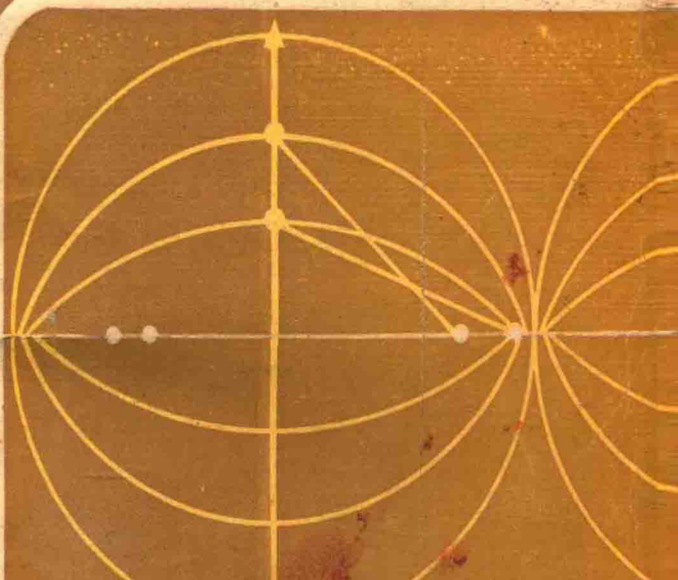
《中学课程课外读物》

北京市海淀区教师进修学校主编

高二解析几何

自学解难



重庆出版社　华夏出版社

中学课程课外读物

高二解析几何

自学解难

附参考答案

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社　华夏出版社

一九八七年·重庆

前　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和初、高中学生更好地掌握中学课程内容并提高他们的文化科学知识水平，由部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员，编写了这套《中学课程课外读物》。它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物等学科。

课外读物应该有利于课堂教学。编写时，我们注意依据教学大纲，紧密结合教材，力求体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开阔视野，启迪思维，开发智力，培养能力；力求使这套书成为中学生和知识青年的具有针对性、启发性、实用性的读物，成为家长指导和检查学生学习的助手，并可供教师备课时参考。

数学部分，每讲包括四节：系统与结构、理解与思考、方法与能力、回味与引申。

系统与结构，是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重难点进行了较详细的讲述。同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力，一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另一方面通过对综合性较强的例题的剖析，加强了能力的培养。这一部分之后，配备了数组练习题供读者选用。此外，还编拟了一份自测题并给出了答案，以便于自学的读者自

我检查。

回味与引申，想通过这一部分对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思想方法上给以指点。

本书编写者：

北京市一二三中学	杨弘敏
北京市二十中学	范登宸
北京师院附属中学	戴汝潜
北京市四十七中学	王健民
北京市海淀区教师进修学校	汪惟葆

由于编者水平有限，书中如有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

目录

第一讲 直 线

一、系统与结构

本讲主要学习两个内容：直角坐标系下的基本坐标公式和直线。

各项内容之间的联系（见第2页）

［说明］ 通过直角坐标系的建立，使有序实数对与平面上的点建立起“一一对应”的关系，这便开辟了用“数”研究“形”的新天地，并使代数、几何这两门独立学科相结合，产生了一门新的学科——解析几何．在取定的坐标系中将几何度量、位置关系用包含坐标的公式、方程表示出来，并利用后者来研究前者．这是读者在学习过程中要掌握的坐标法的第一个层次．为此，要特别重视公式或方程中的变数的取值范围及常数的几何意义．

二、理解与思考

直线这部分内容的特点是概念多、计算公式的形式多．易混淆，难记忆．但这些概念和公式又是学习后续内容的基础，因此必须强调对每个概念的理解，只有深刻理解知识内容，才能牢固地记忆．由于公式形式多，所以学习过程中要多思考，搞清每一类公式——例如直线方程的几种形式，它

- 直角坐标系中的量度和直线
  - 基本度量的坐标式
    - 表示有向线段的数值的公式
    - 两点间的距离公式
    - 有向线段的定比分点公式
  - 直线方程的各种形式
    - 四种特殊形式：式中常数的几何意义
    - 统一的一般形式：直线与二元一次方程对应
  - 两直线间关系
    - 相交：交点求法；交角公式
    - 垂直：判定条件
    - 平行：判定条件；两直线间距离
  - 点和直线间关系
    - 点在线外：点到直线距离的求法
    - 点在线上：坐标满足直线方程

们的特点和适用范围，相互间的区别与联系。

1. 解析几何是通过代数运算来研究几何图形的形状、大小和位置关系。因此，在学习解析几何时，要充分理解“形数结合”这一思想以弄清平面内的点与有序实数对的“一一对应”关系。

2. 区分有向线段的数量与长度，要理解这是两种不同的概念，有向线段 $\overline{AB}$ 的数量，在数轴上用它的两个端点的坐标表示，若点A、B的坐标分别为x_1、x_2，那么$\overline{AB}$的数量$AB=x_2-x_1$，它是一个代数数，有向线段的起点和终点的顺序会直接影响数量的正负号，要注意数量$AB\neq BA$，$AB+BA=0$。

3. 学习定比分点公式时，要弄清两点：

（1） P点分有向线段$\overline{P_1P_2}$的比$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，它是两个有向线段的数量比，切莫与长度比混淆起来。

（2） 在运用$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$公式时，它是以原有向线段的始点为起点、分点为终点的有向线段的数量与以分点为起点、原有向线段的终点为终点的有向线段的数量之比。即$P_1\to P$，$P\to P_2$这个方向不能搞错，而后再从内外分点确定λ的正负。$\lambda\neq -1$

4. 直线方程是本章中心内容，也是全章的重点。根据所给条件的不同，它可以写成几种不同的形式。由于直线是由两个独立条件确定的，所以这几种不同形式的方程是可以互化的。在学习过程中要反复比较，掌握以下五种形式的直线方程的条件：（式中α为直线倾角）

点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$

斜截式：$y=kx+b$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$

两点式：$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1 \neq x_2)$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

一般式：$Ax+By+C=0$ （A，B不同时为0）

5．两条直线的位置关系：

（1）斜率存在且不重合的两条直线：$l_1 /\!/ l_2 \Longleftrightarrow k_1=k_2$

（2）斜率存在的两条直线：$l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1=-\frac{1}{k_2}$

（3）两条直线的夹角：直线l_1依逆时针方向旋转到l_2所成的角叫做l_1到l_2的角，记作θ_1，则

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

将l_2到l_1的角记作θ_2，则

$$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$$

两条直线的夹角指的是两条直线所夹的锐角或直角。当这两条直线不垂直时，它们之间的夹角θ满足

$$\operatorname{tg}\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

解题时要注意审题，辨别清楚求的是l_1到l_2的角还是l_2到l_1的角，才能确定公式中分子究竟取k_2-k_1还是取k_1-k_2。若是求l_1和l_2的夹角只需取绝对值即可。

本讲直线方程的形式较多，两条直线之间处于不同位置关系时的公式也不少。复习时要注意归纳，了解各种公式之间的相互区别与联系，掌握不同公式的特点和应用条件，做

- 直线方程的四种特殊形式
  - 点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$
  - 斜截式：$y=kx+b$
  - 两点式：$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$
  - 截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$
- 与坐标轴平行的直线方程
  - 平行于x轴的直线：$y=b$
  - 平行于y轴的直线：$x=a$

↓

直线方程一般形式 $Ax+By+C=0$（A或$B\neq0$）

$$k=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}\ (B\neq0)$$

- 点与直线位置关系 $(x_0,\ y_0)$ 与 $Ax+By+C=0$
  - 点在直线上：$Ax_0+By_0+C=0$
  - 点在直线外：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- 两条直线位置关系 $L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$
  - 平行
    - $k_1=k_2$
    - 同时垂直于x轴 $B_1=B_2=0$
  - 相交
    - 斜交 $\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|$
    - 垂直：$k_1=-\dfrac{1}{k_2}$
    - → 求交点 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$
- 直线系：具有某些共性的直线 $Ax+By+C+k(Ax_1+By_1+c)=$

到融会贯通后理解记忆。下面提供一份各种直线方程及点、直线之间的相互关系框图供参考。

三、方法与能力

学习数学离不开解题，解题的作用不仅在于深化对概念的理解和对公式的记忆，以消化学习的内容。而且可通过解各种类型的题学会和掌握各种方法，培养观察、思考、分析、综合等思维能力。掌握方法和提高能力正是学习数学的根本目的。

就本讲而言，要着重掌握以下几种基本方法。

（1） 利用坐标基本公式准确确定几何图形的数量关系；

（2） 利用不同形式的直线方程和直线系方程，求出给定两个独立条件的直线方程，

（3） 利用点、线及线、线间的数量关系，探讨它们相互的几何关系，并能区别于平面几何中利用图形逻辑关系来研究它们的几何关系。

通过这些方法的训练，着重要提高以下几方面的能力。

（1） 数形结合能力。在解题中要全面细致地考察数量关系的几何意义，对于几何形象要善于分析它的代数特征。

（2） 综合运用数学知识的能力。

这些方法和能力要通过解题实践来培养和提高，作题不能搞题海战术或钻难题怪题，要选择有代表性的典型题，要有从基础到综合的过程。基础题型有助于消化基本概念，掌握基本方法；综合题型有助于培养概括、归纳综合能力，以下分别列举本讲一些有代表性的基本题型和综合题型。

1. 基本题型

基本题型一般可归纳为如下五种类型：

（1） 直接利用坐标基本公式求解。如有向线段数量公式；两点间距离公式；定比分点公式及中点公式；斜率公式等；

（2） 求直线方程。直接利用四种特殊形式直线方程求解；用待定系数法求解；

（3） 求点到直线的距离及两条直线的交点；

（4） 判断两条直线的位置关系：平行、垂直、以及交角的大小；

（5） 用解析法证明平面几何中的问题。

下面就上述五种类型分别举例说明。一些简单的单项基本练习题，课本已有列举，在此不再赘述。

（1） 直接利用坐标基本公式求解。

[例1] $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$是同一条直线上任意$n$个点，求证：如下数量关系永远成立。

$$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$$

证明：取A_1，A_2，A_3，…，A_n所在直线为数轴，并设各点坐标依次为x_1，x_2，x_3，…，x_n。

则$A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+\cdots+A_{n-1}A_n$

$=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+(x_4-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$

$=x_n-x_1$

$=A_1A_n$

[说明] 如果若干有向线段在一条直线上，则可取此直线为数轴，各点就有相应的坐标，利用有向线段的数量公式，把关于有向线段数量的运算转化为对应实数的运算。

[例2] 三角形的三个顶点是$A(4,1)$、$B(7,5)$、$C(-4,7)$，

求：(1)$\triangle ABC$ 的$\angle A$的平分线AD的长；(2)$\angle A$ 的外角平分线与CB延长线的交点E的坐标。

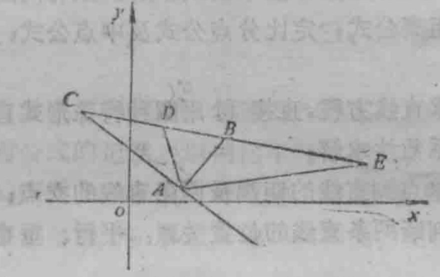


图 1-1

［分析］ 题中要求AD的长，关键在于求出D点坐标，而由于三角形内角平分线性质定理可求得D点分CB的比，再用定比分点公式即可求出D点坐标。

解：(1) $|AB|=\sqrt{(7-4)^2+(5-1)^2}=5$,

$$|AC|=\sqrt{(-4-4)^2+(7-1)^2}=10.$$

$$\because \frac{|CD|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{10}{5}=2,$$

$$\therefore \begin{cases} x_D=\dfrac{-4+2\times7}{1+2}=\dfrac{10}{3}, \\ y_D=\dfrac{7+2\times5}{1+2}=\dfrac{17}{3}. \end{cases}$$

则 $|AD|=\sqrt{\left(4-\frac{10}{3}\right)^2+\left(1-\frac{17}{3}\right)^2}=\frac{10}{3}\sqrt{2}$.

(2) $\because \dfrac{|CE|}{|EB|}=\dfrac{|AC|}{|AB|}=2,$

$\therefore$ E点分CB的比 $\lambda=\dfrac{CE}{EB}=-2$。

则 $\begin{cases} x_E=\dfrac{-4-2\times 7}{1-2}=18, \\ y_E=\dfrac{7-2\times 5}{1-2}=3。\quad \therefore E(18,3)。\end{cases}$

［说明］ 在线段定比分点坐标公式中，只要知道起点、终点坐标和定比λ就可以求出分点的坐标。本题的关键是用角平分线性质定理去求λ。另外第(2)小题，也可把B看作为线段CE的内分点，则

$$\lambda=\frac{CB}{BE}=1, \therefore \begin{cases} 7=\dfrac{-4+x_E}{2} \\ 5=\dfrac{7+y_E}{2}。\end{cases} 得\begin{cases} x_E=18, \\ y_E=3. \end{cases}$$

［例3］ 求证：对任意实数x_1，x_2，y_1，y_2，下面的不等式成立。

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}。$$

［分析］ 此题从形式上看是一个证代数不等式问题，若把它视为纯代数问题来证明是很复杂的。但联想到距离公式可发现$\sqrt{x_1^2+y_1^2}$表示(x_1, y_1)点到原点的距离，其它两个根式也是表示某两点的距离，这样又可把代数问题转化为解析几何问题解决。

证：设点P_1，P_2分别以(x_1, y_1)，(x_2, y_2)为坐标。当O，P_1，P_2不共线时，则OP_1P_2构成一个三角形。

$\because |OP_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$，$|OP_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$，

$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，

① 而 $|P_1P_2|<|OP_1|+|OP_2|$，（三角形两边之和大于

第三边)

$$\therefore\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

当O、P_1、P_2共线，且O在P_1P_2之间时

$$|P_1P_2|=|OP_1|+|OP_2|,$$

$$\therefore\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2};$$

当O，P_1，P_2三点共线，且O在P_1P_2之外时

$$|P_1P_2|<|OP_1|+|OP_2|,$$

$$\therefore\ \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}<\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}.$$

综合上述可知：

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

[说明] 在重点强调“形”到“数”转化的同时，不能忽视“数”到“形”的转化。抓住这一点也可提高我们使用几何方法解决代数问题的能力。要做到这一点，就必须深刻地理解每一个代数式，每一种代数变形，每一种代数式演算方法的几何意义。

[例4] 求一点$M(x, y)$，使它到已知点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$的距离的平方和最小。

解：$|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2$

$$=[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2]+[(x-x_2)^2+(y-y_2)^2]+[(x-x_3)^2+(y-y_3)^2]$$

$$=[3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2]+[3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2]$$

第一个方括号内是关于x的二次函数，其值的大小仅与x的取值有关，同样的，第二个方括号内是关于y的二次函数，