实用数学建模

——提高篇

姜启源　谢金星　编

高等教育出版社

实用数学建模

Shiyong Shuxue Jianmo

——提高篇

姜启源 谢金星 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书适用于应用型人才培养中的数学建模教学，分基础篇和提高篇两册。

基础篇从数据或故事出发，通过生活中的简单案例讲述什么是数学模型，以及怎样用机理分析方法和初等数学、微积分等工具建立模型，尽量避免繁琐的数学推导，可以作为数学建模课程的教学用书。

提高篇从实际问题出发，讲述优化、统计、决策、对策、网络、模拟等实用性较强的建模过程。计算方法力求讲清思路、针对应用，并介绍相应的软件实现，供在初步学习建模知识的基础上提高所用，并适于作为数学建模竞赛的培训教材。

本书可供培养应用型人才的一般院校及高职高专院校相关专业学习数学建模课程、参加数学建模竞赛培训使用，也为希望了解数学建模的各界人士打开一个窗口，可作为在各个领域中用数学建模方法解决实际问题的科技工作者的参考材料。

图书在版编目（CIP）数据

实用数学建模．提高篇/姜启源，谢金星编．--北京：高等教育出版社，2014.10
ISBN 978-7-04-040847-8

Ⅰ.①实… Ⅱ.①姜… ②谢… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第175743号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 田 玲　封面设计 王 洋　版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹　责任校对 杨凤玲　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	河北新华第一印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.25	版　　次	2014年10月第1版
字　　数	270千字	印　　次	2014年10月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	25.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40847-00

前　言

数学建模是20世纪80年代初进入我国大学课堂的，经过30年的发展，目前已有上千所高校开设了各种形式的数学建模课程，正式出版的教材和参考书达200多本。一年一届的全国大学生数学建模竞赛自1992年开始举办，到2013年有1 300多所院校、23 000多个队的7万余名学生参加。数学建模的课堂教学与课外活动之所以得到大学师生的充分认同和热烈欢迎，可以从以下两个方面来认识。

首先，近几十年来时代发展和科技进步的大潮把数学建模从幕后推向了前台，其表现为，电子计算机技术的出现和迅速发展，为数学建模的应用提供了强有力的工具；在高新技术领域，数学建模几乎成为必不可少的手段；数学迅速进入经济、人口、生物、生态、医学、地质等新领域，为数学建模开拓了许多新的处女地。数学建模引入高等教育，顺应了时代发展的潮流，适应并满足了科技进步的需要。

其次，数学建模给教育改革和人才培养注入了强大活力。长期以来，数学的教学体系和内容形成了一种自我封闭的局面，教师教得辛苦，学生学得吃力。数学建模的引入为数学和外部世界的联系打开了一条通道，让学生亲自参加将数学应用于实际的尝试，参与发现和创造的过程，取得在传统的数学课堂里和书本上无法获得的宝贵经验和亲身感受，在知识、能力及素质三方面迅速成长。可以毫不夸张地说，数学建模进入大学课堂，是这些年来规模最大、最成功的一项数学教学改革实践。

像众多新生事物一样，数学建模教学与竞赛活动在各个学校的开展也遇到种种困难，并且呈现出不平衡现象。单从教材方面来说，虽然这些年出版了这么多本，但是大多数适合于学时较多、层次较高的重点大学使用；即便一些为一般院校、高职高专院校编写的数学模型教材，也存在着内容较多、较难的状况。

基于多年来从事数学建模教学和竞赛辅导、组织工作的实践经验，作者编写这本书的定位是，为培养应用型人才的一般院校、高职高专院校提供既可用于数学建模课程学习、又可用于参加数学建模竞赛培训的教材。

本书分基础篇和提高篇两册。基础篇从数据或故事出发，通过生活中的简单案例讲述什么是数学模型以及怎样用机理分析方法和初等数学、微积分等工具建立模型，尽量避免繁琐的数学推导，其中与《数学模型（第四版）》一书相重

的案例(约30%)也作了重新构思与简化,适于24至32学时的数学建模课程教学使用。

提高篇从实际问题出发,讲述优化、统计、决策、对策、网络、模拟等实用性较强的建模过程,计算方法力求讲清思路、针对应用,并介绍相应的软件实现,供在初步学习建模知识的基础上提高所用,并适于作为数学建模竞赛的培训教材。

本书在求解模型用到MATLAB和LINGO软件时,只主要讲述具体程序的用法,这两个软件的一般介绍请读者参考其他资料。

数学建模竞赛为喜爱数学建模、希望通过解决实际问题培养建模能力的学生搭建了一个广阔的平台。本书每一章都选择全国大学生数学建模竞赛的一道题目,结合学生的优秀论文与命题人或评阅人的评述文章,加以归纳和整理,展示如何运用这一章的内容与方法,分析和求解这道赛题。

全书的组织结构和内容取舍由两位编者反复讨论决定,第6章、第9章以及8.3,10.2等节由谢金星编写,其余章节由姜启源编写。

在本书的编写过程中,编者结合教学方式和学习方式正在发生改变的现实,以“纸质教材+数字课程”的方式对教材的内容和形式进行了整体设计。数字课程内容紧密结合纸质教材,包含与教材内容相关的教学视频、拓展案例、PPT课件和MATLAB、LINGO源程序,其中,教学视频来自编者在清华大学讲授“数学模型”课程的教学实录。希望通过这些资源的设计和支撑,辅助教师课堂教学,帮助学生更好地理解和实现建模过程。

诚恳希望广大读者指出本书的不足,提出宝贵的建议,让我们共同努力,为数学建模教学和竞赛活动取得更大成绩继续奋斗。

编　者

2014年4月

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/40647
2. 输入数字课程账号（见封底明码）、密码、验证码
3. 点击“进入课程”
4. 开始课程学习

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：lixp1@hep.com.cn

目　　录

第6章　数学规划模型

在工程技术、经济管理、科学研究和日常生活等诸多领域中,人们经常遇到的一类决策问题是:在一系列客观或主观限制条件下,寻求使所关注的某个或多个指标达到最优(最小或最大)的决策.求解这类问题的常用方法是数学规划,它包括三个要素:一是**决策变量**,通常是该问题要求解的那些未知量,不妨用 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 表示;二是**目标函数**,通常是该问题要优化(最小或最大)的那个目标的数学表达式,它是决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的函数,不妨抽象地记作 $f(\boldsymbol{x})$;三是**约束条件**,由该问题对决策变量的限制条件给出,即 $\boldsymbol{x}$ 允许取值的范围 $\boldsymbol{x}\in\Omega$,Ω 称可行域,常用一组关于 $\boldsymbol{x}$ 的不等式(也可以有等式)来界定.一般地,这类模型可表述成如下形式:

$$\begin{aligned}&\mathrm{opt}\quad z=f(\boldsymbol{x})\\&\mathrm{s.t.}\quad g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0,i=1,\cdots,m\end{aligned}$$

这里 opt 是最优化(optimize)的意思,可以是求极小(min)或求极大(max);s. t.(subject to)是"受约束于"的意思.满足约束条件的决策变量 $\boldsymbol{x}$ 称为可行解,使目标函数取到最优值的可行解 $\boldsymbol{x}^*$ 称为最优解.

当上述模型中决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的所有分量 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 均为实数,且 $f,g_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都是线性函数时,称为**线性规划**(linear programming,简记作 LP).若 f,g_i 至少有一个是非线性函数,则称为**非线性规划**(nonlinear programming,简记作 NLP).若 $\boldsymbol{x}$ 至少有一个分量只能取整数,则称为**整数规划**(integer programming,简记作 IP).如果 f 是一个向量值函数,即问题具有多个决策目标,则称为**多目标规划**(multi-objective programming,简记作 MOP).本章介绍这四类规划的基本知识,通过实例说明其建模和求解方法.

6.1　线性规划

6.1.1　实例及其数学模型

例1　奶制品生产计划[1]

问题提出　某奶制品加工厂用牛奶生产 A_1,A_2 两种奶制品,1 桶牛奶可以在甲类设备上用 12 h 加工成 3 kg A_1,或者在乙类设备上用 8 h 加工成 4 kg A_2.

根据市场需求,生产的 A_1, A_2 全部能售出,且每千克 A_1 获利 24 元,每千克 A_2 获利 16 元. 现在加工厂每天能得到 50 桶牛奶的供应,每天工人总的劳动时间为 480 h,并且甲类设备每天至多能加工成 100 kg A_1,乙类设备的加工能力没有限制. 试为该厂制订一个生产计划,使每天获利最大,并进一步讨论以下 3 个附加问题:

1) 若用 35 元可以买到 1 桶牛奶,应否作这项投资?若投资,每天最多购买多少桶牛奶?

2) 若可以聘用临时工人以增加劳动时间,付给临时工人的工资最多是每小时几元?

3) 由于市场需求变化,每千克 A_1 的获利增加到 30 元,应否改变生产计划?

问题分析 这个优化问题的目标是使每天的获利最大,要作的决策是生产计划,即每天用多少桶牛奶生产 A_1,用多少桶牛奶生产 A_2(也可以是每天生产多少千克 A_1,多少千克 A_2),决策受到 4 个条件的限制:原料(牛奶)供应、劳动时间、甲类设备的加工能力、产量非负. 按照题目所给信息,将决策变量、目标函数和约束条件用数学符号及式子表示出来,就可得到下面的模型.

模型建立 设决策变量为每天用 x_1 桶牛奶生产 A_1,用 x_2 桶牛奶生产 A_2. 记每天获利为 z(元),由于 x_1 桶牛奶可生产 $3x_1$ kg A_1,获利 $24\times 3x_1$, x_2 桶牛奶可生产 $4x_2$ kg A_2, 获利 $16\times 4x_2$,故目标函数为 $z=72x_1+64x_2$. 考虑到 4 个约束条件,可得如下线性规划模型:

$$\max z = 72x_1 + 64x_2 \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leqslant 50 \tag{2}$$

$$12x_1 + 8x_2 \leqslant 480 \tag{3}$$

$$3x_1 \leqslant 100 \tag{4}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{5}$$

模型假设与评注 在建立上述线性规划模型的过程中,我们实际上作了如下的假设:

1) A_1,A_2 两种奶制品每千克的获利是与它们各自产量无关的常数,每桶牛奶加工出 A_1,A_2 的数量和所需的时间是与它们各自的产量无关的常数.

2) A_1,A_2 每千克的获利是与它们相互间产量无关的常数,每桶牛奶加工出 A_1,A_2 的数量和所需的时间是与它们相互间产量无关的常数.

3) 加工成 A_1,A_2 的牛奶的桶数可以是任意实数.

一般地,针对实际问题建立线性规划模型时,均需要作类似的假设:

- **比例性** 每个决策变量对目标函数的“贡献”,与该决策变量的取值成正比;每个决策变量对每个约束条件右端项的“贡献”,与该决策变量的取值成

正比.

- **可加性**　各个决策变量对目标函数的“贡献”，与其他决策变量的取值无关；各个决策变量对每个约束条件右端项的“贡献”，与其他决策变量的取值无关.

- **连续性**(也称**可分性**)　每个决策变量取连续值，即决策变量表示的对象是任意可分的.

比例性和可加性保证了目标函数和约束条件对于决策变量的线性性，连续性则允许得到决策变量的实数最优解. 由于这些假设对于书中给出的、经过简化的实际问题是如此明显地成立，本章下面的例题就不再一一列出类似的假设了. 当然，在现实生活中这些假设通常只是近似成立，比如对于本例，A_1，A_2 的产量很大时，通常会使它们每千克的获利有所减少.

例 2　资金投资问题[2]

问题提出　某公司需要决定未来 3 年的投资策略. 公司现有 1 千万元现金，当前及 3 年内有 5 种投资产品可供选择，投资的现金流分别如表 1 所示(例如，对于产品 A，如果当前投入 1 元，则第 1 年、第 2 年的收益分别为 0.5 元和 1 元). 此外，公司也可以将富裕的资金存入银行，存款年利率为 8%. 公司还规定，对每个品种的投资不得超过 750 万元. 公司应该如何运作资金，才能使第 3 年所拥有的现金最多？

表 1　投资产品的现金流

产品	年			
	0	1	2	3
A	−1	0.5	1	0
B	0	−1	0.5	1
C	−1	1.2	0	0
D	−1	0	0	1.9
E	0	0	−1	1.5

模型建立　以万元为单位，记决策变量 $x_i(i = \mathrm{A,B,C,D,E})$ 为投资产品 i 的资金量，$y_t(t = 0,1,2)$ 为第 t 年在银行存款的资金量，并假设资金量是无限可分的连续量(可取任何非负实数).

根据题意(表 1 中最后一列的数据)，公司第 3 年所拥有的现金数量为

$$z = x_{\mathrm{B}} + 1.9x_{\mathrm{D}} + 1.5x_{\mathrm{E}} + 1.08y_2. \tag{6}$$

假设公司必须保证其每年的现金流平衡(既不能通过其他渠道融资和对外负债，也不存在其他投资方式和应收账款无法收回的债权)，则根据表 1 中 2—4

列的数据有

$$x_A + x_C + x_D + y_0 = 1\ 000, \tag{7}$$

$$0.5x_A + 1.2x_C + 1.08y_0 = x_B + y_1, \tag{8}$$

$$x_A + 0.5x_B + 1.08y_1 = x_E + y_2. \tag{9}$$

此外,因为对每种产品的投资不得超过 750 万元,且所有决策变量为非负,所以

$$0 \leqslant x_i \leqslant 750, \quad i = \mathrm{A,B,C,D,E}, \tag{10}$$

$$y_t \geqslant 0,\ t = 0,1,2. \tag{11}$$

问题归结为在约束(7)—(11)的条件下,使(6)最大,这是一个线性规划模型.

例 3　学生入学问题[2]

问题提出　某地有两所中学(A 和 B),新生来源于 3 个主要居民区(1,2,3),共 800 人,其中非本地户籍学生 200 人,占 25%. 3 个居民区中非本地户籍和本地户籍的学生数量、居民区与两所学校的距离信息见表 2. 每所学校最多能容纳 500 名新生,且根据当地规定,每所学校非本地户籍学生的比例与 25% 的总比率应基本一致,最多只能有 ±5% 的误差. 为了使学生上学的总路程最短,应该如何将学生分配到两所学校?

表 2　学生与学校信息

居民区	非本地户籍学生数	本地户籍学生数	与学校 A 的距离(km)	与学校 B 的距离(km)
1	50	200	1	2
2	50	250	2	1
3	100	150	1	0.5

模型建立　记决策变量 x_{ij}为 i 区到 j 校上学的非本地户籍学生数量,y_{ij}为 i 区到 j 校上学的本地户籍学生数量,$i = 1,2,3$,$j = \mathrm{A,B}$. 用 d_{ij}表示 i 区到 j 校的距离. 根据题意,学生上学的总路程(所有学生上学单程距离的总和)为

$$\sum_{j=\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{3} d_{ij}(x_{ij} + y_{ij}). \tag{12}$$

用 m_i, n_i 分别表示 i 区非本地户籍学生和本地户籍学生的数量,易知

$$\sum_{j=\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} x_{ij} = m_i, \quad i = 1,2,3, \tag{13}$$

$$\sum_{j=\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y_{ij} = n_i, \quad i = 1,2,3. \tag{14}$$

学生总共 800 人,每所学校人数不能超过 500 人,自然也不能小于 300 人,因此

$$300 \leqslant \sum_{i=1}^{3} (x_{ij} + y_{ij}) \leqslant 500, \quad j = \mathrm{A}, \mathrm{B}. \tag{15}$$

还有,每所学校非本地户籍学生的比率只能是 25% ±5%,即位于 20% ~ 30%之间,所以

$$0.2 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{ij}}{\sum_{i=1}^{3} (x_{ij} + y_{ij})} \leqslant 0.3, \quad j = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \tag{16}$$

这个约束等价于

$$\frac{7}{3} \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{3} y_{ij} \leqslant 4 \sum_{i=1}^{3} x_{ij}, \quad j = \mathrm{A}, \mathrm{B}. \tag{17}$$

最后,还需要有非负约束

$$x_{ij}, \ y_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, j = \mathrm{A}, \mathrm{B}. \tag{18}$$

问题归结为在约束(13)—(15)及(17)(18)下,使目标函数(12)最小,这是一个线性规划模型.

严格来说 x_{ij}, y_{ij}是学生人数,应该是整数,因此这是一个整数规划. 考虑到学生人数较多,这里近似地把学生人数作为连续变量看待(后面将看到,求解结果恰好是整数).

6.1.2　线性规划的基本原理和解法

图解法

6.1.1 例 1 给出的线性规划模型的决策变量为 2 维,用图解法既简单,又便于直观地把握线性规划的基本性质. 将约束条件(2) ~ (5)中的不等号改为等号,可知它们是 x_1Ox_2 平面上的 5 条直线,依次记为 L_1 ~ L_5,如图 1,其中 L_4,L_5 分别是 x_2 轴和 x_1 轴. 并且不难判断,(2) ~ (5)式界定的可行域是 5 条直线上的

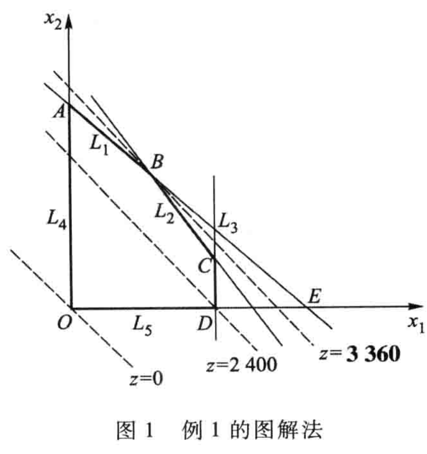

图 1　例 1 的图解法

线段所围成的5边形 $OABCD$. 容易算出,5个顶点的坐标为 $O(0,0)$, $A(0,50)$, $B(20,30)$, $C(100/3,10)$, $D(100/3,0)$.

目标函数(1)中的 z 取不同数值时,在图1中表示一组平行直线(虚线),称等值线族. 如 $z=0$ 是过 O 点的直线,$z=2\ 400$ 是过 D 点的直线,$z=3\ 040$ 是过 C 点的直线……可以看出,当这族平行线向右上方移动到过 B 点时,$z=3\ 360$,达到最大值,所以 B 点的坐标(20,30)即为最优解:$x_1=20$, $x_2=30$.

我们直观地看到,由于目标函数和约束条件都是线性函数,在2维情形,可行域为直线段围成的凸多边形,目标函数的等值线为直线,于是最优解一定在凸多边形的某个顶点取得.

推广到 n 维情形,可以猜想,最优解会在约束条件所界定的一个凸多面体(可行域)的某个顶点取得. 线性规划的理论告诉我们,这个猜想是正确的.

单纯形算法

1. 线性规划的标准形

2维的情况可以推广到 n 维:线性规划的可行域是超平面组成的凸多面体,等值线是超平面,最优解在凸多面体的某个顶点取得. 凸多面体的顶点如何得到呢? 在6.1.1例1中,对每个不等式约束,我们总是考虑在第一象限画出对应的等式所代表的直线. 可以想到,为了便于用线性代数的方法处理,将约束条件中的不等式直接化为等式是有好处的. 实际上,每个线性规划模型都可以表达成如下的等式约束形式:

$$\begin{aligned} &\min \quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ &\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant \boldsymbol{0}\text{(每个分量非负)} \end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是决策向量,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$ 是费用向量,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}(m\leqslant n)$ 是约束矩阵(一般假设行满秩),$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 是右端项向量(可以要求 $\boldsymbol{b}$ 是非负向量,因为否则的话可将对应的等式约束两边同时乘 -1). 这种形式称为**线性规划的标准形.**

一个不是标准形式的线性规划,可以通过以下几个等价变换变成标准形:

(1) 如果目标函数是求极大,则利用 $\max z \Leftrightarrow \min(-z)$ 化为求极小.

(2) 如果约束条件中有形如 $\boldsymbol{Ax}\leqslant\boldsymbol{b}$ 的不等式,可以在不等式左边加入**松弛变量**(slack variable)化为等式;对于 $\boldsymbol{Ax}\geqslant\boldsymbol{b}$ 形式的不等式,则可以在不等式左边减去**剩余变量**(surplus variable)化为等式(相当于不等式两边同时乘 -1 变为“$-\boldsymbol{Ax}\leqslant-\boldsymbol{b}$”以后再加入松弛变量).

(3) 如果某个 x_j 没有非负约束,可令 $x_j=x_j'-x_j''$, $x_j',x_j''\geqslant 0$;如果原来约束为 $x_j\geqslant l_j$,可令 $x_j'=x_j-l_j$, $x_j'\geqslant 0$(对于上界约束,可将不等式两边同时乘 -1 再类似处理).

2. 基解与基可行解

在标准形式下,可行域(凸多面体)是由等式约束和非负约束确定的. 如果 $m=n$, 则由等式约束 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可以直接解出可行点(或者判断无可行解);一般情况下 $m<n$, 等式约束 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 没有唯一解,但当指定 $\boldsymbol{x}$ 中的 $n-m$ 个分量的取值后就可以直接解出可行点(或者判断在该指定下无可行解). 考虑到非负约束也可能代表可行域的边界,直接指定 $n-m$ 个分量的值为 0 是方便的,如果此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 正好有唯一解,我们把这个解称为**基解**(basic solution). 当基解是问题的可行解时,称为**基可行解**(basic feasible solution).

例如,例 1 用标准形表示时,约束矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和右端项向量 $\boldsymbol{b}$ 分别是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\12&8&0&1&0\\3&0&0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5),\boldsymbol{b}=(50,480,100)^{\mathrm{T}},\qquad(20)$$

其中 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_5$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n=5$ 个列向量. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的基解可以如下得到:$\boldsymbol{A}$ 的秩 $m=3$,为了保证指定 $n-m(=2)$ 个分量的取值为 0 后 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解,任取 $m(=3)$ 个线性无关的列向量组成**基**(也称**基矩阵**)$\boldsymbol{B}$, 其余列向量组成**非基** $\boldsymbol{N}$,将 $\boldsymbol{A}$ 的列向量重排次序后可写作 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}\quad\boldsymbol{N})$,相应地重排 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\\boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}$,于是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Bx}_B+\boldsymbol{Nx}_N=\boldsymbol{b}$. 分别称 $\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N$ 为**基变量**(basic variable)和**非基变量**(nonbasic variable),令非基变量 $\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$,解得基变量 $\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$(自然,$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵).

对于例 1,如取 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)$(单位矩阵),则 $\boldsymbol{x}_B=(x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{b}=(50,480,100)^{\mathrm{T}}$, 而 $\boldsymbol{x}_N=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=(0,0)^{\mathrm{T}}$, 于是 $\boldsymbol{x}=(0,0,50,480,100)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个基可行解,对应图 1 中 O 点.

类似地,若取 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_5)$,则 $\boldsymbol{x}_B=(x_1,x_2,x_5)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=(20,30,40)^{\mathrm{T}}$, 于是 $\boldsymbol{x}=(20,30,0,0,40)^{\mathrm{T}}$ 也是一个基可行解,对应图 1 中的 B 点.

若取 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)$,则 $\boldsymbol{x}_B=(x_1,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=(50,-120,-50)^{\mathrm{T}}$, 于是 $\boldsymbol{x}=(50,0,0,-120,-50)^{\mathrm{T}}$ 也是一个基解,但不是可行解,它对应图 1 中的 E 点,而 E 点不在可行域内.

容易知道,例 1 共有 10 个基解,其中 5 个分别对应可行域(5 边形)的 5 个顶点,是基可行解. 一般地,基解最多有 $\begin{pmatrix}n\\m\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ 个,但基可行解的个数则要视具体问题而定.

可以证明:只要问题存在可行解,则一定存在基可行解;此外,基可行解正好与可行域(凸多面体)的顶点一一对应. 于是,当问题的最优解存在(即有可行解

且最优值有界)时,一定至少存在某个基可行解是最优解. 根据这一性质,美国数学家 Dantzig 于 1947 年提出了**单纯形法**(simplex method),其基本思路是:用迭代法从一个顶点转换到另一个顶点(称为一次旋转),每一步转换只将一个非基变量(指一个分量)变为基变量,称为进基,同时将一个基变量变为非基变量,称为出基. 确定进基和出基的标准是使目标函数值下降(至少不增加).

实现这一思路的算法关键是要解决以下问题:选取初始基可行解(顶点),判断当前解是否最优,确定进基和出基变量,防止迭代过程出现循环(由于只有有限个基可行解,不出现循环就可以保证算法在有限步迭代后终止)等. 在实现完整的单纯形算法时可以有多种不同的变形,具体细节可参阅任何一本有关线性规划的书籍,如[2,3,4]. 下面只简要介绍解的最优性检验.

3. 检验基可行解的最优性

假设当前迭代位于基可行解 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B^{(0)}\\ \boldsymbol{x}_N^{(0)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$, 对应的基矩阵和非基矩阵分别为 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}$, 费用向量 $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}_B\\ \boldsymbol{c}_N\end{pmatrix}$,目标函数值为

$$z^{(0)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B^{(0)}+\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N^{(0)}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{21}$$

对于问题的任何一个可行解 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}$,有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b}, \tag{22}$$

即

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N, \tag{23}$$

对应的目标函数值为

$$\begin{aligned} z&=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N)+\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_N\\ &=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N\\ &=z^{(0)}+\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{c}_N-(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B\end{pmatrix}. \tag{25}$$

若 $\boldsymbol{r}\geqslant\boldsymbol{0}$,则 $z\geqslant z^{(0)}$(因为可行解 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$),当前基可行解 $x^{(0)}$ 是最优的. 一般称 $\boldsymbol{r}$ 为减少费用(reduced cost)向量,中文书上通常形象地称为检验数. 注意 $\boldsymbol{r}$ 的维数为 n(决策变量的个数),即每个决策变量对应一个减少费用. 显然,基变量对应的减少费用为 0,而非基变量 x_k 对应的减少费用为 $r_k=c_k-(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_B=c_k-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k$(这里 $\boldsymbol{p}_k$ 是 $\boldsymbol{A}$ 中与变量 x_k 对应的列).

否则，当前基可行解 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 不是最优的，需要继续下一步迭代(即旋转).

线性规划的敏感性分析

假设最优的基可行解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$，对应的基矩阵和非基矩阵分别为 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}$，目标函数值为 $z=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$.

1. 右端项向量的敏感性分析

当右端项向量 $\boldsymbol{b}$ 变为 $\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$ 时，不会影响减少费用 $\boldsymbol{r}$. 所以为了保持 $\boldsymbol{B}$ 仍为最优基，只需要 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}'=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\geqslant\boldsymbol{0}$，由此可以计算 $\Delta\boldsymbol{b}$ 允许的变化范围. 但即使最优基不变，最优解、最优值一般也会改变. 不过由于此时

$$z'-z=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\Delta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Delta b_i,\tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$是拉格朗日(Lagrange)乘子(其维数等于约束的个数)，所以 b_i 改变一个单位时(其他条件不变)，最优值改变 λ_i 个单位. 正因为如此，在经济学中一般称 λ_i 为对应约束的影子价格、边际价格或对偶价格. 必须注意，拉格朗日乘子只有在 $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b})\geqslant\boldsymbol{0}$ 时有意义.

2. 费用系数的敏感性分析

(1) 假设非基变量 x_k 的费用系数 c_k 变为 $c_k'=c_k+\Delta c_k$(其他条件不变)，由于 $\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}$ 不变，只有 $r_k=c_k-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k$ 变为 $r_k'=c_k'-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k=r_k+\Delta c_k$. 如果 $r_k'\geqslant 0$(即 $\Delta c_k\geqslant -r_k$)，则 $\boldsymbol{B}$ 仍为最优基，最优解和最优值也不变.

当然，如果 $r_k'<0$，则最优基、最优解和最优值都可能改变，需要重新求解线性规划问题.

(2) 假设基变量 x_k 的费用系数 c_k 变为 $c_k'=c_k+\Delta c_k$(其他条件不变)，虽然 $\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}$ 改变，但我们也可以重新计算减少费用 $\boldsymbol{r}'$. 通过 $\boldsymbol{r}'\geqslant\boldsymbol{0}$ 也可以确定 Δc_k 允许的变化范围，但即使最优基、最优解不变，最优值一般也会改变(最优值的改变量显然等于该系数的改变量乘以最优解中对应的基变量的值).

(3) 如果非基变量和基变量对应的费用系数同时变化，可以类似分析.

3. 约束矩阵的敏感性分析

当费用系数和右端项向量同时变化，或者约束矩阵中的系数改变时，仍然可以类似分析，但情况比较复杂，这里就不讨论了.

线性规划的其他算法

单纯形法是最早提出的线性规划算法，1980 年以前几乎是线性规划的唯一算法. 20 世纪 80 年代，人们又提出了一类新的算法——内点法(interior point method). 内点算法也是迭代法，但不再从可行域的一个顶点转换到另一个顶点，而是直接从可行域的内部逼近最优解. 虽然实际证明单纯形法计算效果很好，目

前仍然经常使用,但理论上讲内点算法具有单纯形法所不具备的一些优点,尤其对于特别大规模的问题(如变量规模上万甚至达到十万、百万量级),使用内点算法可能更为有效.内点算法理论较为复杂,有兴趣的读者请参看有关的专门书籍.

MATLAB 软件的优化工具箱和 LINGO 软件等都可以方便地求解线性规划,下面我们只结合实例介绍用 LINGO 软件求解.

6.1.3 实例的求解

例 1 的求解 用 LINGO 求解规划问题时，只需要直接输入模型.由于 LINGO 中已假设所有的变量都是非负的，所以非负约束不必输入;LINGO 也不区分变量中的大小写字符(实际上任何小写字符将被转换为大写字符);约束条件中的“< =”及“> =”可用“<”及“>”代替;任何语句都需要以分号结束.

对于例 1，在 LINGO 模型窗口输入如下程序：

```
max =72* x1 +64* x2;
x1 +x2 <50;
12* x1 +8* x2 <480;
3* x1 <100;
```

选择菜单 LINGO|Solve 运行,即可得到如下输出：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                     3360.000
Total solver iterations:                    2

          Variable        Value      Reduced Cost
             X1        20.00000        0.000000
             X2        30.00000        0.000000

             Row   Slack or Surplus   Dual Price
              1        3360.000        1.000000
              2        0.000000        48.00000
              3        0.000000        2.000000
              4        40.00000        0.000000
```

上述结果明确地告诉我们,这个线性规划的最优解为 $x_1=20, x_2=30$,最优值为 $z=3\ 360$,即用 20 桶牛奶生产 A_1, 30 桶牛奶生产 A_2,可获最大利润 3 360 元.这与上面图解法的结果一致.

上面的输出中除了问题的最优解和最优值以外,还有许多对分析结果有用的信息,下面结合题目中提出的 3 个附加问题,并利用图解法的直观给予