普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus 新核心

理工基础教材

数学分析
试题分析与解答

上海交通大学数学系　组编

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus

新核心

理工基础教材

数学分析

试题分析与解答

上海交通大学数学系　组编

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地,数学教学成绩一直以优秀闻名全国.本书选编了该校近年的24份本科生数学分析试卷,对每一道试题均作详解,并有题前分析和题后点评,指明解题思路和方法以及学生在解题过程中常犯的错误,有的题还给出多种解法.

本书可作为高等院校《数学分析》课程师生的教学辅导用书,也可供考研者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析试题分析与解答/上海交通大学数学系组编.—上海:上海交通大学出版社,2015
ISBN 978-7-313-12311-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①上… Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第257976号

数学分析试题分析与解答

编　　者:上海交通大学数学系
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路951号
邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:常熟市梅李印刷有限公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:787 mm×960 mm　1/16　　印　　张:15
字　　数:282千字
版　　次:2015年1月第1版　　印　　次:2015年1月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-12311-4/O
定　　价:33.00元

前　言

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、管理等学科的学生都具有扎实的数学基础. 20 世纪 80 年代，上海交通大学开设了教改试点班和本硕联读班. 本着培养高素质综合性人才，贯彻“工科专业、理科基础”的总体指导思想，上海交通大学从一开始就将《数学分析》课作为基础课导入部分工科专业的课程计划，以加强学生对数学思想与方法的认识，强化对学生的逻辑思维和抽象思维的训练. 近年来，《数学分析》的授课范围更延展到多个院系，并且还有进一步扩大的势头.

《数学分析》是大学数学中的一门基础理论课程，它对后续课程起着至关重要的作用，关系到学生的素质培养. 在教学实践中，我们深刻地体会到，学生学习和掌握课程的基本知识并不困难，他们“听得懂、看得懂”，但在运用所学知识解决问题时就感到困难，觉得“想不到、考不出”. 究其原因，就是学生在学习课程基本知识后，缺乏系统的训练. 若有一本帮助学生巩固、检验所学知识的书，用难度适当的题目对学生进行训练，对数学分析的思想和方法进行总结和归纳，这对培养学生的思维能力，提高学生的素质是十分有益的.

基于以上考虑，我们收集整理了上海交通大学《数学分析》历年试题中的 24 份试卷，这些试卷是课程组老师多年教学实践和课程考核的经验积累. 课程的考核是为了检验所学基本知识、基本方法的掌握情况，也是课程学习的必要环节. 本着“分散难点、突出重点”的原则，《数学分析》课程每学期安排“阶段测验、期中考试、期终考试”. 本书收入的是上述考试试题中的一部分，并对原试卷中的少部分题目重新做了选编. 本书的试卷具有如下特点：

(1) 涵盖课程所含的大部分知识点，突出课程的重点.

(2) 既有检验基本概念掌握情况的试题，又有检验基本方法掌握情况的计算题、证明题，还有考查学生综合能力的综合题.

(3) 具有较好的区分度，能区分学生学习情况的差异性.

通过本书的学习，读者不难发现该课程的考试重点和对学生的要求. 试卷的编排方式是：对试题从分析、解答、点评三个方面进行阐述. 其中，分析部分主要说明解题的基本方法和基本思路；解答部分给出解题的具体过程；点评部分包含解题的常见错误、考题的其他解法、题目涉及的相关知识点、试题的延拓等.

本书可作为高等院校《数学分析》课程学生的教学辅导用书，也可作为教师教学参考用书.本书由陈克应执笔整理，试题的拟定由课程组老师共同完成，他们还有裘兆泰、陈贤峰、汪静、周春琴、邵国年、乃兵等.本书的编写和出版得到上海交通大学数学系和上海交通大学出版社的大力支持和帮助，编者在此一并表示感谢，同时感谢课程组同仁们对历年命题付出的辛勤劳动.

由于时间紧迫，又囿于编者的水平，书中存在的错误或不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2014 年 8 月于上海交通大学

目　录

试　卷　1

第一学期测验试卷

考核内容：实数集、函数、数列极限

一、用肯定语气叙述下列命题(每小题 5 分,共 15 分)

1. 函数 $f(x)$在区间 I 上不是上有界的.

2. 常数 a 不是数列$\{x_n\}$的极限.

3. 数列$\{x_n\}$不是 Cauchy 列.

二、单项选择题(每小题 4 分,共 12 分)

1. 设 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ $(n \in \mathbf{N})$, 则(　　).

(A) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = 0, \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = 1$　　(B) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = -1, \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = 1$

(C) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = -1, \sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = \dfrac{3}{2}$　　(D) $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = 0$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}}\{x_n\} = \dfrac{3}{2}$

2. 设有数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$. 下列断语中(　　).

① 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n \in \mathbf{N})$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = 0$, 则数列$\{x_n\}$收敛;

② 若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n \in \mathbf{N})$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - y_n) = 0$, 又数列$\{x_n\}$收敛,则 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 都收敛.

(A) ①正确,而②不正确　　(B) ①不正确,而②正确

(C) ①和②都不正确　　(D) ①和②都正确

3. 设$\{x_n\}$为正数列且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, 则当 $n\to\infty$ 时(　　).

(A) $\{x_n^n\}$ 与 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 必定都为无穷小量

(B) $\{x_n^n\}$ 与 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 都未必为无穷小量

(C) $\{x_n^n\}$ 必为无穷小量,而 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 未必为无穷小量

(D) $\{x_n^n\}$ 未必为无穷小量,而 $\{\sqrt[n]{x_n}\}$ 必为无穷小量

三、计算下列极限(每小题 8 分,共 24 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\cdot\arctan n}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

四、证明题(第 1 小题 9 分,第 2 至 5 小题每题 10 分,共 49 分)

1. 用 $\varepsilon-N$ 方法证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+n-2}{3n^2-2}=\dfrac{5}{3}$.

2. 设 E 为有界非空数集,$\alpha=\inf E$,且 $\alpha\notin E$. 证明:自 E 中可选取严格递减数列 $\{x_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha.$$

3. 若存在 $M>0$,使得对任意的 $n\in\mathbf{N}$,有

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<M.$$

证明:数列$\{x_n\}$收敛.

4. 设 $x_n\neq0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=0$. 证明:数列$\{x_n\}$为无穷大.

5. 设 $0<a<1$,令 $x_1=\dfrac{a}{2}$,$x_{n+1}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{x_n^2}{2}$ $(n\in\mathbf{N})$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限值.

试　卷　2

第一学期期中考试试卷
考核内容：函数极限、函数的连续性、实数基本定理、导数与微分

一、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos x}}{x^2}=$ ________.

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[3]{1+ax^2}-1\sim\sin(x^2)$，则常数 $a=$ ________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点是________________（必须同时说明间断点的类型）.

4. 设 $y=f(\sin x)+\sin(f(x))$，其中 f 为可导函数，则 $\mathrm{d}y=$ ______________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 设有开区间集 $\Gamma=\left\{\left(\dfrac{1}{n},\,1-\dfrac{1}{n}\right)\middle|\,n=3,\,4,\cdots\right\}$，则（　　）.

(A) Γ 不是开区间 $(0,\,1)$ 的开覆盖

(B) Γ 是开区间 $(0,\,1)$ 的开覆盖，但 Γ 中的有限子集不能覆盖开区间 $(0,\,1)$

(C) Γ 中的有限子集能够覆盖开区间 $(0,\,1)$

(D) Γ 是闭区间 $[0,\,1]$ 的开覆盖

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{4/3}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则（　　）.

(A) $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限不存在

(B) $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限存在，但在 $x=0$ 处不连续

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但不可导

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

3. 设函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,则极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 之值为(　　).

(A) $-f'(x_0)$　　(B) $f'(x_0)$　　(C) $2f'(x_0)$　　(D) $3f'(x_0)$

4. 考虑下列断语,则有(　　).

① 若函数 $f(x)\in C(a,b)$ 且 $f(x)$有界,则必有 $f(x)\in U.\ C(a,b)$;

② 若函数 $f(x)\in C(\mathbf{R})$ 且 $f(x)$有界,则必有 $f(x)\in U.\ C(\mathbf{R})$.

(A) ①正确,②不正确　　(B) ①不正确,②正确

(C) ①和②都不正确　　(D) ①和②都正确

三、判断题(正确的命题请给出证明,错误的命题举出反例说明.每小题 5 分,共 10 分)

1. 若对任意的 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$,函数 $f\in C[\alpha,\beta]$,则必有 $f\in C(a,b)$.

2. 若函数 $f(x)$在 x_0 点可导,则存在 $\delta>0$,使得 $f\in C(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$.

四、计算下列各题(每小题 6 分,共 30 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\lambda\sin x)^{\frac{1}{x}}$ ($\lambda\neq 0$).

2. 设 $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,求 y'.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $2^x-\cos y+y^3=0$ 确定,求 y'.

4. 设 $y=(1+x^2)\mathrm{e}^{3x}$,求 $y^{(n)}(0)$.

5. 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

五、证明题(第 1、2 小题每题 10 分,第 3 小题 12 分,共 32 分)

1. 设函数 $f\in C(\mathbf{R})$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha<0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta>0$. 证明:

(1) $\exists\,\xi\in\mathbf{R}$,使得 $f(\xi)=0$;

(2) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有界.

2. 设 $-\infty<a<b<+\infty$,且函数 $f\in U.\ C(a,b)$. 证明:

(1) $f(x)$在 (a,b) 内有界;

(2) $f^2\in U.\ C(a,b)$;

(3) 若将“(a,b)”改为“$\mathbf{R}$”,上述结论是否仍然成立?

3. 设函数 $f(x)$在 $[a,+\infty)$ 上可导,且 $f(x)$在其零点处导数不为零. 若 $\{x_n\}$ 是 $f(x)$的互异零点,证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

试　卷　3

第一学期期终考试试卷

考核内容：微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用

一、填空题(每小题 4 分，共 24 分)

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} =$ ________.

2. 曲线 $y=\dfrac{x}{2}+\arctan x$ 的斜渐近线有________.

3. 设 $f_n(x)=nx(1-x)^n\ (n\in\mathbf{N})$. 记 $M(n)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f_n(x)\}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{xy}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t+y\mathrm{e}^x=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

5. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x\sin^3 x}=$ ________.

6. 设曲线 $y=\sqrt{\dfrac{x}{1+x^4}}$，直线 $x=a\ (a>0)$ 以及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体体积为 $V(a)$，则 $\lim\limits_{a\to+\infty}V(a)=$ ________.

二、单项选择题(每小题 3 分，共 12 分)

1. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上有界，$[a,b]$ 的分划 π_2 是分划 π_1 的加细. 若 f 在分划 π 下的 Darboux 大和、小和分别记为 $\overline{S}(f,\pi)$，$\underline{S}(f,\pi)$，则有(　　).

(A) $\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)$

(B) $\underline{S}(f,\pi_2)\leqslant\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1)$

(C) $\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1)$

(D) $\underline{S}(f,\pi_2)\leqslant\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)$

2. 考虑下列断语,则有(　　).

① 若函数 f, g 均可积,且 f, g 可复合,则 $f(g(x))$ 必定可积.

② 若函数 f, g 均不可积,则 $f(g(x))$ 必定不可积.

(A) ①正确,②不正确　　(B) ①不正确,②正确

(C) ①和②都正确　　(D) ①和②都不正确

3. 设函数 $f(x)$二阶可导,且 $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$, 则(　　).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$的极小值

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$的极值,但 $x=0$ 是函数 $f(x)$的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$的极值, $x=0$ 也不是函数 $f(x)$的拐点

4. 设函数 f 连续且不恒为零,记 $I=t\int_0^{s/t}f(tx)\mathrm{d}x$ $(t\neq 0)$. 则 I 的值(　　).

(A) 依赖于 s 与 t　　(B) 不依赖于 s 与 t

(C) 依赖于 s, 不依赖于 t　　(D) 依赖于 t, 不依赖于 s

三、讨论题(本题共 12 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g''(x)$ 连续,且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求常数 A, 使得 $f(x)$在 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

四、计算下列各题(每小题 6 分,共 24 分)

1. 求积分 $\displaystyle\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

2. 求积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

3. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(1+1/n)}{n+1}+\frac{\ln(1+2/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\ln(1+n/n)}{n+1/n}\right)$.

4. 求积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

五、证明题(第 1、2 小题每题 10 分,第 3 小题 8 分,共 28 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}, & x\in\left(\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{2n-1}\right],\\ \dfrac{1}{n}, & x\in\left(\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right],\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}$, $f(0)=0$. 证明: $f\in R[0,1]$.

2. 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上二阶可导,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

3. 设函数 $f(x)$在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明:

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$;

(2) 存在 $\eta\in(a,b)$,使得 $f''(\eta)=f(\eta)$.

试　卷　4

第二学期测验试卷

考核内容：空间解析几何、常微分方程、广义积分、数项级数、函数列与函数项级数

一、填空题(每小题 4 分,共 16 分)

1. 微分方程 $y''-3y'+2y=(x^2+1)e^{2x}$ 一个特解的形式是________(不必计算特解的具体结果).

2. 设 $\|\boldsymbol{a}\|=1$, $\|\boldsymbol{b}\|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{6}$,则以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积 $S=$________.

3. 点 $P(1, 2, -2)$ 到平面 $2x+6y-3z+1=0$ 的距离 $d=$________.

4. 设 $x_n=\begin{cases}3^k, & n=2k-1,\\ 5^k, & n=2k,\end{cases}$ 则 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=$________, $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=$________.

二、单项选择题(每小题 4 分,共 16 分)

1. 设函数 $f\in C(a, b]$,且 a 为 $f(x)$ 的瑕点,则结论是(　　).

① 若 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛,则必有 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛;

② 若 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛,则必有 $\int_a^b f^2(x)dx$ 收敛.

(A) ①正确,②不正确　　(B) ①不正确,②正确

(C) ①和②都正确　　(D) ①和②都不正确

2. 下列断语中正确的是(　　).

① 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$;

② 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$,则无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 必收敛;

③ 若无穷积分 $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

(A) ①②和③ (B) ②和③ (C) ② (D) ③

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则下列级数中必定收敛的是( ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n$

4. 设有两个数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,则( ).

(A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

(B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛

(D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时,$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

三、判断题(正确的命题给出证明,错误的命题举出反例说明.每小题 6 分,共 12 分)

1. 设函数 $f \in C[0, +\infty)$ 且 $\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\mathrm{d}x (n \in \mathbf{N})$ 存在,则无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 必收敛.

2. 设 $f_n(x) \in C[a, b]$ $(n \in \mathbf{N})$,且 $\{f_n(x)\}$ 在 (a, b) 内一致收敛,则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

四、解答题(第 1、2 每题 6 分,第 3、4 每题 10 分,共 32 分)

1. 求微分方程 $xy' + (1-x)y = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.若收敛,需指明是条件收敛还是绝对收敛.

4. 判断无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0)$ 的敛散性.

五、证明题(每小题 12 分,共 24 分)

1. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

(1) 求 $f(x)$的定义域 D;

(2) 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 在 D 内不一致收敛;

(3) 证明:$f(x)$在 D 内连续.

2. 设函数 $f\in C(\mathbf{R})$,令

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right).$$

证明:函数列 $\{f_n(x)\}$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上一致收敛.