

严格依据2016年考研管理类联考大纲编写

高教版
2016

MBA MPA MPAcc 联考综合能力

主编 陈剑

数学高分指南 (第8版)

考点精析 + 基础题型 + 强化题型 + 专题点睛 + 阶梯训练

2015 版热销 **8万** 册

登录作者博客 <http://www.chenjian.cc> 留言 100%回复 配套全书视频讲解

大纲解析人讲数学 130 余种题型全覆盖 收录最新五年真题及必备公式

高等教育出版社



2016 MBA MPA MPAcc Liankao Zonghe Nengli
Shuxue Gaofen Zhinan (Di 8 Ban)

MBA MPA MPAcc 联考综合能力

高教版
2016

主编 陈剑

数学高分指南 (第8版)

2015 版热销 **8万** 册

登录作者博客 <http://www.chenjian.cc> 留言 100%回复 配套全书视频讲解

高等教育出版社·北京



内容简介

本书严格按照 MBA、MPA、MPAcc 最新《全国硕士研究生招生考试管理类专业学位联考综合能力考试大纲》数学部分的要求进行编写,并根据考试的命题思路、方法和原则,来把握命题的新动向。全书将数学科目所涉及的知识进行了详尽的介绍和阐述;每章分为考试要点剖析、基础过关题型、强化突破题型、核心专题点睛和阶梯化精炼题五部分。本书针对联考的题型,深入分析探究,用“举题型、讲方法”的格式总结出解题方法、技巧,便于考生掌握和应用;并且还整理了一部分练习题以便巩固和提高。

本书的实战性强,短期强化见效快,使复习事半功倍,可以作为管理类综合能力(MBA、MPA、MPAcc)数学备考辅导用书。

图书在版编目(CIP)数据

2016MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南 /
陈剑主编. --新 1 版. --北京:高等教育出版社,2015.1
ISBN 978-7-04-040571-2

I. ①2… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 011419 号

策划编辑 刘 佳	责任编辑 张耀明	封面设计 E 洋	版式设计 史新薇
插图绘制 杜晓丹	责任校对 陈 杨	责任印制 串 刚	

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	保定市中国美凯印刷有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landaco.com.cn
印 张	26.5	版 次	2015 年 1 月第 1 版
字 数	610 千字	印 次	2015 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	48.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 40571-00

前言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工学类、经济学类和管理学类考生必考的课程,考试内容
包括高等数学(数学一、数学三占 56%,数学二占 78%)、线性代数(数学一、数学二、数学三占 22%)与
概率论与数理统计(数学一、数学三占 22%)。从试卷结构来看共 23 个题,其中 8 个单项选择题(共
 $4 \times 8 = 32$ 分)、6 个填空题(共 $4 \times 6 = 24$ 分)、9 个解答题(共 94 分),满分 150 分。客观题(单项选
择题与填空题)占到了 37.3%,能否快速、准确地解答客观题,是考生取得优异成绩的关键。

单项选择题主要考查考生对基本概念、基本理论与基本方法的理解与掌握程度,填空题主要考
查考生对基本方法、基本运算的掌握能力,题目难度虽然不是很高,但由于出题方式较灵活,加上客观
题目的特点(只要答案不要过程),以历年考试成绩统计来看,得分率不是很高,基于此,作者编写了符
合大纲要求,接近真题难度,体现命题规律的《2016 考研数学基础通关经典 1000 题》,以期能够通过这
些“好题”的训练解决掉客观题得分率低的短板,同时为进一步提高主观题的解题能力打下良好的基础。

本书具有如下特色:

1. 介绍了客观题常见答题方法,如推理法、图示法、特例法、赋值法等,并通过例题加以示
范,使考生较为系统地掌握答客观题的方法与技巧,提高解答客观题的效率。

2. 题目的“口味”与真题相投,难度达到或略高于考题,注重数学思维的培养,通过题目的训
练,使考生能够熟悉客观题考题的形式与类型,同时进一步提高解答客观题的速度。

3. 题目选取完全基于最新数学考试大纲并融入近年来命题规律,有些题目是编者根据近三
十年的教学积累以及二十余年考研辅导班的经验有针对性地编制而成,具有较好的前瞻性与预
测性。题目虽然是针对客观题设计,但覆盖面广,难易兼备,拓展性好,既有“秒杀”客观题的方
法,又有大题推理、演绎或计算方法,对解答题的复习训练也具有全面引领作用。

4. 每个题目解析之前都给出了考点分析,让考生明了考研题目的命题特点,通过训练将零
碎的知识,理论与方法连成网、织成片,提高综合分析、解决问题的能力。

本书适合数学一、数学二、数学三以及数农考生使用,对于数学一、数学二、数学三分别适用
的题目书中在题号右上角以[1]、[2]、[3]表示,数农考生可参考数学三的适用范围。书中收录了
适量真题,对真题,在题号后以“年份”[卷种]的形式表示,如 65. (2007^{[1],[2],[3]})表示 65 题选自
2007 年数学一、数学二与数学三真题。便于读者识别。

在本书的编写过程中,作者参考了国内外许多著作与教材,谨向有关作者表示衷心感谢!
限于作者水平,书中疏漏与错误之处在所难免,恳请读者和同行批评指正。

张同斌
2015 年 3 月

客观题常用解题方法概述	(1)
第一部分 选择题	(11)
高等数学	(11)
线性代数	(44)
概率论与数理统计	(63)
第二部分 填空题	(79)
高等数学	(79)
线性代数	(94)
概率论与数理统计	(101)
第三部分 习题答案与解析	(107)

客观题常用解题方法概述

考研数学中,客观题包括(单项)选择题与填空题.在试卷中共((单项)选择题 8 个,填空题 6 个)14 个题,分值 56 分.因此,如何快速、准确地解答好客观题,并为后面的解答题留下较宽裕的答题时间,是考生取得数学高分的关键.

如何解答好客观题呢?下面就客观题常用解题方法与技巧结合例题进行归纳总结,以期待提高考生解答客观题的效率.

一、推理法

根据已知条件,利用有关概念、性质和定理等通过演绎推理得出正确结论或通过计算直接得出正确结论,这种方法通常称为推理法.

例 1 (2014^{[1][2][3]})下列曲线中有渐近线的是().

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

【答案】 (C)

【考点】 考查曲线的水平、铅直与斜渐近线及其求法,极限的计算,第一个重要极限.

【解析】 对于四个选项中的函数 y , 都有 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, 所以它们对应的曲线都没有水平渐近线.

当 x 趋向于 x_0 (x_0 是任意确定的常数) 时, 四个选项中的 y 都不趋向于 ∞ , 所以它们对应的曲线都没有铅直渐近线.

对于选项(A), 因为 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \sin x\right) = 1$, 但 $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ 不存在, 故曲线 $y = x + \sin x$ 也无斜渐近线. 排除(A).

对于选项(B), 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \sin x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, 所以曲线 $y = x^2 + \sin x$ 无斜渐近线. 排除(B).

对于选项(D), 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, 所以曲线 $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$ 无斜渐近线. 排除(D), 故应选(C). 事实上, 因为 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \left(1 + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\right) = 1$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, 所以曲线 $y = x + \sin \frac{1}{x}$ 有斜渐近线 $y = x$.

例 2 (2014^{[1][2]}) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

【答案】 1

【考点】 考查已知函数的导数求函数(值), 奇(偶)函数与周期函数的特点.

【解析】 因为 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 所以

$$f(x) = \int 2(x-1)dx = x^2 - 2x + c, x \in [0, 2],$$

由于 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 从而 $c = 0$, 于是

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ -x^2 - 2x, & -2 \leq x < 0. \end{cases}$$

又 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数, 故 $f(7) = f(-1) = 1$.

例 3 (2013^[1]) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 ().

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$

(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$

(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$

(D) $k=3, c=\frac{1}{3}$

【答案】 (D)

【考点】 考查已知极限求参数, 利用洛必达法则或等价无穷小替换定理求极限.

【解析】 方法 1 利用洛必达法则, 有

$$\begin{aligned} c &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}} = \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^{k-1}} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{k} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^{k-1}}, \end{aligned}$$

所以 $k-1=2, k=3$, 从而 $c=\frac{1}{3}$. 应选(D).

方法 2 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$, 所以

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^k},$$

于是 $k=3, c=\frac{1}{3}$. 应选(D).

评注

① 如果知道: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \arctan x \sim \frac{x^3}{3}$, 就可以“秒杀”本题, 可见, 记住常见的等价无穷小对提高解题速度有较大的帮助.

② 将 $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots (-1 \leq x \leq 1)$ 两边从 0 到 x 积分, 得

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots (-1 \leq x \leq 1).$$

于是, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arctan x \sim x$,

$$\arctan x \sim x - \frac{1}{3}x^3.$$

例 4 (2012^{[1][2]}) 微分方程 $ydx + (x - 3y^2)dy = 0$ 满足条件 $y|_{x=1} = 1$ 的解为_____.

【答案】 $x = y^2$ 或 $y = \sqrt{x}$

【考点】 考查一阶线性微分方程的解法.

【解析】 原微分方程既不是可分离变量的微分方程,也不是齐次微分方程,表面上也不是一阶线性微分方程,但如果把 x 看成是未知函数, y 看成是自变量,则原方程可化为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 3y,$$

这是一阶线性微分方程,可以利用一阶线性微分方程通解公式求解,这里采用如下简捷解法:

上方程可化为

$$y \frac{dx}{dy} + x = 3y^2,$$

即 $\frac{d}{dy}(xy) = 3y^2$, 等式两边对 y 积分,得

$$xy = y^3 + C,$$

由 $y|_{x=1} = 1$, 得 $C = 0$. 故 $xy = y^3$, 即 $y^2 = x$ 或 $y = \sqrt{x}$.

例 5 (2010^{[2][3]}) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

【答案】 3

【考点】 考查抽象矩阵行列式的计算, 矩阵与逆矩阵的运算性质.

【解析】 根据所求抽象矩阵的行列式与已知条件的关系, 利用单位矩阵与矩阵(逆矩阵)之间的运算关系, 有

$$\begin{aligned} |A + B^{-1}| &= |A(E + A^{-1}B^{-1})| = |A(BB^{-1} + A^{-1}B^{-1})| = |A(B + A^{-1})B^{-1}| \\ &= |A| |B + A^{-1}| |B^{-1}| = |A| |A^{-1} + B| \frac{1}{|B|} = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3. \end{aligned}$$

例 6 设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(1, 2)$ 与 $N(2, 2)$, 则 ().

(A) $P\{2X + Y \geq 1\} = \frac{1}{2}$

(B) $P\{2X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{2X + Y \geq 0\} = \frac{1}{2}$

(D) $P\{2X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$

【答案】 (D)

【考点】 考查正态分布的线性性质.

【解析】 如果随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $kX + lY \sim N(k\mu_1 + l\mu_2, k^2\sigma_1^2 + l^2\sigma_2^2)$.

对于本题, 根据已知条件, 有

$$2X + Y \sim N(4, 10), \quad 2X - Y \sim N(0, 10),$$

根据正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的概率密度函数关于 $x = \mu$ 对称性, 得

$$P\{2X - Y \leq 0\} = P\{2X - Y > 0\} = \frac{1}{2}.$$

应选(D).

评注

① 如果随机变量 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i=1, 2, \dots, n)$, 且 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 相互独立, 则 $Y = \sum_{i=1}^n k_i X_i \sim N(\sum_{i=1}^n k_i \mu_i, \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2)$, 其中 $E(Y) = \sum_{i=1}^n k_i \mu_i, D(Y) = \sum_{i=1}^n k_i^2 \sigma_i^2, k_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为常数.

② 如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{X \leq \mu\} = P\{X > \mu\} = \frac{1}{2}$.

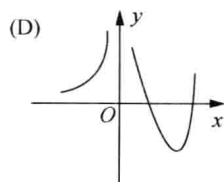
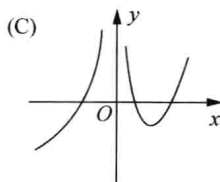
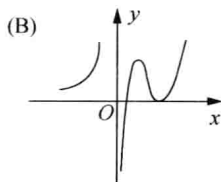
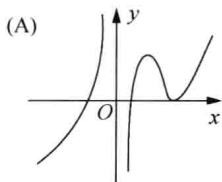
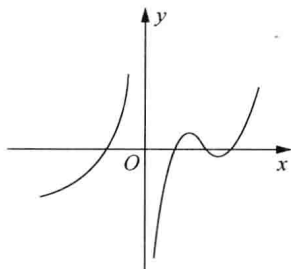
记住正态分布的这些性质对提高解这类问题的速度有较大帮助, 考生应熟练掌握. 本题求解中就运用了这两个常用结论.

二、图示法

根据题目条件作出研究对象的函数 $f(x)$ 的图形, 然后借助于几何图形的直观性与特点, 通过分析推理得出正确结论的方法称为图示法.

当题目条件中有明显的几何特点: 如对称性、奇偶性、周期性、单调性、凹凸性, 曲线的切线或平面图形的面积、空间立体的体积等, 可考虑用图示法.

例 7 (2001^{[1][2]}) 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如右上图所示, 则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为().



【答案】 (D)

【考点】 考查函数与其导函数图形之间的关系.

【解析】 根据函数的单调性与函数导数的符号之间的关系, 结合已知图形可知:

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y=f(x)$ 单调增加, 所以 $f'(x) \geq 0$, 排除(A), (C).

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 从左到右 $y=f(x)$ 先单调增加, 在这个范围内, $f'(x) \geq 0$. 根据(B), (D) 图形的特点, 应选(D).

例 8 (2004^{[2][3]}) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则().

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

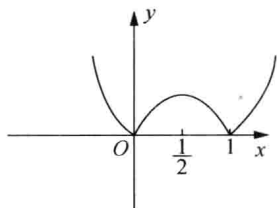
(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【答案】 (C)

【考点】 考查函数的极值点、曲线的拐点的充分条件.

$$\text{【解析】 } f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \leq 0, \\ x - x^2, & 0 < x \leq 1, \\ x^2 - x, & x > 1, \end{cases}$$



其图形如右图所示,由图形的特点可知, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点. 应选(C).

评注

本题也可以求出 $f'(x)$, $f''(x)$, 并判断 $x=0$ 的左、右两侧 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 符号, 确定正确结论, 但不如图示法直观、快捷.

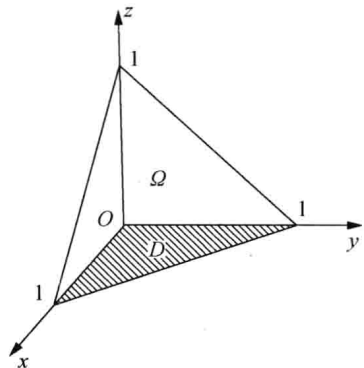
例 9 设平面区域 D 由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 围成, 则 $\iint_D (1+x-y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【考点】 考查二重积分的计算或空间区域的体积.

【解析】 方法 1(图示法) 设平面区域 D 与空间区域 Ω 如右图所示, 则所求二重积分可以转化为三重积分

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x-y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{6} \quad (\text{空间区域 } \Omega \text{ 的体积}). \end{aligned}$$



方法 2(计算法) 将所求二重积分化为二次积分, 得

$$\begin{aligned} \iint_D (1-x-y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) dy \\ &= \int_0^1 \left[(y - xy - \frac{1}{2}y^2) \Big|_0^{1-x} \right] dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

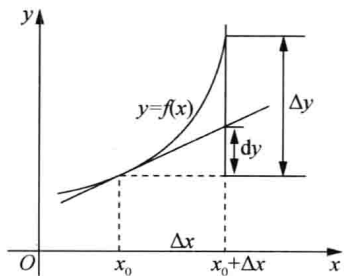
例 10 (2006^{[1][2][3]}) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则().

- (A) $0 < dy < \Delta y$ (B) $0 < \Delta y < dy$
(C) $\Delta y < dy < 0$ (D) $dy < \Delta y < 0$

【答案】 (A)

【考点】 考查微分的概念, 函数的性质, 利用拉格朗日中值定理证明不等式的方法.

【解析】 方法 1(图示法) 由 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ 知, 函数 $f(x)$ 单调增加, 曲线 $y=f(x)$ 是凹的, 由此作函数 $y=f(x)$ 的图形, 如右图所示.



显然,当 $\Delta x > 0$ 时, $\Delta y > dy = f'(x_0)\Delta x > 0$. 应选(A).

方法2(推理法) 由拉格朗日中值定理,得

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x \quad (x_0 < \xi < x_0 + \Delta x).$$

因为 $f''(x) > 0$, 所以 $f'(x)$ 单调增加, 从而 $f'(\xi) > f'(x_0)$, 于是

$$\Delta y = f'(\xi)\Delta x > f'(x_0)\Delta x = dy.$$

又因为 $f'(x) > 0$, 所以 $0 < dy < \Delta y$. 应选(A).

评注

本题考查导数的几何应用及微分的几何意义, 利用一阶导数的符号确定函数的单调性, 利用二阶导数的符号确定函数曲线的凹凸性. 方法1借助于函数 $y = f(x)$ 的图形快速找到正确的选项, 较方法2而言提高了解题速度.

例11 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意常数 a , 有().

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$

(B) $F(-a) = F(a)$

(C) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$

(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

【答案】 (C)

【考点】 考查概率密度与分布函数之间的关系.

【分析】 因为 $\varphi(x)$ 是偶函数, 所以 $y = \varphi(x)$

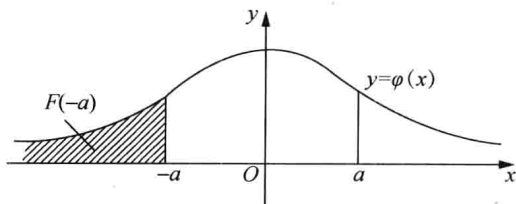
的图形关于 y 轴对称(如右图所示), 且 $F(0) = \frac{1}{2}$.

$$F(-a) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} - \int_{-a}^0 \varphi(x) dx,$$

由图形知, $\int_{-a}^0 \varphi(x) dx = \int_0^a \varphi(x) dx$, 于是

$$F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx.$$

应选(C).



三、特例法

利用满足条件的特例, 排除四个选项中的三个选项, 得到正确答案的方法称为特例法. 这种方法的关键是举出满足题目条件的特例, 这除了需要考生积累一些常用的特例外, 还要通过一定数量题目的训练达到提高解题速度的目的.

例12 (2002^{[1][2]}) 设函数 $f(x)$ 处处可导, 则().

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$

(D) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

【答案】 (D)

【考点】 考查函数与其导函数之间的极限关系.

【解析】 此题不便于推理法,宜用特例排除法.

取 $f(x)=x$, 则 $f'(x)=1$, 显然

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = 1. \text{ 排除(A);}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1. \text{ 排除(C).}$$

取 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, 则 $f'(x)=x$, 显然

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x^2 = +\infty. \text{ 排除(B), 故应选(D).}$$

例 13 (2011^{[2][3]}) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = (\quad)$.

(A) $-2f'(0)$

(B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$

(D) 0

【答案】 (B)

【考点】 考查函数在某点的导数的概念, 利用导数的定义求极限.

【解析】 方法 1(特例法) 取 $f(x)=x$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 满足题目条件. $f'(x)=1, f'(0)=1$. 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot x - 2x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{x^3} = -1,$$

排除(A), (C), (D). 应选(B).

方法 2(推理法) 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} - 2 \frac{f(x^3)}{x^3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0 + x^3) - f(0)}{x^3} \\ &= f'(0) - 2f'(0) = -f'(0). \end{aligned}$$

应选(B).

例 14 设 $f(x)$ 在 $x=-1$ 点具有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = 2$, 则().

(A) $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(-1, f(-1))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=-1$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(-1, f(-1))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

【答案】 (A)

【考点】 考查函数极值(点)的充分条件, 拐点的充分条件, 函数极限的局部保号性.

【解析】 方法 1(特例法) 取 $f(x)=(x+1)^2$, 则 $f'(x)=2(x+1)$, 显然 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} =$

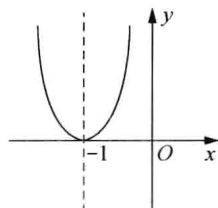
$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x+1} = 2$, 满足题目条件, 由 $f(x)=(x+1)^2$ 的图形(如下图)可知, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极

小值点, $(-1, f(-1))$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 应选(A).

方法2(推理法) 由于 $f(x)$ 在 $x=-1$ 具有连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = 2$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = f'(-1) = 0$, 即 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的驻点. 又

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - f'(-1)}{x - (-1)} = f''(-1) = 2 > 0,$$

由极值的第二充分条件得, $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 应选(A).



方法3(推理法) 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = 2 > 0$, 由函数极限的局部保号性, 在 $\dot{U}(-1, \delta)$ 内, $\frac{f'(x)}{x+1} >$

0, 则

x	$(-1-\delta, -1)$	-1	$(-1, -1+\delta)$
$f'(x)$ 的符号	$-$	0	$+$
$f(x)$ 的单调性	$\searrow$	$x=-1$ 极小值点	$\nearrow$

故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极小值点. 应选(A).

例15 (2005^[2]) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy = (\quad)$.

- (A) πab (B) $\frac{1}{2}\pi ab$ (C) $\pi(a+b)$ (D) $\frac{1}{2}\pi(a+b)$

【答案】 (D)

【考点】 考查利用轮换对称性简化二重积分的计算.

【解析】 **方法1(特例法)** 取 $f(x)=1$, 则 $f(y)=1$, 从而

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy &= \iint_D \frac{a+b}{2} dx dy = \frac{a+b}{2} \iint_D dx dy \\ &= \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{4} \pi 4 = \frac{1}{2} \pi (a+b). \end{aligned}$$

应选(D).

方法2(轮换对称性) 利用轮换对称性, 有

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy &= \iint_D \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} + \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \pi 4 = \frac{1}{2} \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{从而} \iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy &= a \iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy + b \iint_D \frac{\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy \\ &= (a+b) \iint_D \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} dx dy = \frac{1}{2} \pi (a+b). \end{aligned}$$

应选(D).

评注

本题方法1利用特例法快速简捷;方法2利用轮换对称性求解,既训练了应对客观题的快速解题方法,又训练了解答题的方法,对考生起到较大的促进作用,如2014年数学一、数学二、数学三的考题:

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

就可以利用方法2求解(答案: $-\frac{3}{4}$).

例16 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则().

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| = 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|AB| = 0$ (D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|AB| \neq 0$

【答案】 (A)

【考点】 考查抽象矩阵的行列式的计算, 矩阵的秩与该矩阵的行列式之间的关系, 齐次线性方程组有非解(仅有零解)的条件.

【解析】 方法1(特例法) 当 $m > n$ 时, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = (2, 2)$, 则 $|AB| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 排除(B).

当 $m < n$ 时, 取 $A = (1, 1)$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, 则 $|AB| = 0$, 排除(D); 取 $A = (1, 1)$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 则 $|AB| = 2 \neq 0$, 排除(C). 故只有选(A).

方法2(推理法) 因为当 $m > n$ 时, 齐次线性方程组 $BX = 0$ 有非零解, 从而齐次线性方程组 $(AB)X = 0$ 有非零解, 于是 $|AB| = 0$. 应选(A).

四、赋值法

当题目中含有任意常数时, 可以取一些“特殊值”, 包括数值、函数、矩阵等, 通过推理演算, 要么直接得出正确结论, 要么排除错误选项, 这种方法称为赋值法.

例17 (2002^[2]) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 向量 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 而向量 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 则对任意常数 k , 必有().

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关 (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性相关

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性无关 (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + k\beta_2$ 线性相关

【答案】 (A)

【考点】 考查向量组的线性相关(无关)的概念、性质及判断.

【解析】 方法1(赋值法) 因为 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关.

取 $k=0$, (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性相关, 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关矛盾, 排除(B); (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ 线性无关, 则 β_1 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与已知条件矛盾, 排除(C).

取 $k=1$, (D) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1 + \beta_2$ 线性相关, 因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 所以 $\beta_1 + \beta_2$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2,$

α_3 线性表示, 而 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 于是 β_2 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 与已知条件矛盾, 排除(D). 故只有选(A).

方法2(初等变换法) 因为 β_2 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2$ 线性无关. 由 β_1 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 知存在常数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $\beta_1 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$. 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2)$ 作初等列变换, 有

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2) \longrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2),$$

故 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关. 应选(A).

方法3(推理法) 由方法2, 知 $k\beta_1 + \beta_2 = kk_1\alpha_1 + kk_2\alpha_2 + kk_3\alpha_3 + \beta_2$, 于是

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & kk_1 \\ 0 & 1 & 0 & kk_2 \\ 0 & 0 & 1 & kk_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\triangleq (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2)A,$$

而 $R(A) = 4$, 故由矩阵秩的性质, 有 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_2) = 4$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, k\beta_1 + \beta_2$ 线性无关. 应选(A).

例18 设 A, B 为 n 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 分块矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 则 C

的伴随矩阵 $C^* = (\quad)$.

$$(A) \begin{bmatrix} |A|A^* & O \\ O & |B|B^* \end{bmatrix}$$

$$(B) \begin{bmatrix} |B|B^* & O \\ O & |A|A^* \end{bmatrix}$$

$$(C) \begin{bmatrix} |A|B^* & O \\ O & |B|A^* \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}$$

【答案】 (D)

【考点】 考查伴随矩阵的概念、性质, 分块矩阵的行列式与逆矩阵.

【解析】 取 A, B 为可逆矩阵, 则 $|C| = |A||B|$, 即 C 可逆, 于是

$$C^* = |C|C^{-1} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= |A||B| \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B||A|A^{-1} & O \\ O & |A||B|B^{-1} \end{bmatrix},$$

利用 $|A|A^{-1} = A^*, |B|B^{-1} = B^*$, 有

$$C^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & O \\ O & |A|B^* \end{bmatrix}. \text{ 应选(D).}$$

第一部分 选 择 题

高等数学

1. 函数 $f(x) = \frac{|x-1|\sin(x-2)}{(x-1)(x-2)^2(x-3)}$ 在下列()区间内有界.

- (A) (0,1) (B) (1,2) (C) (2,3) (D) (3,4)

2. 设 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1, \\ 2x+1, & x > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f[g(x)] = ()$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在

3. 函数 $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ ().

- (A) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时为无穷大 (B) 在区间 $(0,1]$ 上无界
(C) 在区间 $(0,1]$ 上有界 (D) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时有有限极限

4. 下列结论中正确的是().

- (A) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) \leq 0$
(B) 如果存在 $\delta > 0$, 使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$
(C) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$
(D) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

5. (2003^{[1][2]}) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有().

- (A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立 (B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立
(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在 (D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

6. (2000^[3]) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ().

- (A) 存在且等于零 (B) 存在但不一定为零
(C) 一定不存在 (D) 不一定存在

7. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限().

- (A) 等于 0 (B) 等于 $\frac{4}{3}$ (C) 为 ∞ (D) 不存在但不为 ∞

8. 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax - b) = 0$, 则().

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{2}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{2}$ (C) $a=-1, b=\frac{1}{2}$ (D) $a=-1, b=-\frac{1}{2}$

9. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - (ax^2 + bx)}{x^2} = 1$, 则().

- (A) $a=-3, b=-2$ (B) $a=-3, b=2$ (C) $a=3, b=-2$ (D) $a=3, b=2$

10. 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x + xf(x)}{x^3} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+f(x)}{x^2} = ()$.

- (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \ln(1+x) \right] = ()$.

- (A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

12. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - e^{\sin x}$ 与 x^n 是同阶无穷小量, 则 $n = ()$.

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

13. 设 $f(x) = e^x$, 且 $\int_0^x f(t) dt = xf(ux)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} u = ()$.

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) 2

14. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 比其他三个更高阶的无穷小量是().

- (A) $x^2 + x^4$ (B) $(1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} - 1$
(C) $\frac{\sin x}{x} - 1$ (D) $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$

15. 设函数 $f(x), g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \tan^2 t dt$ 是 $\int_0^x x^2 g(x) dx$ 的().

- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小
(C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

16. (2007^{[1][2]}) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是().

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

17. (2013^[3]) 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用“ $o(x)$ ”表示比 x 高阶的无穷小, 则下列式子中错误的是().

- (A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$ (B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$
(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$ (D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

18. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x - (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列选项中错误的是().

- (A) $a = \frac{1}{2}$ (B) $b = 0$ (C) $c = 1$ (D) $d = 0$

19. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = (e^{bx} - 1)(\cos x - 1)$ 是等价无穷小量, 则().

- (A) $a = -1, b = -\frac{1}{3}$ (B) $a = -1, b = \frac{1}{3}$ (C) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$ (D) $a = 1, b = \frac{1}{3}$