Advanced Algebra

高等代数考研选讲

陈福来　唐曾林　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等代数考研选讲

陈福来　唐曾林　编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

全书按“高等代数”的内容综合分为九章，每章分基本要求、重点与难点、知识点综述、典型例题解析、习题和习题解答五个部分，精选了一些典型例题和习题（主要是部分高等院校的研究生入学试题），由浅入深地介绍了高等代数的解题方法，在解题过程中启发读者打开思路和掌握技巧，有助于加深读者对高等代数主要内容的理解.

本书既可作为开设高等代数选讲课程的教材，又可作为研究生入学考试的复习指导书。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数考研选讲/陈福来，唐曾林编著. —北京：国防工业出版社，2015.4

ISBN 978-7-118-10047-1

Ⅰ. ①高... Ⅱ. ①陈... ②唐... Ⅲ. ①高等代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 059877 号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048）

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 11　**字数** 250 千字

2015 年 4 月第 1 版第 1 次印刷　**印数** 1—4000 册　**定价** 30.00 元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

前　言

“高等代数”是数学类专业最重要的基础课程之一，同时也是数学类专业硕士研究生入学考试的必考课程. 本书系统地总结了高等代数的基本概念、基本理论，通过典型例题介绍了高等代数解题的基本方法和技巧，并通过习题练习达到提高考研应试能力并最终提高数学素养的目的.

全书按高等代数的内容综合分为九章，包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间. 内容编排与《高等代数》(第3版，北京大学数学系)的自然章一致，但为了加强前后知识的联系，对一些问题的讲解突出了综合运用. 每章分基本要求、重点与难点、知识点综述、典型例题解析、习题和习题解答五个部分，精选了一些典型例题和习题(主要是部分高等院校的研究生入学试题)，对一些问题给出了多种处理方法，并对许多问题的解法作了注解，由浅入深地介绍了高等代数的解题方法，在解题过程中启发读者打开思路和掌握技巧，有助于加深读者对高等代数主要内容的理解，从而达到培养学生独立分析问题和解决问题能力的目的.

本书既可作为开设高等代数选讲课程的教材，又可作为研究生入学考试的复习指导书.

本书由陈福来(湘南学院)、唐曾林(湖南文理学院)编写，陈福来统稿、定稿.

由于编者水平所限，书中疏漏和错误在所难免，恳请读者批评、指正.

编　者

目 录

第一章 多项式

1.1 基本要求、重点与难点

1. 基本要求

(1) 掌握数域上的一元多项式的概念、运算、次数定理及应用.

(2) 理解多项式的整除概念和性质,理解和掌握带余除法.

(3) 掌握最大公因式的概念、性质、求法,以及多项式互素的概念和性质.

(4) 理解不可约多项式的概念,掌握多项式的唯一分解定理.

(5) 理解多项式的导数及重因式的概念,掌握多项式有无重因式的判别法.

(6) 掌握多项式函数及多项式的根的概念.

(7) 掌握复、实数域上的多项式因式分解定理.

(8) 熟练掌握有理系数多项式的有理根的求法.

2. 重点

(1) 多项式的概念、运算及性质.

(2) 整除、最大公因式、互素的概念和性质,求法和应用.

(3) 不可约多项式的概念、性质,多项式因式分解定理,复数域和实数域上的多项式的标准分解式及复数域和实数域上的不可约多项式判定.

(4) 多项式函数、多项式的根、多项式的有理根的求法.

3. 难点

(1) 最大公因式的定义.

(2) 一元多项式的整除性,一元多项式的整除.

(3) 最大公因式、互素及不可约多项式等概念的联系与区别.

1.2 知识点综述

一、多项式的基本概念

1. 多项式的定义

形如$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$称为数域$P$上以$x$为文字的一元多项式,其中$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in P$,$n$是非负整数. 当$a_n\neq 0$时,称多项式$f(x)$的次数为$n$,记为$\partial(f(x))=n$,并称$a_nx^n$为$f(x)$的首项,$a_n$为$f(x)$的首项系数,$a_ix^i$为$f(x)$的$i$次项,$a_i$称为$f(x)$的$i$次项系数. 当$a_n=\cdots=a_1=0$,$a_0\neq 0$时,称多项式$f(x)$为零次多项式;当$a_n=\cdots=a_1=a_0=0$时,称多项式$f(x)$为零多项式,零多项式是唯一不定义次数的多项式.

所有系数在数域 P 中的一元多项式全体称为数域 P 上的一元多项式环，记为 $P[x]$. $P[x]$ 构成无穷维线性空间，其一组基为 $1,x,\cdots,x^n,\cdots$. 而数域 P 上的所有次数小于 n 的多项式，再添上零多项式所成的集合，记为 $P[x]_n$，$P[x]_n$ 为 n 维线性空间，其一组基为 $1,x,\cdots,x^{n-1}$.

2. 多项式相等

数域 P 上以 x 为文字的两个一元多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项.

证明两个多项式的相等除了可以利用定义外，还可以在它们首项系数相等的情况下，证明这两个多项式相互整除.

二、多项式的整除性

1. 带余除法

设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则存在唯一的 $q(x),r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

式中：$r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$；$q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商；$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

特别地，用 $x-a$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $f(a)$，用 $ax+b$ 除 $f(x)$ 所得的余式为 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

2. 综合除法

设以 $g(x)=x-a$ 除 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 所得的商与余式分别为 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0$ 和 $r(x)=c_0$，则比较 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 两端 x 的同次幂的系数得 $b_{n-1}=a_n$，$b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$，$\cdots$，$b_0=a_1+ab_1$，$c_0=a_0+ab_0$，这种方法称为综合除法.

当除式为一次式时，用综合除法比用带余除法来得方便，特别是有些问题需要多次以一次多项式作为除式的运算，综合除法更显示它的作用.

3. 整除的定义

设 $f(x),g(x)\in P[x]$，如果存在 $h(x)\in P[x]$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，此时称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式. 否则称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，记为 $g(x)\nmid f(x)$.

4. 整除的性质

(1) 当 $g(x)\neq 0$ 时，$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow r(x)=0$.

(2) 零多项式只能整除零多项式；任一多项式可以整除它本身；任一多项式可以整除零多项式；零次多项式可以整除任一多项式.

(3) 如果 $g(x)\mid f(x)$，则 $kg(x)\mid lf(x)$，其中 k 为非零常数，l 为常数.

(4) 如果 $g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)$，则 $g(x)=cf(x)$，其中 c 为非零常数.

(5) 如果 $g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid h(x)$，则 $g(x)\mid h(x)$.

(6) 如果 $g(x)\mid f_i(x)$，则 $g(x)\,\Big|\,\sum\limits_{i=1}^{m}u_i(x)f_i(x)$，其中 $u_i(x)\in P[x]$，$i=1,2,\cdots,m$.

(7) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

5. 整除的判定方法

(1) 利用整除的定义.

(2) 设 $g(x)\neq 0$ 时,利用带余除法,即 $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow r(x)=0$.

(3) 验根法,设 c 为 $g(x)$ 的任一根,证明 c 必为 $f(x)$ 的根.

(4) 利用因式分解定理.

(5) 利用整除的性质.

三、最大公因式

1. 最大公因式的定义

设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$P[x]$ 中的多项式 $d(x)$ 称为 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式,如果 $d(x)$ 满足:

(1) $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

(2) $f(x),g(x)$ 的公因式全是 $d(x)$ 的因式.

若 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式,则 $cd(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,其中 $c\neq 0$. 用 $(f(x),g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的首项系数为 1 的最大公因式.

2. 最大公因式的性质

(1) 设 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式,则存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

说明:如果对 $f(x),g(x),d(x)\in P[x]$,存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),$$

则 $d(x)$ 未必是 $f(x),g(x)$ 的最大公因式,但如果 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式,则 $d(x)$ 必是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式,这个结论往往用于证明 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

(2) 设 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$,则 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$,这是用辗转相除法求最大公因式的依据.

(3) $(f(x),g(x))=(f(x)+g(x),f(x)-g(x))$.

(4) $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$,其中 $h(x)$ 为首项系数为 1 的多项式.

(5) 最大公因式不因数域 P 的扩大而改变.

3. 求最大公因式的方法

(1) 辗转相除法.

(2) 因式分解.

四、互素多项式

1. 互素多项式的定义

如果 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的最大公因式为非零常数,或 $(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

2. 互素多项式的性质

(1) 如果 $f(x),g(x)\in P[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

(2) 如果$(f(x),g(x))=1$,且$f(x)\mid g(x)h(x)$,则$f(x)\mid h(x)$.

(3) 如果$(f(x),g(x))=1$,且$f(x)\mid h(x)$,$g(x)\mid h(x)$,,则$f(x)g(x)\mid h(x)$.

(4) 如果$(f(x),g(x))=1$,$(f(x),h(x))=1$, 则$(f(x),g(x)h(x))=1$.

(5) 如果$(f(x),g(x))=1$,则如果$(f(x)+g(x),f(x)g(x))=1$.

五、因式分解

1. 不可约多项式定义

如果数域 P 上次数大于或等于 1 的多项式 $p(x)$ 不能表示成数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积,则称 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式.

说明:零多项式和零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的. 多项式的可约性与其所在的数域密切相关,如 x^2-2 在有理数域不可约,但在实数域上可约. 但整除性不因数域的扩大而改变.

2. 不可约多项式的性质

设 $p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,有如下结论:

(1) $cp(x)$ 也是 P 上的不可约多项式,其中 $c\neq0,c\in P$.

(2) 对 P 上的任意多项式 $f(x)$,必有$(p(x),f(x))=1$,或者$p(x)\mid f(x)$.

(3) 对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$,如果$p(x)\mid f(x)g(x)$,则必有$p(x)\mid f(x)$,或者$p(x)\mid g(x)$.

(4) 如果$p(x)\mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中 $s\geqslant2$,则 $p(x)$ 至少可以整除这些多项式中的一个.

3. 因式分解

(1) 唯一性定理:数域 P 上每个次数大于或等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成数域 P 上一些不可约多项式的乘积.

(2) 标准分解式为 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$,其中 a 是 $f(x)$ 的首项系数,$p_1(x)$,$p_2(x)$,$\cdots$,$p_s(x)$ 是数域 P 上首项系数为 1 的互不相同的不可约多项式,$r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数.

(3) 复数域上每个次数大于或等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一次因式的乘积,实数域上每个次数大于或等于 1 的多项式 $f(x)$ 都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

六、重因式

1. 重因式的定义

设 $f(x)\in P[x]$,$p(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式,k 为非负整数,如果 $p^k(x)\mid f(x)$,但 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式.

当 $k=1$ 时,称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式;当 $k\geqslant2$ 时,称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

2. 重因式的性质

(1) $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant1)$ 重因式,则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 特别地,$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

(2) $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(\geqslant1)$ 重因式,则它是 $f(x)$,$f'(x)$,$\cdots$,$f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是

$f^{(k)}(x)$的因式.

(3) $p(x)$是$f(x)$的重因式的充要条件是$p(x)$是$f(x)$与$f'(x)$的公因式,即$p(x)\mid(f(x),f'(x))$.

(4) 多项式$f(x)$没有重因式的充要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素,即$(f(x),f'(x))=1$.

(5) 设$f(x)$的标准分解式为$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$,则

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

七、多项式的根

(1) 数域P上n次多项式($n\geqslant 0$)在数域P的根不可能多于n个(重根按重数计算).

(2) 次数不超过n的多项式$f(x),g(x)$,如果对$n+1$个不同的数$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$,有$f(a_i)=g(a_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$,则$f(x)=g(x)$.

(3) 代数基本定理:每个次数大于或等于1的复系数多项式在复数域中有1个根.

(4) n次复系数多项式恰有n个复根(重根按重数计算).特别地,

$$x^n-1=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})(x-1),$$

式中

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\varepsilon^n=1.$$

(5) 如果a是实系数多项式$f(x)$的复根,则a的共轭数$\bar{a}$也是$f(x)$的根.

八、有理多项式

1. 本原多项式定义

如果一个非零的整系数多项式$f(x)$的系数互素,则称$f(x)$是一个本原多项式.

2. 高斯引理

两个本原多项式的乘积仍是本原多项式.

如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理多项式的乘积,则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

设$f(x)$是整系数多项式,$g(x)$为本原多项式,如果$f(x)=g(x)h(x)$,其中$h(x)$是有理多项式,则$h(x)$一定是整系数多项式.

3. 艾森斯坦判别法

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,如果存在素数$p$,使得

(1) $p\nmid a_n$.

(2) $p\mid a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$.

(3) $p^2\nmid a_0$.

则$f(x)$在有理数域上是不可约的.

说明:对于整系数多项式$f(x)$,如果不能直接利用艾森斯坦判别法,可考虑用变量替换$x=ay+b$(a,b为整数且$a\neq 0$),使$g(y)=f(ay+b)$满足艾森斯坦判别条件.

4. 有理根的判定

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根,其中$r,s$互素,则必有$s\mid a_n,r\mid a_0$. 特别地,如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$,则$f(x)$的有理根都是整数根,而且是$a_0$的因子.

1.3 典型例题解析

例 1-1 设$f(x),g(x),h(x)$均为实系数多项式,证明:若有$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$,则

$$f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

证明 当$f(x)\neq 0$时,等式左端是偶次多项式,右端是奇次多项式或零多项式,这是不可能的.

当$f(x)=0$时,若$g(x)$与$h(x)$不同时为零,等式左端是零多项式,右端不是零多项式,也不可能.

故$f(x)=g(x)=h(x)=0$.

例 1-2 设$f(x)$为一多项式,若

$$f(x+y)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbf{R}.$$

则$f(x)=0$或$f(x)=1$.

证明 若$f(x)=0$,则证毕. 若$f(x)\neq 0$,由于

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=f^2(x),$$

所以$f(x)$只能是零次多项式. 令$f(x)=a\neq 0$,由

$$a=f(0)=f(0+0)=f^2(0)=a^2$$

知$a=1$,即$f(x)=1$.

例 1-3 证明:$x^k-1\mid x^n-1\Leftrightarrow k\mid n$.

证明 "$\Leftarrow$"如果$k\mid n$,则可设$n=mk$,则

$$\begin{aligned}x^n-1&=x^{mk}-1=(x^k)^m-1\\&=(x^k-1)((x^k)^{m-1}+(x^k)^{m-2}+\cdots+x^k+1),\end{aligned}$$

故$x^k-1\mid x^n-1$.

"$\Rightarrow$"用反证法. 设$k\nmid n$,则$n=qk+r$,其中$0<r<k$,于是

$$\begin{aligned}x^n-1&=x^{qk+r}-1=x^{qk}\cdot x^r-x^r+x^r-1\\&=x^r(x^{qk}-1)+(x^r-1).\end{aligned}$$

因为

$$x^k-1\mid x^n-1,x^k-1\mid x^{qk}-1.\therefore x^k-1\mid x^r-1,$$

矛盾,故$k\mid n$.

例 1-4 当l,m,n满足什么条件时$x^2+lx+1\mid x^3+mx+n$.

解 用待定系数法. 如果$x^2+lx+1\mid x^3+mx+n$,则存在$x-a$,使得

$$x^3 + mx + n = (x^2 + lx + 1)(x - a),$$

即
$$x^3 + mx + n = x^3 + (l - a)x^2 + (1 - al)x - a,$$

故
$$l - a = 0, \quad m = 1 - al, \quad n = -a.$$

故当 l,m,n 满足 $l + n = 0, m + l^2 - 1 = 0$ 时, $x^2 + lx + 1 \mid x^3 + mx + n$.

例 1-5 求 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 并求 $u(x), v(x)$, 使得 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

解 利用辗转相除法,有

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), r_1(x) = r_2(x)q_3(x),$$

其中

$$q_1(x) = x, r_1(x) = -2x^2 - 3x - 1, q_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, r_2(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}.$$

故 $(f(x), g(x)) = x + 1$.

$$\begin{aligned}(f(x), g(x)) &= -\frac{4}{3}r_2(x) = -\frac{4}{3}(g(x) - r_1(x)q_2(x)) \\ &= -\frac{4}{3}(g(x) - (f(x) - g(x)q_1(x))q_2(x)) \\ &= -\frac{4}{3}q_2(x)\, f(x) - \frac{4}{3}(1 + q_1(x)q_2(x))g(x) \\ &= \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)f(x) + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)g(x).\end{aligned}$$

故 $u(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, v(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

例 1-6 设 $f(x) = x^3 + (1 + t)x^2 + 2x + 2u, g(x) = x^3 + tx + u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t, u 的值.

解 当 $1 + t \neq 0$ 时,有

$$f(x) = g(x) \cdot 1 + r_1(x), g(x) = r_1(x)\left(\frac{1}{1 + t}x + \frac{t - 2}{(1 + t)^2}\right) + r_2(x),$$

其中

$$\begin{aligned} r_1(x) &= (1 + t)x^2 - (2 - t)x + u, r_2(x) \\ &= \frac{t(1 + t)^2 - u(1 + t) + (2 - t)^2}{(1 + t)^2}x + u - \frac{u(t - 2)}{(1 + t)^2}.\end{aligned}$$

因为 $r_1(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式的充要条件是 $r_2(x) = 0$,即

$$\begin{cases} t(1 + t)^2 - u(1 + t) + (2 - t)^2 = 0, \\ u(1 + t)^2 - u(t - 2) = 0. \end{cases}$$

解方程组,得

$$\begin{cases} u = 0, \\ t = -4, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0, \\ t = \frac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0, \\ t = \frac{1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}, \end{cases} \begin{cases} u = -7 - \sqrt{11}\mathrm{i}, \\ t = \frac{-1 + \sqrt{11}\mathrm{i}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} u = -7 + \sqrt{11}\mathrm{i}, \\ t = \frac{-1 - \sqrt{11}\mathrm{i}}{2}. \end{cases}$$

当 $1+t=0$ 时,$r_1(x)$ 为一次式,$f(x)$ 与 $g(x)$ 不可能有二次的最大公因式.

例 1-7 证明:如果 $f(x)\mid f(x^n)$,则 $f(x)$ 的根只能是 0 或单位根.

证明 设 α 是 $f(x)$ 的任一根,则 $x-\alpha\mid f(x)$,由 $f(x)\mid f(x^n)$,有 $x-\alpha\mid f(x^n)$,从而 $f(\alpha^n)=0$,这说明 α^n 是 $f(x)$ 的根. 以此类推,则 $\alpha,\alpha^n,\alpha^{n^2},\cdots,\alpha^{n^k},\cdots$ 都是 $f(x)$ 的根,但 $\partial(f(x))$ 是有限正整数,因此 $f(x)$ 只有有限个根,所以存在 $k>l$,有 $\alpha^{n^k}=\alpha^{n^l}$,即

$$\alpha^{n^l}(\alpha^{n^k-n^l}-1)=0.$$

由此可知,α 是 0 或单位根.

例 1-8 如果 $(x-\alpha)^k\mid f(x^n)$,证明:$(x^n-\alpha^n)^k\mid f(x^n)$($k\geqslant1,n\geqslant1$,是正整数,$\alpha$ 是非零常数).

证明 令 $F(x)=f(x^n)$,则 $(x-\alpha)^k\mid F(x)$,即 α 是 $F(x)$ 的 k 重根,于是 α 是 $F'(x)=f'(x^n)nx^{n-1}$ 的 $k-1$ 重根.

因为 $\alpha\neq0$,所以 $f'(\alpha^n)=0$,即 α 是 $f'(x^n)$ 的 $k-1$ 重根,以此类推,则 α 是 $f''(x^n)$ 的 $k-2$ 重根,……,α 是 $f^{(k-1)}(x^n)$ 的 1 重根,即 $f(\alpha^n)=f'(\alpha^n)=\cdots=f^{(k-1)}(\alpha^n)=0$,从而 α^n 是 $f(x)$ 的 k 重根,于是 $f(x)=(x-\alpha^n)^k\varphi(x)$,所以 $f(x^n)=(x^n-\alpha^n)^k\varphi(x^n)$,故 $(x^n-\alpha^n)^k\mid f(x^n)$.

例 1-9 证明:如果 $x-1\mid f(x^n)$,则 $x^n-1\mid f(x^n)$.

证明 由于 $x-1\mid f(x^n)$,故 $f(1)=0$,设 $\varepsilon^0,\varepsilon^1,\cdots,\varepsilon^{n-1}$ 为 n 次单位根,则 $f((\varepsilon^k)^n)=f(1)=0$,故 $x-\varepsilon^k\mid f(x^n)$,而当 $i\neq j$,$(x-\varepsilon^i,x-\varepsilon^j)=1$. 故

$$(x-\varepsilon^0)(x-\varepsilon^1)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})\mid f(x^n),$$

即 $x^n-1\mid f(x^n)$.

例 1-10 设 $f(x)$ 是复数域中的 n 次多项式,且 $f(0)=0$. 令 $g(x)=xf(x)$,证明:如果 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 能够整除 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$,则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重零根.

证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,(a_i\in C,a_n\neq0).$$

由 $f(0)=0$ 知,0 是 $f(x)$ 的根. 又由 $g(x)=xf(x)$,得 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$. 由题设知 $f'(x)\mid g'(x)$,从而由上式得 $f'(x)\mid f(x)$. 由 $f'(x)\mid f(x)$ 及 $\partial(f(x))=\partial(f'(x))+1$ 知,存在多项式 $cx+d$ 使 $f(x)=f'(x)(cx+d)$. 比较系数得 $c=\frac{1}{n}$,此时

$$f(x)=f'(x)\left(\frac{1}{n}x+d\right)=\frac{1}{n}f'(x)(x+nd)=\frac{1}{n}f'(x)(x-b),$$

其中 $b=-\frac{1}{n}d$. 于是 $(f(x),f'(x))=\frac{1}{na_n}f'(x)$,即为首项系数为 1 的 $n-1$ 次多项式. 故

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=\frac{\frac{1}{n}f'(x)(x-b)}{\frac{1}{na_n}f'(x)}=a_n(x-b).$$

由于 $\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 包含了 $f(x)$ 的全部不可约因式,所以 $f(x)$ 的不可约因式只能是 $x-b$ 及它的非零常数倍,考虑到 $f(x)$ 的次数是 n,知 $f(x)$ 具有形式 $f(x)=a(x-b)^n$. 由于 0 是

$f(x)$的根,所以 0 是$f(x)$的 n 重根,即$f(x)=ax^n(a\neq0)$. 故 $g(x)=xf(x)=ax^{n+1}$,即证 $g(x)$有 $n+1$ 重零根.

例 1-11 设$f(x)$是有理数域 Q 上的一个 m 次多项式($m\geqslant0$),n 是大于 m 的正整数. 证明:$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的实根.

证明 用反证法. 若$\sqrt[n]{2}$是$f(x)$的实根,那么 $x-\sqrt[n]{2}$可以整除$f(x)$(在 $R[x]$内). 但$(x-\sqrt[n]{2})\mid(x^n-2)$,且由艾森斯坦判别法知 x^n-2 在 $Q[x]$中不可约,所以 x^n-2 是以$\sqrt[n]{2}$为根的最低次的有理系数的不可约多项式,从而$(x^n-2)\mid f(x)$. 这样$\partial(f(x))\geqslant n>m$,这与$\partial(f(x))=m$矛盾. 故$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的实根.

例 1-12 设 p 是素数,求证:$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在 Q 上不可约.

证明 令 $x=y+1$,则

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}=\frac{(y+1)^p-1}{y}$$
$$=y^{p-1}+C_p^1y^{p-2}+\cdots+C_p^iy^{p-i-1}+\cdots+C_p^{p-1},$$

将上式右端记为 $g(y)$,则 $p\nmid1$,$p\mid C_p^i(1\leqslant i\leqslant p-1)$,而 $p^2\nmid C_p^{p-1}$,故由艾森斯坦判别法知 $g(y)$在 Q 上不可约,从而$f(x)$在 Q 上也不可约.

例 1-13 设 $p(x)$是次数大于零的多项式,如果对于任意多项式$f(x)$,$g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$可以推出 $p(x)\mid f(x)$或者 $p(x)\mid g(x)$,则 $p(x)$是不可约多项式.

证明 用反证法. 若 $p(x)$可约,即 $p(x)=p_1(x)p_2(x)$且 $0<\partial(p_i(x))<\partial(p(x))$,$i=1,2$. 令$f(x)=p_1(x)$,$g(x)=p_2(x)$,则$p(x)\mid f(x)g(x)$,但$p(x)\nmid f(x)$,$p(x)\nmid g(x)$,与假设矛盾. 故 $p(x)$不可约.

说明 证明多项式不可约,一般用反证法. 但如果给出了具体的整系数多项式的表达式,考虑艾森斯坦判别法.

例 1-14 设复系数非零多项式$f(x)$ 没有重因式,证明:$(f(x)+f'(x),f(x))=1$.

证明 由$f(x)$无重因式,有$(f'(x),f(x))=1$,任取$f(x)+f'(x)$与$f(x)$的公因式 $\varphi(x)$,则 $\varphi(x)\mid f(x)$且 $\varphi(x)\mid(f(x)+f'(x))$,于是 $\varphi(x)\mid[(f(x)+f'(x))-f(x)]$,即 $\varphi(x)\mid f'(x)$,即 $\varphi(x)$是 $f(x)$和 $f'(x)$的公因式,从而 $\varphi(x)=1$,故$(f(x)+f'(x),f(x))=1$.

例 1-15 设$f(x)$是一个整系数多项式,证明:如果$f(0)$与$f(1)$都是奇数,则$f(x)$无整数根.

证明 用反证法. 设$f(x)$有一整数根 a,则 $x-a\mid f(x)$,令 $f(x)=(x-a)g(x)$,其中 $g(x)\in Q[x]$,又 $x-a$ 是本原多项式,所以 $g(x)\in Z[x]$,则

$$f(0)=-ag(0),f(1)=(1-a)g(1),$$

从而 $a\mid f(0)$,$a-1\mid f(1)$,但 $a,a-1$ 中必有一个为偶数,矛盾. 故$f(x)$无整数根.

1.4 习 题

1. 在 Q 上将多项式$\frac{1}{7}[(x+1)^7-x^7-1]$分解为不可约多项式的乘积.

2. 若 $x-1$ 除多项式 $f(x)$ 的余式为 3，$x-2$ 除 $f(x)$ 的余式为 4，则 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 的余式是________.

3. 多项式 $f(x)$ 被 $x-1$ 除时余式为 5，被 $x-1$ 除时余式为 -1，则当 $f(x)$ 被 $(x-1)(x+1)$ 除时余式为________.

4. 若 $f(x)\mid g(x)$，$f^2(x)$ 不整除 $g(x)$，则 $f^2(x)$ 不整除 $g^2(x)$，对吗？

5. 若 $ax+b\mid f^k(x)$，k 为正整数，是否一定有 $ax+b\mid f(x)$？为什么？

6. 有理数域上的不可约多项式 $p(x)$，若 $p(x)$ 的系数都是整数，那么 $p(x)$ 是本原多项式吗？为什么？

7. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式为 $d(x)$，则 $f(x^2)$ 与 $g(x^2)$ 的最大公因式是否必为 $d(x^2)$？

8. 求 t 的值，使 $f(x)=x^3+6x^2+3tx+8$ 有重根.

9. 已知 $1+\mathrm{i}$ 是 $f(x)=x^6-7x^5+22x^4-40x^3+44x^2-28x+8$ 的二重根，求 $f(x)$ 的其余 4 个根.

10. 设多项式 $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$，$g(x)=x^2-x-1$.

(1) 求最大公因式 $(f(x),g(x))=1$；

(2) 证明：若方阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $g(\boldsymbol{A})=0$，则 $f(\boldsymbol{A})$ 必可逆.

11. 当 a,b 满足什么条件时，多项式 $f(x)=x^3+3ax+2b$ 有重根.

12. 证明：若 $(x-1)\mid f(x^3)$，则 $(x^3-1)\mid f(x^3)$.

13. 设多项式 $f(x)$，$g(x)$ 互素，证明：

(1) $(f(x)g(x),f(x)-g(x))=1$；

(2) $(f(x)g(x),f^2(x)-g^2(x))=1$.

14. $f(x)$ 为整系数多项式，且 $f(1)=1$，证明 $f(3)\neq 0$.

15. 设 P 为数域，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in P[x]$，其中 $|a_0|\leqslant|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_n|$，证明：如果 $f(-3)=0$，则 $f(x)=0$.

16. 设 a,b,c 为两两不同的整数，证明 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+1$ 在有理数域上是不可约的.

17. 如果 $(x^2+2x+4)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，则

(1) $(x-8)\mid f_1(x)$，$(x-8)\mid f_2(x)$；

(2) 证明多项式 $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 没有重根.

18. 证明：

(1) $x^2+x+1\mid x^{3r+2}+x^{3s+1}+x^{3t}$，其中 r,s,t 是非负整数；

(2) $(x^m+1,x^n+1)=x+1$，其中 m,n 互素且都是正奇数.

19. (1) 证明：$(x^m,(1+x)^n)=1$，其中 m,n 为任意正整数；

(2) 在实数域上分解因式 x^6+27；

(3) 设 $f(x)$ 为一整系数多项式，若 $f(x)-1$ 有 5 个不同的整数根，证明 $f(x)-12$ 无整数根.

20. 设 $f(x)$ 为一整系数多项式，若 $f(x)-2011$ 有 5 个不同的整数根. 证明 $f(x)-2014$ 无整数根.

21. 已知多项式$f(x)=f_1(x)f_2(x)$,$g(x)=m(x)d(x)$,其中$d(x)$是$f_1(x)$和$f_2(x)$的最大公因式,且$\partial(m(x))<\max\{\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x))\}$,符号$\partial(\ )$表示该多项式的次数,证明:存在多项式$u_1(x)$和$u_2(x)$,使得$g(x)=u_1(x)f_2(x)+u_2(x)f_1(x)$,且$\partial(u_k(x))<\partial(f_k(x))$,$k=1,2$.

22. 数域P上一个$n(>0)$次多项式$f(x)$能被它的导数$f'(x)$整除的充要条件是$f(x)=a(x-b)^n$,其中$a,b\in P$.

23. 设$f(x)$与$g(x)$互素当且仅当$f(x^n)$与$g(x^n)$互素(其中n为正整数).

24. 设$f(x)$是一个不可约多项式,a和$\frac{1}{a}$都是$f(x)$的根. 又若b也是$f(x)$的根,试证$\frac{1}{b}$也是$f(x)$的根.

25. 设$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式,证明:

(1) $d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式的充要条件是

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x);$$

(2) 若$h(x)$是任一首项为1的多项式,则

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x).$$

1.5 习题解答

1. 解:

$$\frac{1}{7}[(x+1)7-x^7-1]=x^6+3x^5+5x^4+5x^3+3x^2+x$$
$$=x(x+1)(x^4+2x^3+3x^2+2x+1).$$

2. $x+2$.

分析:

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-1)g(x)+3=[q(x)(x-2)+a](x-1)+3\\&=q(x)(x-2)(x-1)+ax-a+3\\&=q(x)(x-2)(x-1)+a(x-2)+a+3\end{aligned}$$

所以$a+3=4\Rightarrow a=1$.

3. $3x+2$.

4. 解:不对,$f(x)\mid g(x)\Rightarrow g(x)=f(x)h(x)\Rightarrow g^2(x)=f^2(x)h^2(x)$.

5. 解:$ax+b\mid f^k(x)\Rightarrow f^k\left(-\frac{b}{a}\right)=0\Rightarrow f\left(-\frac{b}{a}\right)=0\Rightarrow ax+b\mid f(x)$.

6. 解:不是,如$2x+2$.

7. 解:$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)\Rightarrow f(x^2)u(x^2)+g(x^2)v(x^2)=d(x^2)$.

又$d(x^2)\mid f(x^2)$,$d(x^2)\mid g(x^2)$,故则$f(x^2)$与$g(x^2)$的最大公因式是$d(x^2)$.

8. 解:$f(x)$,$f'(x)$有重根.

$$f(x)=f'(x)\cdot\frac{1}{3}(x+2)+(2t-8)(x-1).$$