KOALAGOGO 考拉进阶

薛金星·教材全解 畅销19年 全国一亿读者首选

依据最新数学教学大纲和考研大纲编写
配人大社《微积分》第三版

大学教材全解

经济应用数学基础（一）微积分

考拉进阶《大学教材全解》编委会 编 丁双双◎主 编

同步辅导+考研复习

人大·三版

教材解析最详 方法技巧最全

- 知识要点全解
- 典型例题精讲
- 课后习题详解
- 考研真题精析

赠 历年考研真题及微积分重要公式手册，请登陆考拉进阶官方网站www.koalagogo.com下载。

中国海洋大学出版社

KOALAGOGO

考拉进阶

大学教材全解

经济应用数学基础（一）微积分

人大·第三版

主　编：丁双双

副主编：李　博　曹圣山

生汉芳　胡京爽

中国海洋大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分／丁双双主编．--青岛 ：中国海洋大学出版社，2011.8

（大学教材全解）

ISBN 978-7-81125-731-1

Ⅰ．①微… Ⅱ．①丁… Ⅲ．①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 138036 号

诚邀全国名师加盟

恳请各位名师对我们研发、出版的图书提出各类修订建议，并提供相应的文字材料。我们将根据建议采用情况及时支付给您丰厚报酬。

诚征各位名师在教学过程中发现的好题、好方法、好教案、好学案等教学与考试研究成果，一旦采用，即付稿酬。

我们欢迎广大一线师生来信、来函、来电、上网与我们交流沟通，为确保信息畅通，我们特设以下几个交流平台，供您选用：

图书邮购热线：010-61743009　61767818
图书邮购地址：北京市天通苑邮局 6503 信箱　电子商务(收)　邮政编码：102218
第一教育书店：http://www.firstedubook.com
第一教育书店-淘宝店：http://shop58402493.taobao.com
电子邮箱：book@jxedue.net
质量监督热线：0532-88913510
集团网站：http://www.jxedue.net
考拉进阶网站：www.koalagogo.com

出版发行	中国海洋大学出版社
社　　址	青岛市香港东路 23 号
邮政编码	266071
网　　址	http://www.ouc-press.com
责任编辑	矫恒鹏
印　　制	北京泽宇印刷有限公司
版　　次	2011 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 2 次印刷
成品尺寸	212mm×148mm
印　　张	14
字　　数	380 千字
定　　价	19.80 元

前言

“教材全解”系列图书十多年来一直是初高中学生的首选辅导材料，每年销售量位居同类辅导书首位，帮助千万学子取得了理想的成绩。为帮助大学生学好《微积分》课程，我们特邀请了全国各地治学严谨、业务精湛的一线名师，严格遵循教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”（教学大纲）和最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，精心编写了这本《大学教材全解—微积分》。希望通过“教材全解系列”全心全意、解疑解难的独有特色，帮助读者全面透彻地掌握微积分知识，真正做到学好教材，提升解题能力与数学思维水平，轻松达到期中、期末、考研等各项考试的测试要求。

本书的章节内容与教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，非常适合读者的使用习惯。每章内容安排如下：

本章知识结构图解 以结构图的形式把每章的知识点串联起来，帮助读者系统掌握并快速复习本章知识体系及逻辑结构。

本章考试出题点 帮助读者了解本章内容在考试中的考点及题型，重要考点和题型一目了然，为复习考试指明了方向，使准备考试更加轻松、高效。

教材内容全解 这部分突出必须掌握或考频较高的核心内容，与众不同的是，本书还特别注重讲解知识点应用时易混淆、不容易理解之处，以及做题过程中需要注意的事项，并列举与此知识点相关、在做题中广泛使用的核心结论，帮助读者学好、吃透本节重要概念、定理（公理）、公式、性质等。

常考基本题型 以每章重点问题为主线，精选有典型性的例题，并结合历年考研真题，分类总结，详细讲解，通过具体应用加深对基本概念的理解，并熟悉重要定理和基本方法的应用。并且部分例题给出多种解法，开拓读者思路，使读者能更扎实地掌握各个知识点，并且能熟练运用。

本章综合拔高题型精讲 在学完本章的所有内容之后，本栏目精选涵盖知识点多、综合性稍强的常考题目和考研题目，按题型分类讲解，帮助读者进一步提高综合运用本章知识的能力及分析问题、解决问题的能力，满足读者获得高分或通过考研的更高需求。

本章课后习题全解 这部分给出了配套教材中各章习题详尽、全面的解答过程，并且对重要步骤和较难理解之处做了注解，这是本书的一大亮点。

全书最后精心设置了期中考试模拟试题和期末考试模拟试题，为读者提供了考前练兵的机会。

本书内容贯彻了“教材全解系列”讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点，并在此基础上突出了三大亮点：

1. 过程步骤最详，方法技巧最全。

对于课后题和本书选编的例题，本书都给出了详尽的解题步骤，有的习题还给出多种解法，更方便读者比较各种解题方法，掌握多种解题技巧。

2. 关键步骤加批注，讲解更到位。

“本章课后习题全解”部分根据题目的难度和重要性，将全书习题分三个等级，并在题号前标示出易、中、难。此部分不但解答步骤详尽，并且关键步骤都加了注解，方便读者更加高效地学习。

3. 密切联系考研，精选并详解考研真题。

在“常考基本题型”、“本章综合拔高题型精讲”栏目里，精选了近年考研经典题目，详细阐述解题方法和技巧，部分例题给出了两种及两种以上的解法，让读者了解本章节知识点在考研中的考查形式和难易程度，达到在学教材的同时对研究生入学考试也有很好的认知。

本书可作为经济、管理类专业学生学习微积分的辅导用书，考研数学的复习用书，以及教师教授微积分课程的教学参考书。

由于编者水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请各位同行、读者批评指正。

考拉进阶教育研究院
“大学教材全解”编委会

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目录

第一章　函　数

本章知识结构图解

函数
- 集合的概念、表示及运算 → 并、交、差、补集，集合的运算律
- 实数、绝对值及其性质 → 区间、邻域的概念
- 函数的概念 → 定义域、值域、对应关系、隐函数
- 分段函数的概念
- 函数关系的建立 → 建立实际问题的函数关系
- 函数性质的概念 → 奇偶性、周期性、单调性、有界性
- 反函数、复合函数
- 基本初等函数、初等函数 → 七个基本初等函数的性质及其图像
- 图形的简单组合与交换 → 函数图形叠加、翻转、放缩、平移

本章考试出题点

本章在考试中的出题点主要体现在以下方面：

1. 集合的概念、表示及运算，常常与不等式求解、方程的求解等相结合.

2. 绝对值的性质、区间、邻域，实数的性质，绝对值的性质及应用，不等式解的区间表示、集合表示.

3. 求给定函数的定义域.

4. 函数关系的建立，尤其是与实际问题相结合的函数关系建立，反映了应用数学知识解决实际问题的能力.

5. 函数的性质：奇偶性、单调性、周期性、有界性. 利用相应性质的定义研究、证明函数的性质.

6. 求解给定函数的反函数，研究反函数的性质，函数的复合与分解.

7. 基本初等函数和初等函数的性质及其图像.

8. 函数图形的简单组合与变换，函数图形的叠加、翻转、放缩和平移是数形结合思想研究函数性质的基础.

§1.1 集　合

一 教材内容全解

重点难点解析

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体；构成集合的事物或对象，称为集合的元素. 元素与集合的关系：$a\in A$ 或者 $a\notin A$.

温馨提示：(1)有限集合由有限个元素构成，无限集合由无限多个元素构成. (2)集合具有确定性的特征，即某个元素是否属于某个集合是确定的.

集合的表示法一般为列举法，描述法，文氏图等.

子集：如果 $a\in A$，则 $a\in B$，称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

集合与集合的关系：$A\subset B$ 或者 $A\not\subset B$.

温馨提示：(1)$A\subset A$；$\varnothing\subset A$；(2)若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$.

2. 集合的运算

(1)集合的并：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

具有下列性质：

①$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；

②$A\cup\varnothing=A$，$A\cup U=U$，$A\cup A=A$.

(2)集合的交：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

具有下列性质：

①$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$；

②$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap U=A$，$A\cap A=A$.

(3)集合的差：$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

(4)补集：集合 A 的补集 $\overline{A}=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

补集的性质：$A\cup\overline{A}=U$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

例 1　已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x||x-1|\leqslant 2\}$，求 $\overline{A}$.

解 解不等式 $|x-1|\leqslant 2$，得 $-1\leqslant x\leqslant 3$，故 $\overline{A}=\{x|x<-1$ 或 $x>3\}$.

例 2　设集合 $A=\{-1,1,3\}$，$B=\{a+2,a^2+4\}$，$A\cap B=\{3\}$，求实数 a 的值.

解 因为 a 为实数，所以 $a^2+4\geqslant 4$；又，$A\cap B=\{3\}$，故 $a+2=3$，即 $a=1$.

3. 集合运算律

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3)分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4)摩根律(对偶律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 3 设 A 和 B 是任意两个集合,证明摩根律$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

证 设 $x\in\overline{A\cap B}$,则 $x\notin A\cap B$,于是 $x\notin A$ 或 $x\notin B$,所以 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$,即$\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$.

又,设 $x\in\overline{A}\cup\overline{B}$,则 $x\in\overline{A}$,或 $x\in\overline{B}$,即 $x\notin A$,或 $x\notin B$,所以 $x\notin A\cap B$, $x\in\overline{A\cap B}$,即$\overline{A\cap B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$.

综上,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

4. 集合的笛卡尔乘积

集合 A 与 B 的笛卡尔乘积：

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}\text{(有序数组构成的集合)}.$$

本节考研要求

掌握集合的并、交、差、补运算及相应的性质;掌握集合运算律.

二 常考基本题型

题型 集合的基本运算

题型解析 属于基本题型,按相关定义即可.

例 1 设集合 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,求实数 a 的值.

解 因为 $A=\{0,2,a\}$,$B=\{1,a^2\}$,且 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$,

所以$\begin{cases}a=4,\\a^2=16,\end{cases}$ 即 $a=4$.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid\log_2 x\leqslant2\}$,$B=\{x\mid-\infty<x<a\}$,若 $A\subset B$,且实数 a 的取值范围是$(c,+\infty)$,求 c 的最小值.

解 解不等式 $\log_2 x\leqslant2$,得 $0<x\leqslant4$,即 $A=\{x\mid0<x\leqslant4\}$,由 $A\subset B$,知 $a>4$,故 $c\geqslant4$,即 c 的最小值为 4.

例 3 设 M 为一个集合,满足 $M\subset\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$,求这样的集合 M 的个数.

解 这样的集合 M 的个数为 2,分别是 $M=\{a_1,a_2\}$和 $M=\{a_1,a_2,a_4\}$.

例 4 已知集合 $M=\{-1,1\}$,$N=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}\right\}$,求 $M\cap N$.

解 解不等式 $\frac{1}{2}<2^{x+1}<4,x\in\mathbf{Z}$,得 $x=-1,0$,即 $N=\{-1,0\}$,故 $M\cap N=\{-1\}$.

例 5 已知全集 $U=\mathbf{Z}$,$A=\{-1,0,1,2\}$,$B=\{x\mid x^2=x\}$,求 $A\cap\overline{B}$.

解 解方程 $x^2=x$,得 $x=0,1$,即 $B=\{0,1\}$,所以$\overline{B}=\{x\mid x\neq0,1,x\in\mathbf{Z}\}$,故 $A\cap\overline{B}=\{-1,2\}$.

§1.2 实数集

一 教材内容全解

重点难点解析

1. 绝对值

一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

绝对值及其运算的性质:

(1) $|x|\geqslant 0$; $|-x|=|x|=\sqrt{x^2}$; $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

(2) $|xy|=|x|\cdot|y|$; $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

(3) $|x|\leqslant y\Leftrightarrow -y\leqslant x\leqslant y(y\geqslant 0)$; $|x|\geqslant y\Leftrightarrow x\geqslant y$ 或 $x\leqslant -y(y\geqslant 0)$.

(4) $|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

(5) $|x|-|y|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

(6) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$.

例 1 解不等式 $\left|\dfrac{x-2}{x}\right|>\dfrac{x-2}{x}$.

解 根据绝对值不等式的性质,绝对值大于本身,其值必为负数,即 $\dfrac{x-2}{x}<0$,解得 $0<x<2$.

例 2 设函数 $f(x)=|2x-1|+x+3$,若 $f(x)\leqslant 4$,求 x 的取值范围.

解 由 $|2x-1|+x+3\leqslant 4$,即 $|2x-1|\leqslant 1-x$,也即 $x-1\leqslant 2x-1\leqslant 1-x$,解此不等式,得 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$.

2. 区间

开区间:$(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

闭区间:$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

半开区间:$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$;$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$.

温馨提示:开区间、闭区间、半开区间为有限区间,区间的长度为 $b-a$.

无限区间:$(a,+\infty)=\{x|x>a\}$;$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$;$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$;$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$;$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

3. 邻域

x_0 的 δ 邻域:$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

x_0 的空心 δ 邻域:$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

4. 均值不等式

对任意实数 a,b,恒有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,当且仅当 $a=b$ 时,等号成立.

二 常考基本题型

题型 解不等式

题型解析 解不等式是微积分中的重要基础,也是基本题型.其中,解绝对值不等式,无论从几何意义,还是技巧,值得特别重视.

例 1 设集合 $M=\{x\mid x^2-x<0\}$,$N=\{x\mid |x|<2\}$,求 $M\cap N$.

解 解不等式 $x^2-x<0$,得 $0<x<1$,即 $M=\{x\mid 0<x<1\}$,

解不等式 $|x|<2$,得 $-2<x<2$,即 $N=\{x\mid -2<x<2\}$,

则有 $M\subset N$,故 $M\cap N=M=\{x\mid 0<x<1\}$.

例 2 若不等式 $|3x-b|<4$ 的解集中的整数有且仅有 1,2,3,求参数 b 的取值范围.

解 不等式 $|3x-b|<4$ 的解集为 $\dfrac{b-4}{3}<x<\dfrac{b+4}{3}$.

又,其中含有的整数只有 1,2,3,这意味着 $\begin{cases}0\leqslant\dfrac{b-4}{3}<1,\\3<\dfrac{b+4}{3}\leqslant 4,\end{cases}$

解之,得 $\begin{cases}4\leqslant b<7,\\5<b\leqslant 8,\end{cases}$ 即 $5<b<7$.

例 3 解不等式 $|2x-1|-|x-2|<0$.

解 原不等式等价于不等式组

$$\begin{cases}x\geqslant 2,\\2x-1-(x-2)<0,\end{cases}\qquad ①$$

或

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<2,\\2x-1+x-2<0,\end{cases}\qquad ②$$

或

$$\begin{cases}x\leqslant\dfrac{1}{2},\\-(2x-1)+x-2<0.\end{cases}\qquad ③$$

不等式组①无解,不等式组②的解集为 $\dfrac{1}{2}<x<1$,不等式组③的解集为 $-1<x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

综上,$-1<x<1$,原不等式的解集为 $\{x\mid -1<x<1\}$.

例 4 设 a 为实数,函数 $f(x)=2x^2+(x-a)|x-a|$,若 $f(0)\geqslant 1$,求 a 的取值范围.

解 因为 $f(0)\geqslant 1$,所以 $-a|a|\geqslant 1$,即 $\begin{cases}a<0,\\a^2\geqslant 1,\end{cases}$ 故 $a\leqslant -1$.

例 5 若对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$ 恒成立，求 a 的取值范围.

解 对任意 $x>0$，$\frac{x}{x^2+3x+1}\leqslant a$，即对任意 $x>0$，恒有 $\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant a$.

又由均值不等式 $\frac{1}{x+\frac{1}{x}+3}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{5}$，所以 a 的取值范围为 $\frac{1}{5}\leqslant a<+\infty$.

§1.3 函数关系

一 教材内容全解

重点难点解析

1. 函数关系

函数的定义：设 x,y 是两个变量，如果变量 x 在某一范围内每取一值时，按照一定规则，变量 y 就有确定的值与之对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

x 称为函数的自变量，它的取值范围称为定义域，常用 D 来表示.

y 称为函数的因变量，它的取值范围称为值域；f 是对应法则(也称对应关系).

显然，对于函数来说，最重要的是函数的定义域和对应法则，当它们一经确定，值域也就确定，习惯上我们把定义域、对应法则、值域称为函数的三要素.

2. 函数定义域

(1)定义域的表示方法：用不等式描述的集合；用区间表示；用邻域表示.

(2)求定义域的原则：如果已经用解析式表示，定义域就是使函数有意义的、实数范围内的点的集合，我们称之为自然定义域，其自变量 x 必须满足能够运算的条件，如，分式的分母不能为零，对数的真数要大于零，平方根下非负等；如果是实际问题，定义域就是使变量有实际意义的点的集合.

例 1 求函数 $y=\tan(\sqrt{x}-2)$ 的定义域.

解 定义域应满足 $\sqrt{x}-2\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$($k$ 为整数)，即定义域为

$$D=\left\{x\,\middle|\,x\neq\left(k\pi+\frac{\pi}{2}+2\right)^2\text{ 且 }x\geqslant0,k\text{ 为整数}\right\}.$$

例 2 求函数 $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解 定义域需满足 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\ \sqrt{x-1}\neq0,\\ \frac{1}{\sqrt{x-1}}\leqslant1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-1>0,\\ \sqrt{x-1}\geqslant1,\end{cases}$ 故所求定义域为 $D=\{x\,|\,x\geqslant2\}$.

3. 显函数和隐函数

如果函数的对应规则是因变量用自变量的一个数学表达式表示出来的，这样的函数称为显函数；如果函数的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的，这样的函数称为隐函数.

本节考研要求

理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立函数关系.

二 常考基本题型

题型 求函数的定义域

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ 的定义域为 M，$g(x)=\ln(x^2+x-6)$ 的定义域为 N，求 $M\cap N$.

解 $f(x)$ 的定义域需满足 $3-x>0$，即 $x<3$，故 $f(x)$ 的定义域 $M=(-\infty,3)$.

$g(x)$ 的定义域需满足 $x^2+x-6>0$，即 $(x-2)(x+3)>0$，解得 $x>2$ 或 $x<-3$，故 $g(x)$ 的定义域 $N=(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$.

综上，$M\cap N=(-\infty,-3)\cup(2,3)$.

例 2 求函数 $y=\dfrac{1}{x(1-x^2)}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 x 需满足 $\begin{cases}x(1-x^2)\neq 0,\\1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\neq 0,\\1-x^2>0,\end{cases}$ 也即 $\begin{cases}x\neq 0,\\-1<x<1.\end{cases}$ 故定义域为 $D=\{x\mid -1<x<1，且\ x\neq 0\}$.

例 3 求函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$ 的定义域.

解 定义域需满足 $\begin{cases}x+1>0,\\\ln(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>-1,\\x\neq 0,\end{cases}$ 故所求定义域为

$$D=\{x\mid x>-1，且\ x\neq 0\}.$$

例 4 记函数 $f(x)=\sqrt{2-\dfrac{x+3}{x+1}}$ 的定义域为 A，函数 $g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)]$ $(a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A；(2)若 $B\subset A$，求实数 a 的取值范围.

解 (1)要使函数 $f(x)$ 有定义，需满足 $2-\dfrac{x+3}{x+1}\geqslant 0$，即 $\dfrac{x-1}{x+1}\geqslant 0$，也即 $x<-1$ 或 $x\geqslant 1$，故 $A=(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

(2)要使函数 $g(x)$ 有定义，需满足 $(x-a-1)(2a-x)>0$，因 $a<1$，故 $a+1>2a$，所以上面不等式的解集为 $2a<x<a+1$，故 $B=(2a,a+1)$.

因 $B\subset A$，故 $2a\geqslant 1$ 或 $a+1\leqslant -1$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $a\leqslant -2$. 又因为 $a<1$，所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant -2$.

综上，当 $B\subset A$ 时，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

§1.4 分段函数

一 教材内容全解

重点难点解析

1. 分段函数的概念

有些函数，对于定义域内自变量不同的值，其对应规则要用两个或者两个以上的式子表示，这类函数称为分段函数.

2. 几个常用的分段函数

(1)绝对值函数：$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(2)符号函数：$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$

(3)取整函数：$y=[x]$.

(4)狄利克莱函数：$y=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\bar{\mathbf{Q}},\end{cases}$ 其中 $\mathbf{Q}$,$\bar{\mathbf{Q}}$ 分别表示有理数和无理数.

本节考研要求

理解分段函数的概念、函数关系表示法、性质及其图形.

二 常考基本题型

题型 建立分段函数表达式，分析分段函数的图像，研究分段函数的性质

题型解析 依据实际问题按照分段函数的定义，研究分段函数的图像及性质.

例 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 由定义，$f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=\begin{cases}1, |f(x)|=1,\\ 1, |f(x)|=0,\end{cases}$ 故 $f[f(x)]=1$.

例 2 某蔬菜基地种植西红柿，由历年市场行情得知，从 2 月 1 日起的 300 天内，西红柿市场售价与上市时间的关系用图 1-1(a)的一条折线表示；西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 1-1(b)的抛物线段表示.

(1)写出图 1-1(a)表示的市场售价与时间的函数关系式 $P=f(t)$；

写出图 1-1(b)表示的种植成本与时间的函数关系式 $Q=g(t)$.

(2)认定市场售价减去种植成本为纯收益，问何时上市的西红柿收益最大？

(注：市场售价和种植成本的单位：元/(10^2×千克)，时间单位：天)

解 (1)由图 1-1(a)可得市场售价与时间的函数关系为

$$f(t)=\begin{cases}300-t, & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ 2t-300, & 200<t\leqslant 300.\end{cases}$$

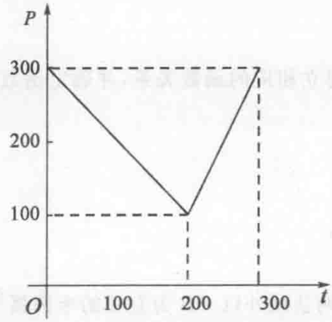

图 1-1(a)

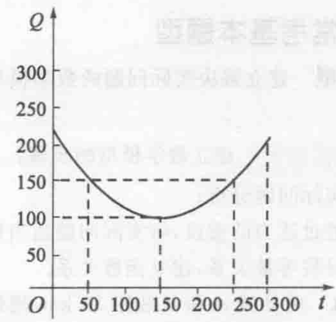

图 1-1(b)

由图 1-1(b)可得种植成本与时间的函数关系为

$$g(t)=\frac{1}{200}(t-150)^2+100,\ 0\leqslant t\leqslant 300.$$

(2)设 t 时刻的纯收益为 $h(t)$，则由题意得 $h(t)=f(t)-g(t)$，即

$$h(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{175}{2}, & 0\leqslant t\leqslant 200,\\ -\dfrac{1}{200}t^2+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{1\,025}{2}, & 200<t\leqslant 300.\end{cases}$$

当 $0\leqslant t\leqslant 200$ 时，配方整理得 $h(t)=-\dfrac{1}{200}(t-50)^2+100$，所以，当 $t=50$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[0,200]$ 上的最大值 100.

当 $200<t\leqslant 300$ 时，配方整理得 $h(t)=-\dfrac{1}{200}(t-350)^2+100$，所以，当 $t=300$ 时，$h(t)$ 取得区间 $[200,300]$ 上的最大值 87.5.

综上，由 $100>87.5$ 可知，$h(t)$ 在区间 $[0,300]$ 上可以取最大值 100，此时，$t=50$，即从 2 月 1 日开始的第 50 天时，上市的西红柿收益最大.

例 3　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x), & x\leqslant 0,\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0,\end{cases}$ 求 $f(2\,009)$.

解 由已知得 $f(-1)=\log_2 2=1$，$f(0)=0$，$f(1)=f(0)-f(-1)=-1$，

$f(2)=f(1)-f(0)=-1$，$f(3)=f(2)-f(1)=0$，

$f(4)=f(3)-f(2)=1$，$f(5)=f(4)-f(3)=1$，$f(6)=f(5)-f(4)=0$，

所以函数 $f(x)$ 的值以 6 为周期重复性出现，所以 $f(2\,009)=f(5)=1$.

§1.5 建立函数关系的例题

常考基本题型

题型 建立解决实际问题的数学模型,即建立相应的函数关系,并确定函数的定义域

题型解析 建立数学模型的步骤:

1.实际问题分析;

2.通过适当的假设,将实际问题适当地简化;

3.寻找等量关系,建立函数关系.

例1 两县城 A 和 B 相距 20 km,现计划在两县城外以 AB 为直径的半圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上选择一点 C 建造垃圾处理厂,其对城市的影响度与所选地点到城市的距离有关,对城 A 和城 B 的总影响度为对城 A 与城 B 的影响度之和,记点 C 到城 A 的距离为 x km,建在 C 处的垃圾处理厂对城 A 和城 B 的总影响度为 y.

统计调查表明:垃圾处理厂对城 A 的影响度与所选地点到城 A 的距离的平方成反比,比例系数为 4.对城 B 的影响度与所选地点到城 B 的距离的平方成反比,比例系数为 k,当垃圾处理厂建在 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时,对城 A 和城 B 的总影响度为 0.065.

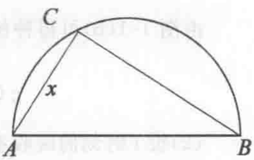

图 1-2

试将 y 表示成 x 的函数.

解 首先,由题意,$y=\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{k}{BC^2}(0<x<20)$,显然,问题的关键是把点 C 到点 B 的距离 BC 用 x 表示,为此可研究三角形 ABC,如图 1-2 所示,由题意知 $AC\perp BC$,所以,$BC^2=400-x^2$,进而有

$$y=\frac{4}{x^2}+\frac{k}{400-x^2}(0<x<20).$$

其次,确定其中的参数 k,注意到,当点 C 位于 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时,三角形 ABC 为等腰直角三角形,此时有 $x=10\sqrt{2}$,又因为此时 $y=0.065$,代入上式得 $k=9$,

所以,y 表示成 x 的函数为 $y=\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{9}{400-x^2}(0<x<20)$.

例2 假设某人生产某产品单件成本为 a 元,如果他卖出该产品的单价为 m 元,则他的满意度为 $\dfrac{m}{m+a}$;如果他买进该产品的单价为 n 元,则他的满意度为 $\dfrac{n}{n+a}$;如果一个人对两种交易(卖出或买进)的满意度分别为 h_1 和 h_2,则他对这两种交易的综合满意度为 $\sqrt{h_1h_2}$.

现假设甲生产 A,B 两种产品的单件成本分别为 12 元和 5 元,乙生产 A,B 两种产品的单件成本分别为 3 元和 20 元,设产品 A,B 的单价分别为 m_A 元和 m_B 元,甲买进 A

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com