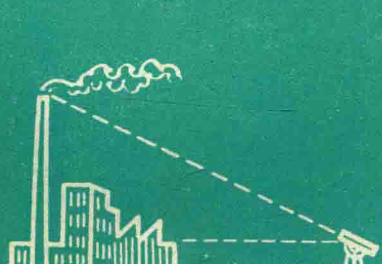
吉林省中学试用课本

数学

第九册



目　录

第一章　复数……………………………………………… 1
　一　向量介绍………………………………………… 1
　二　复数的概念……………………………………… 5
　三　复数的运算………………………………………10
　四　复数的三角表示式及运算………………………18
　五　复数的指数表示式………………………………29
第二章　数学归纳法、排列、
　　　　组合和二项式定理……………………………37
　一　数学归纳法………………………………………37
　二　排列、组合………………………………………44
　三　二项式定理………………………………………62
第三章　概率初步 ……………………………………72
　一　概率的概念………………………………………72
　二　概率的性质………………………………………77
　三　等可能事件的概率………………………………87

第一章　复　　数

一、向量介绍

1.1 向　　量

在我们常见的量当中，只有大小的量叫作数量（也叫纯量）。还有另外一种量，不但有大小，而且还要考虑它的方向，才能反映它的本质，这种量是向量（或矢量）。

既有大小又有方向的量叫作向量。如表示位移、力、速度、加速度的量都是向量。在这里，我们用带有箭头的线段（有向线段）来表示向量。如图1—1，用起点为O，终点为A的线段表示向量，记做$\overrightarrow{OA}$或$\vec{a}$，这条线段的长度表示向量的大小，它的方向表示向量的方向。向量的大小，即线段的长度，叫做向量的模，记作$|\overrightarrow{OA}|$，向量的模是一个非负的数。

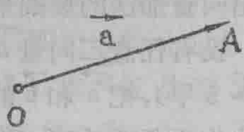


图　1—1

因为向量只和大小、方向有关，因此我们规定，方向相同，模相等的向量是相等的，而不考虑它的起点在那里。在图1—2中，向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$的模相等，而且方向相同，所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$。

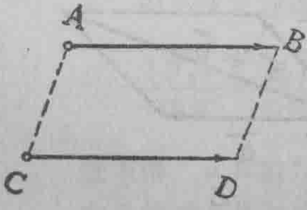


图　1—2

两个向量只是模相等，这两个向量不一定相等。如图1—3，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，但$\vec{a}\neq\vec{b}$。特别地，和$\vec{a}$模相

等，方向相反的向量，叫作$\vec{a}$的反向量，记作$-\vec{a}$。

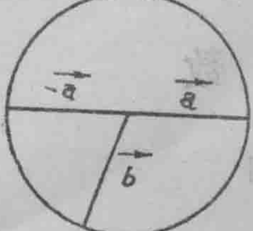


图 1—3

1.2 向量的加法和减法

和数量一样，向量也有加法和减法的运算，从实际中抽象出它特殊的运算规则。

先看下面的例子：两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$同时作用一个物体P，由物理学我们知道，它们的合力$\vec{F}$的方向是以$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$为邻边组成的平行四边形的对角线方向(图1-4)，而$\vec{F}$的大小等于这条对角线的长。

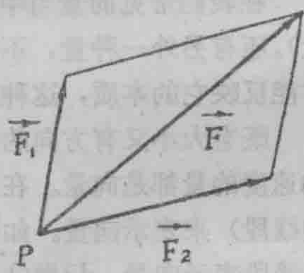


图 1—4

从实际向量合成的规律，抽象出向量加法的规则是：

设有任意二向量$\vec{a}$和$\vec{b}$（图1—5甲），把$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点平行移动在一起，并以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边作平行四边形（图1—5乙），在这个平行四边形中，和$\vec{a}$，$\vec{b}$起点相同的对角线向量，就是向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的和，记作$\vec{a}+\vec{b}$。

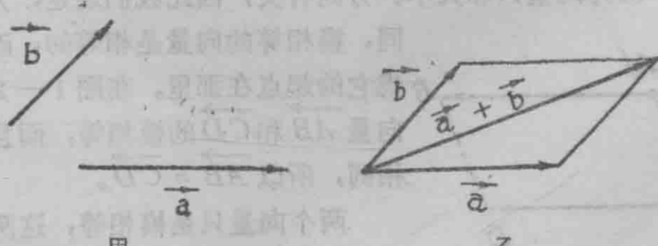


图 1—5

上述求向量和的法则，叫作向量加法的平行四边形法则。

二向量的和还可以用另一种方法得到．从图1－5乙中，我们看到，平行四边形的一组方向相同的对边是相等的向量．因此，如果要求$\vec{a}$和$\vec{b}$的和，可以把$\vec{b}$的起点移到$\vec{a}$的终点处，则以$\vec{a}$的起点为起点，$\vec{b}$的终点为终点的向量就是$\vec{a}+\vec{b}$（图1－6）。这个规则叫作向量加法的三角形规则．

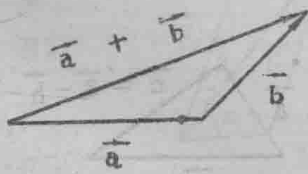


图　1－6

例　如图1－7，作用在一点的两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$，$|\vec{F}_1|=5$公斤，$|\vec{F}_2|=3$公斤，它们的夹角是60°，求$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的合力$\vec{F}$．

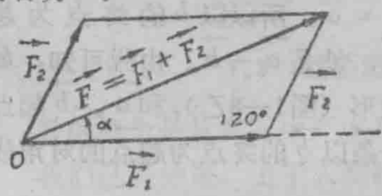


图　1－7

解　按向量加法的平行四边形法则，$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的合力$\vec{F}$，是以$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$为邻边的平行四边形的对角线（图1－7）．求$\vec{F}$就是要定出$|\vec{F}|$的大小和$\vec{F}$的方向（以$\vec{F}$和$\vec{F}_1$的夹角α表示）．

由余弦定理得

$$|\vec{F}|^2=|\vec{F}_1|^2+|\vec{F}_2|^2-2|\vec{F}_1|\cdot|\vec{F}_2|\cos 120°=49$$

$\therefore\ |\vec{F}|=7$（公斤）．

又　由正弦定理得

$$\frac{|\vec{F}_2|}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{F}|}{\sin 120°},\ \sin\alpha=\frac{|\vec{F}_2|\sin 120°}{|\vec{F}|}=0.3711,$$

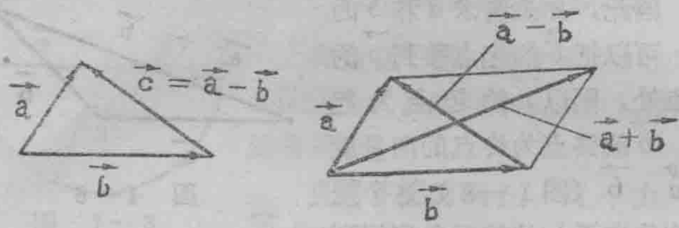
查表得　$\alpha=21°47'$．

向量的减法是加法的逆运算．

如果$\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$，那么我们称$\vec{c}$为$\vec{a}$和$\vec{b}$的差，记作$\vec{c}$

$=\vec{a}-\vec{b}$。

现在我们来说明，已知$\vec{a}$和$\vec{b}$，如何求它们的差$\vec{a}-\vec{b}$。



甲　　　　乙

图 1—8

如图 1—8 甲所示，由加法的三角形法则，把$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点放在一起时，因为$\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$，所以以$\vec{b}$的终点为起点，$\vec{a}$的终点为终点的向量$\vec{c}$，就是$\vec{a}-\vec{b}$。由此可知，如果以$\vec{a}$、$\vec{b}$为邻边作平行四边形（图1—8乙），和$\vec{a}$、$\vec{b}$起点相同的对角线为$\vec{a}+\vec{b}$，另一条以$\vec{b}$的终点为起点的对角线则为$\vec{a}-\vec{b}$。

习 题 一

1．下列各式对吗？

（1）设$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，那么$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|=2+3=5$；

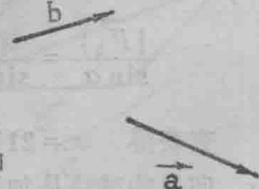
（2）设$|a|=2$，那么$\left|\frac{\vec{a}}{2}\right|=1$；

（3）$|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$；

（4）$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

2．在我们知道的量当中，找一些向量和纯量的例子.

3．如图有二向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，试作出：



（第 3 题）

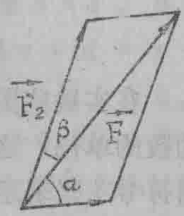
（1）$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{b}+\vec{a}$；

（2）$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{b}-\vec{a}$；

（3）$\vec{b}+\vec{a}+\vec{a}$.

4．设气球上升速度为每秒20米，遇正南风，风速每秒5米，求气球的速度.

5．如图，把大小为300公斤的力$\vec{F}$分解为两个力$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$，$\vec{F}_1$和$\vec{F}$的夹角$\alpha=47°$，$\vec{F}_2$和$\vec{F}$的夹角$\beta=18°$，求$|\vec{F}_1|$和$|\vec{F}_2|$.



（第5题）

6．已知作用一点的两个力，它们的大小分别为12公斤和9公斤，夹角120°，求合力.

二、复数的概念

1.3 数的概念的发展

数的概念是从实际中产生并逐渐发展起来的.

我们已经知道，由于人类社会生产和生活的需要，数，由正整数发展到有理数，又扩充到了实数. 数的概念扩充到了实数以后，数轴上的每一个点就有唯一的一个实数和它对应，反过来，每一个实数，在数轴上也只有一个点和它对应. 这就是说，实数和数轴上的点是一一对应的.

即使这样，数还是满足不了实际的需要，仍有继续扩充的必要. 例如在实数范围内要解 $x^2=-1$ 这样简单的方程也是不可能的. 由于解这类方程的需要，十六世纪时，把数的范围又进一步扩充到了复数. 十八世纪以后，数学和力学中的某些问题需要用到复数，复数运算得到了更大的发展. 现在，复数和复变数函数的理论，在科学技术的许多方面，如电工学、水力学、气体力学等方面，以及对数学本身，都有重要应用. 在这一章里，我们将着重介绍复数有关概念和运算.

1.4 复　数

在实数范围内，数的单位是1．现在我们来引入一个新的数的单位，这个单位平方以后得-1，把它叫作虚数单位，用符号i来表示它，就是

$$\boxed{i^2=-1}$$

虚数单位i虽然不是一个实数，但是它可以和实数一起进行各种运算，运算的法则都和实数的运算法则相同，并且对于实数运算适用的运算定律也同样是适用的．

形式如$a+bi$（a、b都是实数）的数叫作复数．例如

$2+3i$ （$a=2$，$b=3$）；

$-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}i$ $\left(a=-\frac{1}{2},\ b=\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$；

5 （$a=5$，$b=0$）；

$-\sqrt{3}i$ （$a=0$，$b=-\sqrt{3}$）

等等，都是复数．

在复数$a+bi$中，a叫作复数的实部，bi叫作复数的虚部，b叫作复数虚部的系数．

虚部的系数等于零（$b=0$）的复数就是实数，例如-3，0，$\frac{1}{2}$，$\sqrt{3}$，π等．

虚部的系数不等于零（$b\neq 0$）的复数叫作虚数，例如$3+4i$，$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-0.5i$等．

实部等于零（$a=0$）的复数叫作纯虚数，例如$2i$，$-0.5i$，$\sqrt{3}i$等．

因此，复数既包括实数，又包括虚数．

我们规定，如果两个复数的实部相等，虚部的系数也相

等，那么这两个复数是相等的。就是说，如果 $a=a'$，$b=b'$，那么 $a+bi=a'+b'i$；反过来，如果 $a+bi=a'+b'i$，那么 $a=a'$，$b=b'$。特殊情况，如果 $a=0$，$b=0$。则 $a+bi=0$；反之，如果 $a+bi=0$，则 $a=0$，$b=0$。

两个复数，如果均为实数时，可以比较它们的大小，如果不是这样，是不能比较它们的大小的。

应用符号法则和指数运算法则，可以得到 i 的任意次幂。

$$i^1=i, \qquad i^2=-1,$$
$$i^3=i^2\cdot i=-i, \qquad i^4=i^2\cdot i^2=1$$
$$i^5=i^4\cdot i=i, \qquad i^6=i^4\cdot i^2=-1$$
$$i^7=i^6\cdot i=-i, \qquad i^8=i^4\cdot i^4=1$$

从上面的例子中，我们发现 i 的幂是有周期性的。一般地，

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i$$

（n 是整数）

例 1　已知复数 $(3x-4)+(2y+3)i=0$，x 和 y 都是实数，求 x 和 y。

解　根据复数为零的规定得

$$3x-4=0,$$
$$2y+3=0.$$
$$\therefore x=\frac{4}{3}$$
$$y=-\frac{3}{2}$$

例 2　化简：i^{36}，i^{49}，i^{83}。

解　$i^{36}=i^{4\times 9}=1$，

$i^{49}=i^{4\times 12+1}=i$，

$$i^{83} = i^{4\times20+3} = -i。$$

例 3　解方程$x^2 = -1$

解　$\because$　$i^2 = -1$，$\therefore i = \sqrt{-1}$是方程$x^2 = -1$的一个根。

又　$\because (-i)^2 = i^2 = -1$，$\therefore -i = -\sqrt{-1}$是方程的另一个根。

从上例看出，引入虚数单位i以后，方程$x^2 = -1$有解，它的解是

$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i。$$

也就是说，-1的平方根是$\pm i$。

例 4　解方程$x^2 = -a$ $(a>0)$。

解　$\because (\sqrt{a}\,i)^2 = (\sqrt{a})^2 i^2 = -a$

　　$\therefore \sqrt{a}\,i$是方程$x^2 = -a$的一个根，就是$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$。

又　$\because (-\sqrt{a}\,i)^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a$，

$\therefore$　$-\sqrt{a}\,i$是方程$x^2 = -a$的另一个根。

因此，方程$x^2 = -a$ $(a>0)$的解是

$$x = \pm\sqrt{-a} = \pm\sqrt{a}\,i。$$

这也就是说，负数$-a$ $(a>0)$的平方根是$\pm\sqrt{a}\,i$。

例 5　解方程　$25x^2 + 9 = 0$

解　　$25x^2 = -9$，　　$x^2 = -\dfrac{9}{25}$，

$$\therefore\quad x = \pm\sqrt{-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}\,i = \pm\frac{3}{5}i。$$

1.5　复数的几何表示

在平面上取直角坐标系，x轴为实轴，单位是1，y轴

为虚轴，单位是 i，这个平面就叫作复平面。

任何一个复数 $a+bi$，都可以用复平面上的一个点来表示，这个点的横坐标是 a，纵坐标是 b（图 1—9）。按照这种方法，相等的复数在复平面上是用同一个点来表示的。这样复数就和复平面上点建立了一一对应的关系。很明显，表示实数的点全在实轴（X轴）上，表示纯虚数的点都在虚轴（y轴）上。

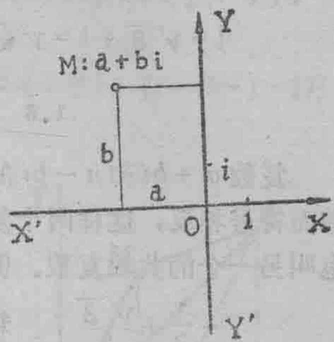


图 1—9

如图 1—10所示，M点表示复数 $a+bi$，连结原点O和M点，并且把OM看作是有向线段，O为起点，M为终点，那么就得到向量$\overrightarrow{OM}$。就是说，一个复数 $a+bi$ 可以确定一个向量$\overrightarrow{OM}$，反过来，画出一个起点为O的向量$\overrightarrow{OM}$，它的终点M也唯一的确定一个复数 $a+bi$。因此复数 $a+bi$ 和向量$\overrightarrow{OM}$是一一对应的。

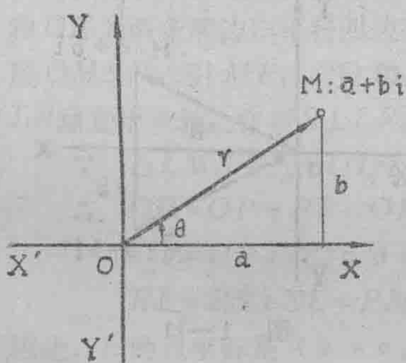


图 1—10

把向量$\overrightarrow{OM}$的长度（M点到原点的距离）叫作复数 $a+bi$ 的模，也叫作复数的绝对值，用 r 或 $|a+bi|$ 表示。根据勾股定理，容易得出

$$|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}$$

例如 $\left|-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,$

$|-\sqrt{3}\,i|=\sqrt{0+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}.$

1.6 共轭复数

复数$a+bi$和$a-bi$的实部相等，虚部的系数绝对值相等而符号相反，这样两个复数叫作共轭复数。其中任意一个也叫另一个的共轭复数。例如

$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 和 -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$-\sqrt{3}\,i 和 \sqrt{3}\,i; \quad 7 和 7$$

等都是共轭复数。

因为 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以两个共轭复数的绝对值是相等的。很明显，表示两个共轭复数的点，以及和它们相对应的两个向量，是关于X轴成对称的（图1—11）

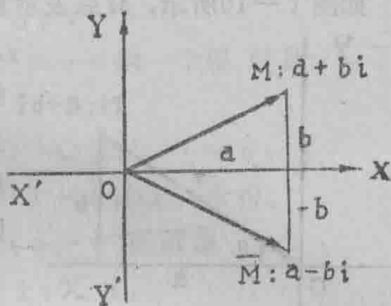


图 1—11

三 复数的运算

1.7 复数的加法

复数的加法。我们规定按照代数式$a+bx$相加的规则进行，就是实部和实部相加，虚部和虚部相加，然后把所得结果合并，也就是

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

例如，$(4+i)+(1+3i)=(4+1)+(1+3)i$

$$=5+4i,$$

$$(-4i)+(-2-i)=[0+(-2)]+[(-4)+(-1)]i$$

$$=-2-5i.$$

我们再来看复数相加和向量相加的关系.

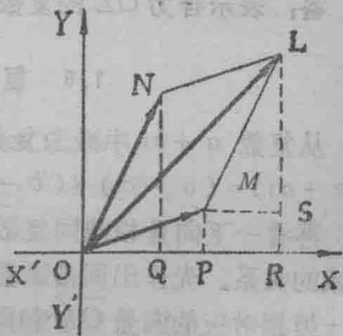


图 1—12

设复数 $a+bi$ 同向量 $\overrightarrow{OM}$ 相对应，复数 $c+di$ 同向量 $\overrightarrow{ON}$ 相对应（图 1—12），那么 M 点的坐标就是 (a,b)，N 点的坐标就是 (c,d). 以 OM 和 ON 为两条邻边作平行四边形 $OMLN$，引 MP，NQ 和 LR 垂直于 x 轴，作 $MS\perp LR$，

$\because\ \triangle LMS\cong\triangle NOQ$，

$\therefore\ OR=OP+PR=OP+MS$

$$=OP+OQ=a+c.$$

$$RL=RS+SL=PM+QN=b+d.$$

因此，L 的点坐标是 $(a+c,\ b+d)$，向量 $\overrightarrow{OL}$ 就同复数 $(a+c)+(b+d)i$ 相对应. 又根据向量加法的平行四边形的法则知，向量 $\overrightarrow{OL}$ 就是向量 $\overrightarrow{OM}$ 和 $\overrightarrow{ON}$ 的和.

由此可知，求两个复数的和，可先作出和这两个复数相对应的向量，这两个向量的和就是同两个复数的和相对应的向量. 在实践中，向量的相加，也可以用复数相加来表示.

例 1　求共轭复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的和.

解　$(a+bi)+(a-bi)=2a+0=2a.$

从此例中得到，两个共轭复数的和是一个实数。

例 2　两个力$\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$分别用复数 $13+5i$ 和 $5+9i$ 来表示，求表示它们的合力 OL 的复数（图 1—12）

解　$(13+5i)+(5+19i)$

$=18+24i$。

答：表示合力$\overrightarrow{OL}$的复数是$18+24i$。

1.8　复数的减法

从复数 $a+bi$ 中减去复数 $c+di$，就得 $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$。

再看一下向量相减同复数相减的关系。先作出同被减数 $a+bi$相对应的向量$\overrightarrow{OM}$和同减数 $c+di$ 相对应的向量$\overrightarrow{OL}$（图 1—13），根据向量的减法法则知，向量$\overrightarrow{LM}$就是同复数 $(a-c)+(b-d)i$ 相对应的向量。在物理学中，向量的相减，也可以用复数相减来表示。

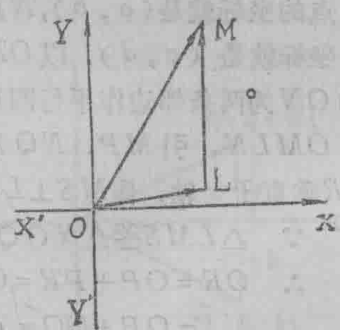


图　1—13

例 1　计算：$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$。

解　$(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

$=(5-2-3)+(-6-1-4)i$

$=-11i$。

例 2　用复数 $4-7i$ 表示的一个力分解成两个力，其中一个分力可以用复数 $-2-3i$ 表示，求表示另一个分力的复数。

解　$(4-7i)-(-2-3i)=6-4i$。

答：表示另一个分力的复数为 $6-4i$。

1.9 复数的乘法

两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 相乘，我们规定按照二项式相乘的方法进行．即

$$
\begin{aligned}
&(a+bi)(c+di)\\
&=ac+bci+adi+bdi^2\\
&=(ac-bd)+(bc+ad)i.
\end{aligned}
$$

例1　求共轭复数 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的积。

解　$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2$

$$=a^2-(-b^2)=a^2+b^2.$$

从这个例题中得到，两个共轭复数的积是一个实数，这个实数等于两个复数中任意一个的绝对值的平方。

例2　计算：$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$。

解　$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

$$
\begin{aligned}
&=(11-2i)(-2+i)\\
&=-20+15i.
\end{aligned}
$$

例3　计算：$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$。

解　$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$$
\begin{aligned}
&+3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\\
&=\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}i\\
&=-1
\end{aligned}
$$

例 4 设 x 和 y 都是实数，解方程

$$(1+2i)(x+yi)+(2y-2xi)=-5+3i.$$

解 原方程可化为

$$[(x-2y)+(2x+y)i]+(2y-2xi)=-5+3i.$$

即 $x+yi=-5+3i$,

得 $x=-5$, $y=3$.

1.10 复数的除法

要求得两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 的商，可先把它们写成分式，然后利用两个共轭复数的积是一个实数的性质，把分子分母同时乘以分母的共轭复数，使分母化为实数而得到.即

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\ (c-di)}{(c+di)\ (c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

例 1 计算：$(1+2i)\div(3-4i)$.

解 $(1+2i)\div(3-4i)$

$$=\frac{1+2i}{3-4i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$=\frac{-5+10i}{25}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

习 题 二

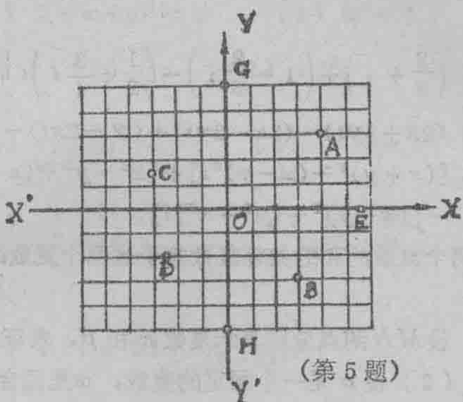
1．写出复数系统表。

2．指出下列复数的实部和虚部：

$$-5+6i,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\sqrt{3},\ i,\ 0.$$

3．如果 a、b 都是实数，在什么情形下 $a+bi$ 是实数？是虚数？是纯虚数？各举一些例子。

4．在复平面内，作出表示下列各个复数的点：（1）$2+5i$；（2）$-3+2i$；（3）$\frac{1}{2}-4i$；（4）$-3-i$；（5）5；（6）$-3i$；（7）$6i$；（8）-2；（9）$1-\sqrt{2}i$。



（第 5 题）

5．说出图中各点所表示的复数（方格每边等于单位长）。

6．已知复数 $4-3i$，$-1+i$，$-5-12i$，$40+9i$，$4i$，$-\sqrt{5}i$，

（1）求作同各数相对应的点。

（2）求各数的绝对值。

（3）求各数的共轭复数，并且作出同这些共轭复数对应的点。

7．已知 $|x+yi|=3$，求表示复数 $x+yi$ 的点的轨迹。

8．画出同下列复数相对应的向量：