研究生教学用书

·部委“九五”重点教材·

高等流体力学

Gao Deng
Liu Ti
Li Xue

王献孚 熊鳌魁 编著

华中科技大学出版社

内容提要

本书是为船舶与海洋工程专业研究生编写的流体力学课程的教科书，它在大学本科教材的基础上，对有关问题做了高一层次的分析，以满足现代船舶流体力学研究对基础流体力学的需求。

全书着重阐述流体力学基本理论体系，在强调基础理论的完整性的同时，兼顾了后续专业课程和研究工作中的要求。内容包括：流体力学基础，流体运动学和旋涡运动理论，流体动力学基本方程式，势流理论，自由表面效应，工程湍流模拟等六章。

本书在内容取舍、体例安排上都力求精炼和注意应用，在理论表述上深入浅出，推理清楚，物理概念明确，通过学习能有效地提高读者的理论修养。书中设计的习题和复习思考题具有典型性和启发性，可以引导读者对内容的深入理解，并有利于自学。

本书是一本起点高、观点新的流体力学教材，除可作为本专业研究生教科书外，还可作为有关专业教师、研究人员和广大工程技术人员的参考用书。

作 者 的 话

本书是根据全国高校船舶类教材委员会对全国高校船舶专业“九五”重点教材立项的选题编写的。

“高等流体力学”作为船舶工程、船舶流体力学学科研究生的一门基础学位课程，它在船舶工程专业本科“流体力学”教材基础上，为反映当代船舶流体力学研究对基础流体力学的需求，对流体力学基本理论和方法作高一层次的分析。本教材虽然密切注意到专业应用的需要，但强调的仍是基础理论的学习，不扩大到更多专业问题的具体应用，它在培养研究生的教学中的地位是属于一门基础课程。

基于以上考虑，虽然已出版有“流体力学”方面的多种专著，但有的篇幅过大、范围过广、专业针对性不强，作为教材在使用中都感到有颇多的不足之处。为适应本学科进一步发展的需要，出版一本有专业针对性的“高等流体力学”研究生用书，在全国高校船舶类专业师生中已有共识，从而有了本书的出版。

本书的宗旨，不同于一般的理论流体力学，但亦不代替船舶流体力学。本教材的主要任务是使学生对流体力学理论有进一步提高和更深入的掌握，为进一步学习船舶流体力学专业问题(船舶粘性阻力理论，船舶兴波阻力理论，波浪与海洋结构物相互作用理论，船舶推进螺旋桨理论，计算船舶流体力学，船用翼理论、船舶操纵性理论等等)打下坚实的基础。

全书分六章：第一章流体力学基础，作为学习本课程的一些基础，包括中级流体力学内容复习，矢量场论公式，笛卡儿张量简介等等，仅供查阅。第二章流体运动学和旋涡运动理论；第三章流体动力学基本方程；第四章势流理论；第五章自由表面效应，包括气泡动力学、水翼空化理论基础以及水波理论等；第六章工程湍流模拟。在第二章到第六章中，每章都附有习题和复习思考题。考虑到本课程学习的首要任务是理论的掌握和理解，因此安排的习题没有较大的难度，数量也不很多(70 题)。复习思考题的目的仅供对部分内容做复习参考，从中可获得一定的启发。

全书按 70 学时教学内容编写，对 60 学时和 40 学时的课程，需适当减少一些章节。本书初稿曾在原武汉交通科技大学船舶流体力学专业研究生中讲授过两次，学生

序　言

气、液、固物态三相中，流体就占了两相。作为研究流体的运动规律及其与物体相互作用的机理的一门专门学科，流体力学涉及范围之广及其在相关的自然科学和工程技术领域中的重要性自不待言。

王献孚教授等人编著的“高等流体力学”一书属全国高校船舶专业“九五”重点教材选题之一，是面向特定专业范围的基础理论方面高起点的教科书。旨在使船舶与海洋工程专业的研究生在已经掌握一定的流体力学知识的基础上，进一步在理论修养上得到提高，从而为后续专业课程学习和研究工作开展打下坚实的理论基础。

著书固难，编著教材则别有一番难处，尤其是“流体力学”这一类面对特定专业范围的基础理论方面的教材。对应的专业方向各不相同，偏理偏工大相径庭，既要考虑到基础理论体系的完整性，也必须兼顾后续专业课程的需要、学生知识面的拓宽和学科最新的发展，又有教学时数的限制。教材内容编排取舍之际，学识、经验、悟性缺一不可；见仁见智，每现匠心，显示出编著者对学科的独立见解。

王献孚教授执教40余年，可谓桃李遍天下；在船舶流体力学的相关研究领域中多有建树，著述甚丰。今挟数十年从事船舶工程教学、科研之经验，厚积薄发，精心编著了本书。全书选材削枝强干，举凡六章，容量适中。第一章为基础流体力学若干知识的回顾，后续各章偏重于对流体力学基本理论体系的阐述；在粘性流体力学方面，考虑到后续专业课程的需要和本专业研究范围的特点，强调了湍流的工程模拟。理论表述上深入浅出，推理层次分明，物理概念清晰，对提高研究生的理论修养颇有助益。书中习题和复习题的设计有典型性和启发性，能引导学生对教学内容作深层次的思考和理解，也有利于学生复习和在教师指导下自学。总体上看，本教材既注意到后续专业课程和研究工作中的需要，也强调了基础理论的完整性，适合于本专业或相近专业的研究生使用；对有关专业的教师和研究人员来说，也是一本很好的参考用书。

任何一本教材均不可能包罗万象，面面俱到。“迷时师度，悟时自度”，苟能不拘一句一式，融会贯通，必可举一反三，达到无滞无碍的圆通境界；否则，虽多诵经，不解何意。

愿本书的出版在提高研究生培养质量上发挥其应有的作用。

蒙王献孚教授抬爱，嘱我作序，当之有愧，却之不恭。有感而发，聊充序言。

上海交通大学
缪国平　谨识

接受情况良好。

上海交通大学缪国平教授主审了本书的正式书稿，提出了许多宝贵意见，并写了序言，使本书质量有进一步提高，特此致以衷心的感谢。

本书除可供船舶工程和海洋工程专业研究生做教材外，其他相关专业的师生和工程科技人员均可作为参考用书。

本书第六章由熊鳌魁博士撰写，其他各章均由王献孚主笔，限于作者水平，难免还有错误和不妥之处，恳请使用本书的教师和读者随时赐教。

作者
武汉理工大学
2002.10

目　　录

第一章　流体力学基础

本章叙述在以后各章节中要用到的一些基础流体力学的结论，假定读者都已学过了，为便于复习和应用，对所引述的有关内容作简要的介绍。

§1-1　高斯定理

速度矢量$\boldsymbol{v}$的散度$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$（相对体积膨胀率）的定义：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}A \tag{1-1}$$

式中，ΔA为微元体积$\Delta\tau$的表面积；$\boldsymbol{n}$为ΔA上外法向单位矢量。$\mathrm{div}\boldsymbol{v}$的物理意义为单位时间内通过封闭表面的流体体积与该封闭表面所包围的体积之比值，当体积缩小到一点时的极限值。因为$\Delta\tau$的形状是任意的，将它取为直角坐标系中微元平行六面体体积$\Delta x\Delta y\Delta z$，如图1-1所示，并在其六个边界平面上示出速度分量$\boldsymbol{v}(u,v,w)$之间关系。直接对指定的六面体计算定义式(1-1)右边的曲面积分，忽略高阶小量后，即有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{v}=&\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y\Delta z}\Big[\Big(u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\Big)\Delta y\Delta z-u\Delta y\Delta z+\Big(v+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\Big)\Delta x\Delta z\\&-v\Delta x\Delta z+\Big(w+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\Big)\Delta x\Delta y-w\Delta x\Delta y\Big]=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned} \tag{1-2}$$

引入算符∇（读nabla）在直角坐标系中的定义式：

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-3}$$

故有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-4}$$

按照式(1-1)，对微元体积$\Delta\tau$有

$$\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}A=(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\Delta\tau \tag{1-5}$$

若将任意有限体积τ分为大量小体积$\Delta\tau$，并以A表示包围τ的表面积，对式(1-5)求和。由于沿两个相邻小体积的公共边界上外法线方向$\boldsymbol{n}$的符号相反，求和时就彼此相互抵消，剩下的

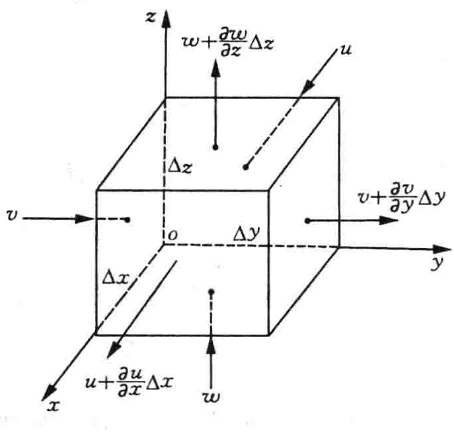

图1-1　微元平行六面体上流体速度通量

只有沿体积τ的表面外部的面积分，因此就有如下积分公式成立：

$$\int_A \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}A = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau \tag{1-6}$$

此即高斯散度定理。注意式中$\boldsymbol{n}$定义为区域τ边界的外法线单位矢量。若$\boldsymbol{n}$定义为区域τ边界的内法线单位矢量，则要将等式(1-6)的一端加一个负号。高斯散度定理中的$\boldsymbol{v}$若为常量，则$\nabla \cdot \boldsymbol{v}=0$，且$\boldsymbol{v}$可以提到面积分号之外，此时高斯散度定理便退化为对任意封闭曲面都成立的如下几何关系式

$$\int_A \boldsymbol{n} \mathrm{d}A = \boldsymbol{0} \tag{1-7}$$

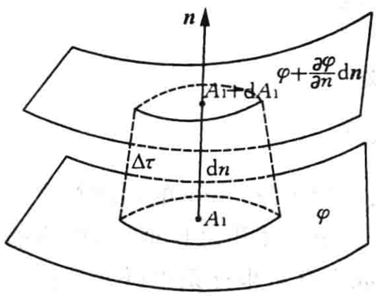

图1-2 两个相邻等位面之间流体小体积$\Delta\tau$

利用标量函数$\varphi(x,y,z)$梯度的定义式

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1-8}$$

考察两个相邻等位面φ和$\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}\boldsymbol{n}$之间（距离为$\mathrm{d}\boldsymbol{n}$）所截取的任一小体积$\Delta\tau$，其表面积为$\Delta A$，如图1-2所示，$\boldsymbol{n}$为等位面上外法线单位矢量，计算包围$\Delta\tau$的曲面的面积分$\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}'\varphi\,\mathrm{d}A$。式中$\boldsymbol{n}'$是整个积分曲面的外法线单位矢量，曲面面积$\Delta A$包括该柱体截面积$A_1$和$A_1+\mathrm{d}A_1$以及侧面积之和。忽略高阶小量，在侧面上的$\varphi$值可以认为是常数，故有

$$\begin{aligned}\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}'\varphi\,\mathrm{d}A &= -\boldsymbol{n}\varphi A_1 + \boldsymbol{n}\left(\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}n\right)(A_1+\mathrm{d}A_1) + \int_{\text{侧面}}\boldsymbol{n}'\varphi\,\mathrm{d}A \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}A_1\mathrm{d}n + \varphi(\boldsymbol{n}\mathrm{d}A_1 + \int_{\text{侧面}}\boldsymbol{n}'\mathrm{d}A)\end{aligned} \tag{1-9}$$

因为

$$\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}'\mathrm{d}A = -\boldsymbol{n}A_1 + \boldsymbol{n}(A_1+\mathrm{d}A_1) + \int_{\text{侧面}}\boldsymbol{n}'\mathrm{d}A = 0$$

将这一关系式代入式(1-9)，则有

$$\int\boldsymbol{n}'\varphi\,\mathrm{d}A = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}A_1\mathrm{d}n = \nabla\varphi\cdot\nabla\tau$$

由此可以得到标量函数梯度的积分表达式

$$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\varphi = \lim_{\Delta\tau\to0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}\varphi\mathrm{d}A \tag{1-10}$$

类似于高斯散度定理，可将式(1-10)推广到任意有限体积τ和τ的表面积A，获得高斯梯度定理为

$$\int_A \boldsymbol{n}\varphi \mathrm{d}A = \int_\tau \nabla \varphi \mathrm{d}\tau \qquad (1\text{-}11)$$

此处$\boldsymbol{n}$指积分曲面外法向单位矢量。在直角坐标系中，高斯梯度定理的分量形式又可写为

$$\begin{aligned} \int_A n_x\varphi\,\mathrm{d}A &= \int_\tau \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}\tau \\ \int_A n_y\varphi\,\mathrm{d}A &= \int_\tau \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}\tau \\ \int_A n_z\varphi\,\mathrm{d}A &= \int_\tau \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \qquad (1\text{-}12)$$

式中，(n_x,n_y,n_z)是$\boldsymbol{n}$的方向数。

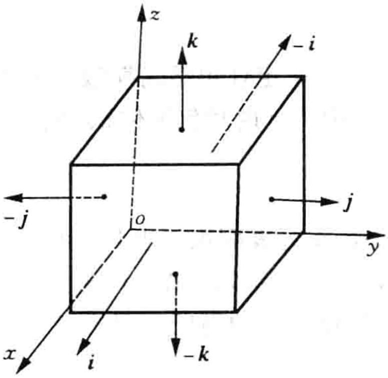

图 1-3　微元平行六面体表面上外法向矢量

利用速度矢量$\boldsymbol{v}(u,v,w)$的旋度Ω的定义式

$$\Omega = \nabla \times \boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v} \qquad (1\text{-}13)$$

在直角坐标中展开为

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1\text{-}14)$$

考虑微元平行六面体$\Delta x\Delta y\Delta z$(图 1-3)的下列面积为

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}A = & \left[-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{i}\times\left(\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\Delta x\right)\right]\Delta y\Delta z \\ & + \left[-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{j}\times\left(\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\Delta y\right)\right]\Delta x\Delta z \\ & + \left[-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\Delta z\right)\Delta x\Delta y\right] \\ = & \left[\left(\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\right) + \left(\boldsymbol{j}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\right) + \left(\boldsymbol{k}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z \end{aligned}$$

因　$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}u+\boldsymbol{j}v+\boldsymbol{k}w$，$\boldsymbol{i}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{k}-\frac{\partial w}{\partial x}\boldsymbol{j}$；$\boldsymbol{j}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{k}+\frac{\partial w}{\partial y}\boldsymbol{i}$；$\boldsymbol{k}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{j}-\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{i}$，所以

$$\begin{aligned} \int_{\Delta A} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}A &= \left[\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z \\ &= (\nabla \times \boldsymbol{v})\mathrm{d}\tau \end{aligned} \qquad (1\text{-}15)$$

由此可得到速度矢量旋度的积分定义式

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta A}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}A \qquad (1\text{-}16)$$

类似于推导高斯散度定理，将式(1-16)推广到任意有限体积τ和由τ所包围的表面积A，获得高斯旋度定理为

$$\int_A \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}A = \int_\tau \nabla \times \boldsymbol{v} \mathrm{d}\tau \tag{1-17}$$

高斯定理包括高斯散度定理、高斯梯度定理和高斯旋度定理，可统一表示为：令X是体积τ内和包围体积τ的表面积A上某一标量函数或矢量函数，由高斯定理得出

$$\int_\tau (\nabla\ X) \mathrm{d}\tau = \int_A \boldsymbol{n} X \mathrm{d}A \tag{1-18}$$

式中，$\boldsymbol{n}$为表面积A上外法线单位矢量。如令$X=\varphi$(标量函数)，则有梯度形式高斯定理式(1-11)；如令$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{v}$(矢量函数)，则有散度形式高斯定理式(1-6)；如令$\boldsymbol{X}=x\boldsymbol{v}$，则为旋度形式的高斯定理式(1-17)。这里只指出，当$\boldsymbol{X}$为张量，以上张量形式的高斯定理亦成立。

高斯定理在流体力学公式推导中有广泛的应用。

§1-2 雷诺输运定理和流体运动方程

考虑流体中某体积$\tau(t)$及其表面积$A(t)$，它们以瞬时速度$\boldsymbol{V}$在流体中移动，如图1-4所示，$\tau(t)$和$A(t)$在空间中位置和大小均随时间t而变化。对任一流场量$f(x,y,z,t)$，著名的雷诺输运定理指出：

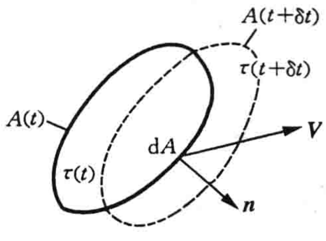

图1-4 流体某体积$\tau(t)$在运动过程中变化

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau &= \int_{\tau(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\tau(t)} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \int_{A(t)} f\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{1-19}$$

该定理可简要证明如下。考虑时间增量δt后$\tau(t)$和$A(t)$的变化，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{\tau(t+\delta t)} f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau - \int_{\tau(t)} f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau\right] \\ &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_\tau f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau - \int_\tau f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau\right] \\ &\quad + \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{\Delta\tau} f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1-20}$$

对于很小的时间增量，利用如下级数展开式后

$$f(x,y,z,t+\delta t) = f(x,y,z,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,z,t)\delta t$$

$$\int_\tau f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau = \int_\tau f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_\tau f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau\right)\delta t$$

所以

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left[\int_{\tau}f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau-\int_{\tau}f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau\right]=\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau \tag{1-21}$$

注意到式(1-20)右端第二项中体积增量$\Delta\tau$,由图1-4所示可知

$$\Delta\tau=\int_{A}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\delta t\mathrm{d}A \tag{1-22}$$

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\int_{\Delta\tau}f(x,y,z,t+\delta t)\mathrm{d}\tau=\int_{A}f\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{1-23}$$

将式(1-21)和式(1-23)代入式(1-20)后,并应用高斯散度定理,即得广义雷诺输运定理式(1-19)。当$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}$为流体质点瞬时速度矢量,即有通常的雷诺输运定理:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\tau(t)}f(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau=\int_{\tau(t)}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int_{A(t)}f\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=\int_{\tau(t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\nabla\cdot(f\boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}\tau \tag{1-24}$$

其中$\tau(t)$和$A(t)$则为随流体移动的物质体积和其表面积。

雷诺输运定理对流场量建立了拉格朗日研究方法与欧拉研究方法之间的关系,它在流体力学研究中有许多重要应用。如流体质量守恒定律应满足如下关系式

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\tau(t)}\rho(x,y,z,t)\mathrm{d}\tau=0 \tag{1-25}$$

式中,$\rho(x,y,z,t)$为流体密度。应用雷诺输运定理,便可写出质量守恒方程的积分形式:

$$\int_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int_{A}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=0 \tag{1-26}$$

通过高斯散度定理的应用,即可得流体质量守恒的微分形式为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{1-27}$$

将式(1-27)展开合并还可写成另一形式为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{1-28}$$

对不可压缩流体,$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$,质量守恒方程即连续性方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{1-29}$$

在研究流体运动的动量守恒方程时,如任取流体体积τ,其表面积为A。设流体质点速度矢量$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$,其分量形式$\boldsymbol{v}(u,v,w)$或$v_i(i=1,2,3)$,考虑在体积τ内流体动量$\int_{\tau}\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}\tau$的变化率:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}v_i\rho\mathrm{d}\tau,\quad i=1,2,3$$

因流体中质量守恒,故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}\boldsymbol{v}\rho\mathrm{d}\tau=\int_{\tau}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}v_i\rho\mathrm{d}\tau=\int_{\tau}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}\tau$$

设作用于单位质量流体的质量力矢以$\boldsymbol{F}$表示(或以分量形式表示为$F_i,i=1,2,3$),则作用于流体体积τ上总的质量力为

$$\int_{\tau}\boldsymbol{F}\rho\mathrm{d}\tau \quad 或 \quad \int_{\tau}F_i\rho\mathrm{d}\tau,\quad i=1,2,3$$

设作用于该流体τ所包围的表面面积基元$\mathrm{d}A$上(其外法向单位矢量记以$\boldsymbol{n}$,或n_j,$j=1,2,3$)在i方向表面应力记以$\sigma_{ji}\cdot n_j\mathrm{d}A$(重复哑指标$j$为求和约定),其中$\sigma_{ji}$为应力张量,则作用于流体体积$\tau$上表面力的合力为$\int_A\sigma_{ji}n_j\mathrm{d}A$。根据高斯梯度定理有

$$\int_A\sigma_{ji}n_j\mathrm{d}A=\int_{\tau}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial n_j}\mathrm{d}\tau$$

则动量守恒方程便可写出为

$$\int_{\tau}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}\tau=\int_{\tau}F_i\rho\mathrm{d}\tau+\int_{\tau}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau \tag{1-30}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\tau}v_i\rho\mathrm{d}\tau=\int_{\tau}F_i\rho\mathrm{d}\tau+\int_A\sigma_{ji}n_j\mathrm{d}A \tag{1-31}$$

对式(1-31)应用雷诺输运定理,可得

$$\int_{\tau}\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t}\mathrm{d}\tau+\int_A\rho v_iv_jn_j\mathrm{d}A=\int_{\tau}F_i\rho\mathrm{d}\tau+\int_A\sigma_{ji}n_j\mathrm{d}A \tag{1-32}$$

这个方程的物理意义很清楚,左端表示τ内流体在i方向动量增量,右端表示作用于该流体中质量力和表面力的合力。

由式(1-30)还可立即写出应力形式的动量守恒微分方程

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=\rho F_i+\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} \tag{1-33}$$

在无粘性流中应力张量σ_{ij}为

$$\sigma_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ -p, & i=j\end{cases} \tag{1-34}$$

其中压力p指向为流体边界面的内法向,与σ_{ji}指向相反,故对无粘性流体运动方程即有

$$\rho\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}=\rho F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i},\quad i=1,2,3 \tag{1-35}$$

或

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\boldsymbol{F}-\nabla p \tag{1-36}$$

此即所熟知的欧拉(Euler)运动微分方程式。根据物质导数和矢量恒等式:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla) \tag{1-37}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)-\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$$

$$=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega} \tag{1-38}$$

则欧拉运动微分方程又可写为

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{v}|^2-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1-39}$$

对无旋流动$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{0}$，存在速度势函数$\phi(x,y,z,t)$，并有$\boldsymbol{v}=\nabla\phi$。对有势力场，存在力势函数$u(x,y,z)$，并有$\boldsymbol{F}=\nabla u$。对正压流体（密度$\rho$仅是压力$p$的函数），如令$P(p)$定义

$$P(p)=\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{1-40}$$

$$\nabla p=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p}\nabla p=\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} \tag{1-41}$$

故在无旋正压和有势力场中，式(1-39)可写为

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2-U+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}\right)=\boldsymbol{0} \tag{1-42}$$

即得无旋流伯努利方程（又称拉格朗日积分）为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2-U+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=C(t) \tag{1-43}$$

式中，积分常数C是时间的函数。对不可压缩等密度流体，ρ为常数，以及在重力场中$U=-gz$，则伯努利方程为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+gz+\frac{p}{\rho}=C(t) \tag{1-44}$$

定常流中伯努利方程即为

$$\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2+gz+\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{1-45}$$

我们知道，即使流动不是无旋，也可推出伯努利方程在流线上成立的相同形式。对定常流不可压缩流体和重力场中，沿流线s方向欧拉运动微分方程可写为

$$v\frac{\partial v}{\partial s}=-g_s-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{1-46}$$

式中，g_s是重力加速度g沿流线方向的分量。将式(1-46)积分可得沿流线上伯努利方程：

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2+gz+\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{1-47}$$

这里的常数与所选的流线有关。

对于可忽略重力效应的问题中，伯努利方程有更简单形式，即

$$p+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2=\text{常数} \tag{1-48}$$

由此可见，在定常流动中速度大处压力将减小，反之速度小处压力将增大。速度为零的点（常称驻点）上压力最大，记 p_0 称为驻点压力或总压，则式(1-48)又可写为

$$p+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2=p_0 \tag{1-49}$$

这个式子表明不计重力效应时流体总压 p_0 等于静压 p 和动压 $\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2$ 之和。

在水动力学问题中，重力作用是必须考虑的，但我们仍可将压力 p 分解为两部分，一部分为流体重量产生的压力 p_H，另一部分是由流体运动产生的水动压力 p_d，令

$$p=p_H+p_d \tag{1-50}$$

则水动力学中伯努利方程为

$$\frac{p_d}{\gamma}+\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2g}+z+\frac{p_H}{\gamma}=\text{常数} \tag{1-51}$$

式中，$\gamma=\rho g$。如果不存在自由液面的波动，其中水静压力部分$(z+p_H/\gamma)$为恒定常数，故有

$$p_d+\frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2=\text{常数} \tag{1-52}$$

这是一个很重要的结果，它表明在某些水动力学问题中可以先忽略重力作用，按伯努利方程式(1-52)计算求出水动压力 p_d 分布后，再加上当地水静压力 p_H，就是所要求的流体压力。这样做常常会获得很多方便。

§1-3 斯托克斯(Stokes)定理

令 C 是一给定的封闭曲线，A 是以该曲线为边界的表面积，如图1-5所示，$\boldsymbol{n}$ 是其中微元面积 $\mathrm{d}A$ 上单位法向矢量，它的指向与围绕曲线 C 的走向有关，由右螺旋法则的定义确定。若 X 是任一矢量函数或标量函数，斯托克斯定理建立了线积分和面积分的如下关系：

$$\int_A(\boldsymbol{n}\times\nabla)X\mathrm{d}A=\oint_C X\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{1-53}$$

式中，$\boldsymbol{r}$ 是沿曲线 C 的位置矢量。

斯托克斯定理的证明：若将曲面 A 划分为许多互不重叠的小网格面元，对每一面元边界的线积分 $\int X\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 累加，因相邻面元公共边界上积分路线相等而方向相反，故相加的结果最后留下沿外边界 C 上的积分 $\int_C X\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。所以，斯托克斯定理的证明只要对一

个单独面元上成立就可以了。若取平行四边形面元，用它来求证斯托克斯定理仍不失其一般性。如图 1-6 所示，设微元平行四边形边长为无穷小矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$，令平行四边形中心点 P 处的 X 值记为 X_P，计算绕该面元边界的线积分

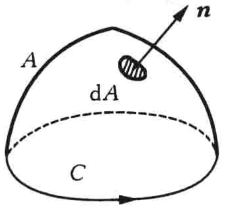

图 1-5　任一封闭曲线所包围的曲面

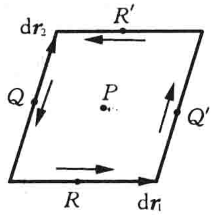

图 1-6　微元平行四边形

$$\int X\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (X_R - X_{R'})\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1 + (X_{Q'} - X_Q)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 \tag{1-54}$$

式中，下标 Q、Q'、R 和 R' 是该面元诸边界线的中点，因

$$X_{R'} = X_P + \mathrm{d}X_P = X_P + \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\nabla)X_P$$

$$X_R = X_P - \mathrm{d}X_P = X_P - \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\nabla)X_P$$

及 $$X_{Q'} = X_P + \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\nabla)X_P,\quad X_Q = X_P - \frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\nabla)X_P$$

将它们代入式(1-54)，则有

$$\int X\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2\nabla) + \mathrm{d}\boldsymbol{r}_2(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\nabla)]X_P \tag{1-55}$$

利用二重矢量积的恒等式：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$，便可将式(1-55)写为

$$\int X\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [(\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2)\times\nabla]X_P \tag{1-56}$$

因 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{n}\mathrm{d}A$，所以

$$\int X\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}\times\nabla)X\mathrm{d}A \tag{1-57}$$

这样，对所有面元求和，便得

$$\oint_C X\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A(\boldsymbol{n}\times\nabla)X\mathrm{d}A \tag{1-58}$$

此即斯托克斯定理。若令 $X=\boldsymbol{v}$(速度矢量)，则斯托克斯定理为

$$\oint_C \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A(\boldsymbol{n}\times\nabla)\boldsymbol{v}\mathrm{d}A = \int_A\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{v})\mathrm{d}A = \int_A\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Omega}\mathrm{d}A \tag{1-59}$$