转向和平移. ψ_{jlk} 图形的变化情况除了与这三个指标相关外, 还决定于 ψ 的形状, 而 $\hat{\psi}(\omega)$ 中的自变量 ω 是"频率", $|\hat{\psi}(\omega)|$ 是频谱, 其大小反映对应的 ω 的重要程度, 如果对某个范数大的 ω, $|\hat{\psi}(\omega)|$ 较大, 则波 ψ 以大频率跳动的特征就明显, 把握 $|\hat{\psi}(\omega)|$, 就可以把握 ψ 的变化情况. 通过 $\boldsymbol{B}(l)\boldsymbol{A}^j\cdot-\boldsymbol{C}\boldsymbol{k}$ 变换, ψ_{jlk} 伸缩、转向和平移, 可以成为不同方向上、位置处的高频或低频函数. 若在一定条件下 $f=\sum\limits_{(j,l)\in\Delta}\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^2}\langle f,\psi_{jlk}\rangle\psi_{jlk}$, 选取 $\langle f,\psi_{jlk}\rangle\psi_{jlk}$ 求和, 则可获得 f 的各种

所需的成分, 如某个方向的轮廓、细节, 实现对 f 的消噪、滤波等操作.

修波特别是狭义修波的基本理论和构造, 是本书的主要内容.

小波分析被认为是具有良好应用价值的数学分支, 而从多元小波发展而来, 甚至可以称为特殊多元小波的修波, 更是从应用的方便和有效度起步进行研究的. 那么, 如何展示修波的应用呢? 是不是寻找一些实际问题, 从分析机理, 确定数量关系并建模起, 直到应用修波进行处理, 最后编程计算给出结果, 才算展示了修波的应用? 我们认为不然. 寻找问题与数学的联系, 这一解决问题的首要步骤不是数学工作者的任务, 而是那些直接面对实际问题人士的任务, 这是因为一般来说, 由于从事研究的学科不同, 数学工作者不能深入所有学科和所有问题, 即使问题呈现在面前. 由于不懂问题的机理, 从中发现数学问题也是困难的. 数学工作者的任务, 是在别人把实际问题中发现的数学呈现在面前以后, 用数学方法解决这个数学问题. 所以, 以研究数学的应用为目的的内容, 出发点也不是所要解决的实际问题, 而应该是已经以数字形式表示的内容. 正如要吃到食物, 需要很多环节, 较早的环节, 可以追溯到种粮种菜养牛放羊, 直到买粮买菜、煮饭炒菜, 最后端上饭桌. 那么, 哪些是厨师的本职工作呢? 是种粮吗? 不是, 厨师的工作, 应该从食材进入厨房开始, 甚至最后将食物端上桌, 也不是厨师的工作, 那是服务员的工作.

运用小波或本书介绍的修波解决实际问题, 出发点正是由问题确定的函数, 出发点再向前一点, 至多是实验得到的抽样值数据.

小波或修波接下来的任务是通过进一步处理这些数值或函数, 达到滤波的目的, 形象一点说, 是达到提取轮廓或细节的目的. 按理, 这样做的路线是: 利用小波或修波理论, 通过计算得到所需结果. 然而, 这些计算的困难程度之大, 已达到无法完成的程度. 所以, 要将修波应用于实际, 必须研究计算问题. 更明确地说, 其应用研究, 就是实用的修波计算方法研究.

理论结果中也有计算公式, 应用计算数学的方法, 可以直接对这些公式进行近似计算. 于是, 针对同一问题, 可能出现三个关于计算的事物: 理论结果中的计算公式. 应用计算数学方法直接对这些公式进行的近似计算; 实用的计算方法. 关于三者的关系与价值, 应该注意到: 理论结果中的计算公式, 一般无法直接应用于实际问题的解决; 计算数学方法得到的计算公式, 必须附有误差估计, 在建立这样的公式时, 特别关注计算精度, 但常常不关注实用性, 这种公式不受应用人士的喜欢; 实用的计算公式根据理论结果或其中的计算公式得到, 对于这种计算公式, 强调应用效率, 不进行误差讨论. 例如, 离散 Fourier 变换的应用、小波分析中的 Mallat 算法、抽样值算法, 没有人去研究应用离散 Fourier 变换解决实际问题时的误差有多大, 这种公式最显著的特点, 是深受数学专业以外人士的欢迎.

修波的应用研究, 就是实用的修波计算方法研究. 甚至最后编程计算, 都不算修波应用研究的范围.

基于这样的考虑, 本书介绍修波的应用.

在写作方式上, 本书呈现如下特点:

(1) 本书选取修波的基本内容进行讨论. 目前, 修波的研究还在起步阶段, 形象一点说, 还在浪花飞溅时期, 未到大浪淘沙阶段, 各种关于修波的材料内容差别很大, 这为本书的内容选取带来困难, 搞得不好, 就会出现杂乱无章的现象. 好在和其他许多事物一样, 修波最初的原理和方法能够反映其本质, 是需要特别重视的. 本书选取的就是这样的内容.

(2) 本书在介绍内容时, 特别注意其来龙去脉和相互关系, 在介绍修波基本理论和应用的同时, 关注数学方法的介绍和数学教育功能的融入. 不像一些数学书籍, 一开篇便出现不知背景的定义, 使初学者完全不知道下面是要讲什么, 本书希望其内容除了数学工作者能看懂, 非数学专业人士也能看懂, 这就需要给人介绍一些故事而不仅仅是条文, 语言也应灵活一点. 此外, 数学除了有应用价值外, 还具有其他学科无法比拟的方法教育功能, 在介绍内容的同时说明方法与关系, 可以充分展现这种教育功能. 本书的这一方向性选择, 也是基础、应用和教育并重教育理念的实践, 希望取得良好效果.

(3) 本书遵循要不就不讲, 要讲就讲透的原则, 凡是给出的证明, 过程都十分细致, 避免用显然、易知等词语掩盖实际上困难的证明.

(4) 为了使修波易于被不同专业人士学习和接受, 全书在讲授方式上避开繁难的数学基础, 希望具有高等数学基础的读者都可无障碍通读全书. 如此, 本书中的证明过程细致是真, 但决不算严格. 例如, 积分与极限过程交换次序需要条件, 不是随便可以进行的, 但本书对此未加讨论, 直接进行交换.

(5) 本书第 4 章 ~ 第 6 章都有编者的见解与研究成果.

感谢浙江省重点学科应用数学和浙江省信号处理重点实验室提供资助, 感谢浙江工业大学研究生院、教务处和理学院的资助与帮助, 感谢科学出版社编辑石悦、胡海霞的大力帮助. 本书内容曾为浙江工业大学理学院等院系的四届研究生讲授, 研究生石智慧、宋丛威、梁静、冯成祥、胡新琰、殷燕妮、汪雪芬、柴金良、康瑞芳提出过宝贵的意见, 特别地, 康瑞芳认真校对了本书, 提出了许多具体的修改建议, 在此一并感谢.

由于编者水平所限, 本书结果许多是作者新给出的, 不足之处在所难免, 迫切希望读者指正.

编　者

2014 年 9 月于浙江工业大学理学院

符 号 表

A

A'　集合 A 的导集

$A^{\perp}$　与集合 A 中元正交的元素集合

$\bar{A}$　集合 A 的闭包

a_k　Fourier 系数或框架元素

$\tilde{a}_n$　对偶框架元素

$a(x)$　构造修波的辅助函数之一

$\tilde{a}(x)$　构造修波的辅助函数之一

B

b_k　Fourier 系数

$\boldsymbol{B}(l)$　构造修波的变换矩阵

$\boldsymbol{B}^{(m)}(l)$　构造修波的变换矩阵

$b(\omega)$　构造修波的辅助函数之一

$b_j(\omega)$　$b(\omega)$ 经伸缩变换得到的函数

C

c_k　Fourier 系数

$C^{(m)}$　构造修波的变换矩阵

$(c_j)_{j\in Z}$　Fourier 系数序列

C　构造修波的变换矩阵

D

$\det \boldsymbol{T}$　矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的行列式

$\delta_{a,b}$　Kronecher 符号

$\delta_{\varepsilon}(x)$　δ 型函数

$\delta(x)$　δ 型函数

E

e^1_{j+1}　多元小波系数

e^2_{j+1}　多元小波系数

e^3_{j+1}　多元小波系数

E_{λ}　频域分割后得到的集合

E^h　频域分割后得到的水平锥

E^{v}	频域分割后得到的垂直锥
$E^{\times}$	频域分割后得到的交叉线
E^{o}	频域分割后得到的低频集
$E^{\square}$	频域分割后得到的回形集
F	
$F > 0$	正算子
$F \geqslant G$	算子不等式
$\mathscr{F}[f](\omega)$	f 的 Fourier 变换
$\check{F}(x)$	F 的 Fourier 逆变换
$\mathscr{F}^{-1}[F](x)$	F 的 Fourier 逆变换
$\hat{f}(\omega)$	f 的 Fourier 变换
$F(\omega)$	Fourier 变换
$(f * g)(x)$	f 与 g 的卷积
$\phi_{j,k}(x)$	尺度函数的伸缩平移
$\phi(x)$	尺度函数
$\tilde{\phi}$	尺度函数 ϕ 的对偶
$(\phi, \tilde{\phi})$	双正交尺度函数
$F \otimes G$	函数集的张量集
$\Phi(x, y)$	二元尺度函数
$\Phi_{j,k,m}(x, y)$	二元尺度函数的伸缩平移
F^{*}	F 的伴随算子
$\mathscr{F}[L^2(E)]$	$L^2(E)$ 在 Fourier 变换下的像空间
$\mathscr{F}^{-1}[L^2(E)]$	$L^2(E)$ 在 Fourier 变换下的原像空间
$\phi_m(x)$	$\phi(x)$ 的平移
G	
$\overline{g}$	高通滤波器
Γ	方体经线性变换后的结果
Γ_{jl}	方体经线性变换后的结果
H	
$\overline{h}$	低通滤波器
L	
$L^p(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上 p 方可积函数空间
$L(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上可积函数空间
l^2	二次可和数列空间
$L^{\infty}(\mathbf{R}^n)$	$\mathbf{R}^n$ 上本性有界函数空间

$(0,1]^n$	$\mathbf{R}^n$ 中方体
$(0,1]^n+k$	$\mathbf{R}^n$ 中方体的平移
$L_0^\infty(\mathbf{R}^n)$	$L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 中自变量范数趋于无穷时函数值趋于 0 的函数空间
L_k	半直线
O	
$\bigoplus_{n=1}^\infty A_n$	直交和
$\bigoplus_{j,k=-\infty}^\infty A_{j,k}$	直交和
P	
ψ	小波
$\psi_{j,k}$	小波的伸缩平移
$\Psi^1(x,y)$	二元张量积小波之一
$\Psi^2(x,y)$	二元张量积小波之二
$\Psi^3(x,y)$	二元张量积小波之三
$\psi_{jlk}(x)$	修波 ψ 的伸缩、转向与平移
$\psi_{jlk}^m(x)$	修波 ψ^m 的伸缩、转向与平移
$\{\psi_{jlk}\}_{j\in\mathbf{Z},l\in\mathbf{Z}^{n-1},k\in\mathbf{Z}^n}$	修波框架
$\tilde{\psi}_{jlk}$	$\widehat{\tilde{\psi}_{jlk}}$ 的 Fourier 逆变换
$\widehat{\tilde{\psi}_{jlk}}$	$\widehat{\psi_{jlk}}$ 的截断
$\psi_{jlk}^\lambda(x)$	$\psi^\lambda(x)$ 的伸缩、转向与平移
$\widehat{\psi_{jkm}^\times}(\omega)$	$\widehat{\psi_{jlk}}$ 关于 $E^\times$ 的截断
$\widehat{\psi_{jkm}^h}(\omega)$	$\widehat{\psi_{jlk}}$ 关于 E^h 的截断
$\widehat{\psi_{jkm}^v}(\omega)$	$\widehat{\psi_{jlk}}$ 关于 E^v 的截断
R	
$\mathbf{R}^n$	分量为实数的 n 维向量空间
$\mathbf{R}$	实数集 $(-\infty,\infty)$
$\mathbf{R}^+$	正实数集 $(0,\infty)$
$\mathbf{R}^{n*}$	$\mathbf{R}^n$ 中元的转置构成的空间
$R_{jl}(f)$	关于框架的 Parseval 等式分指标余项
$R(f)$	关于框架的 Parseval 等式余项
$R_\lambda(f)$	关于框架的 Parseval 等式余项
$R_{\lambda jl}(f)$	关于框架的 Parseval 等式余项
S	
$\mathrm{span}A$	A 的线性扩张

T

T	转置
$T_2 \circ T_1$	映射 T_2 与 T_1 的积即复合
$\mathrm{Tr}F$	F 的迹

U

$u(\omega)$	构造修波的辅助函数之一

V

$V_j(j \in \mathbf{Z})$	多分辨分析
V_j^2	二维多分辨分析
$v(\omega)$	构造修波的辅助函数之一

W

$\{W_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$	小波生成空间序列
$\biguplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$	空间 W_j 的直和
W_j^2	二元张量积小波生成空间序列
$(w)\lim\limits_{n} x_n$	序列弱收敛
$w(\omega)$	构造修波的辅助函数之一

X

$x \cdot y$	x 与 y 的点积即内积
$\langle x, y\rangle$	x 与 y 的内积
$\|x\|_\infty$	x 的无穷范数
$\|x\|_p$	x 的 p 范数
$\|x\|$	x 的范数
$(x_1 x_2 \cdots x_n)$	n 维向量

Z

$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}_+$	正整数集
$[x_1 x_2 \cdots x_n]$	一行 n 列矩阵
$\mathbf{Z}_+^m$	坐标为正整数的 m 维点集

目 录