THE SOUTHEAST OF CHINA
MATHEMATICAL OLYMPIAD TESTS
FROM THE FIRST TO THE LAST

历届中国东南地区

数学奥林匹克试题集

2004～2012

● 刘培杰数学工作室　编

$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

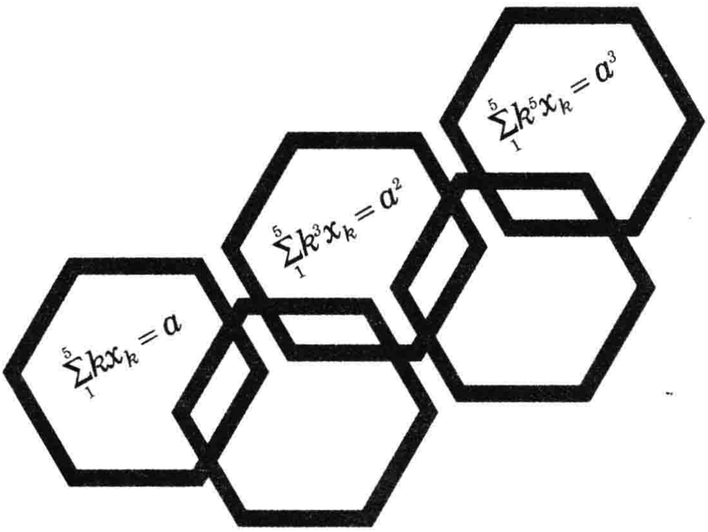
THE SOUTHEAST OF CHINA MATHEMATICAL OLYMPIAD TESTS FROM THE FIRST TO THE LAST

历届中国东南地区

数学奥林匹克试题集

2004～2012

● 刘培杰数学工作室　编



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

数学奥林匹克是较高层次的数学竞赛，在数学的发展中起着至关重要的作用。本书汇集了第1届至9届中国东南地区数学奥林匹克竞赛试题及解答，内容详实。

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用。

图书在版编目(CIP)数据

历届中国东南地区数学奥林匹克试题集：2004～2012/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014. 6

ISBN 978 - 7 - 5603 - 4765 - 3

Ⅰ. ①历… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学-竞赛题 Ⅳ. O1 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 121975 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 6.25　字数 112 千字
版　　次　2014 年 6 月第 1 版　2014 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 4765 - 3
定　　价　18.00 元

目录

2004 年第 1 届中国东南地区数学奥林匹克

（浙江　温州）

第 *1* 天

（2004 年 7 月 10 日 8：00 ～ 12：00）

1 设实数 a,b,c 满足 $a^2+2b^2+3c^2=\frac{3}{2}$，求证：$3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant 1$.

（李胜宏供题）

证明　由柯西不等式，$(a+2b+3c)^2\leqslant(\sqrt{1}^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2)[(\sqrt{1}a)^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]=9$，所以 $a+2b+3c\leqslant 3$，所以 $3^{-a}+9^{-b}+27^{-c}\geqslant 3\sqrt[3]{3^{-(a+2b+3c)}}\geqslant 3\sqrt[3]{3^{-3}}=1$.

2 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，点 P 在线段 AD 上，过点 D 作一直线分别与线段 AB,PB 交于点 M,E，与线段 AC,PC 的延长线交于点 F,N（图 1）. 已知 $DE=DF$，求证：$DM=DN$.

（陶平生供题）

证明　对 $\triangle AMD$ 和直线 BEP 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DE}{EM}\cdot\frac{MB}{BA}=1 \quad ①$$

对 $\triangle AFD$ 和直线 NCP 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AC}{CF}\cdot\frac{FN}{ND}\cdot\frac{DP}{PA}=1 \quad ②$$

对 $\triangle AMF$ 和直线 BDC 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AB}{BM}\cdot\frac{MD}{DF}\cdot\frac{FC}{CA}=1 \quad ③$$

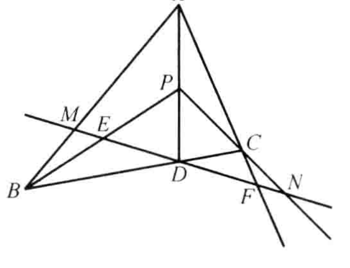


图 1

式 ①,②,③ 相乘得

$$\frac{DE}{EM}\cdot\frac{FN}{ND}\cdot\frac{MD}{DF}=1$$

又 $DE=DF$,所以有

$$\frac{DM}{DM-DE}=\frac{DN}{DN-DE}$$

所以

$$DM=DN$$

3 (1) 是否存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$,使得对任意的正整数 n 都有 $a_{n+1}^2\geqslant 2a_na_{n+2}$?

(2) 是否存在正无理数的无穷数列 $\{a_n\}$,使得对任意的正整数 n 都有 $a_{n+1}^2\geqslant 2a_na_{n+2}$?

(金荣生供题)

解 (1) 假设存在正整数数列 $\{a_n\}$ 满足条件.

因为 $a_{n+1}^2\geqslant 2a_na_{n+2}$,$a_n>0$,所以

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\leqslant\frac{1}{2^2}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}\ (n=3,4,\cdots)$$

又 $\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{1}{2^2-2}\cdot\frac{a_2}{a_1}$,所以有 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}$ 对 $n=2,3,4,\cdots$ 成立.

于是

$$a_n\leqslant\left(\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{a_2}{a_1}\right)a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2^{n+2+(n-3)}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\cdot a_{n-2}\leqslant\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{2^{n-2+(n-3)+\cdots+1}}\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-2}\cdot a_2$$

所以

$$a_n\leqslant\left(\frac{a_2^2}{2^{n-2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{n-2}}$$

设 $a_2^2\in[2^k,2^{k+1})(k\in\mathbf{N}^*)$,取 $N=k+3$,则有

$$a_N\leqslant\left(\frac{a_2^2}{2^{N-2}}\right)^{\frac{N-1}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{N-2}}<\left(\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k+2}{2}}\cdot\frac{1}{a_1^{k+1}}\leqslant 1$$

这与 a_N 是正整数矛盾.

所以不存在正整数数列 $\{a_n\}$ 满足条件.

(2) $a_n=\frac{\pi}{2^{(n-1)(n-2)}}$ 就是满足条件的一个无理数数列. 此时有

$a_{n+1}^2=4a_na_{n+2}\geqslant 2a_na_{n+2}$.

4 给定大于 2 004 的正整数 n，将 $1,2,3,\cdots,n^2$ 分别填入 $n\times n$ 棋盘(由 n 行 n 列方格构成)的方格中，使每个方格恰有一个数. 如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2 004 个方格内所填的数，且大于它所在列至少 2 004 个方格内所填的数，则称这个方格为“优格”. 求棋盘中“优格”个数的最大值.

(冯跃峰供题)

解 为叙述方便，如果一个方格中填的数大于它所在行至少 2 004 个方格中所填的数，则称此格为行优的. 由于每一行中填较小的 2 004 个数的格子不是行优的，所以每一行中有 $n-2\ 004$ 个行优的. 一个方格为“优格”一定是行优的，所以棋盘中“优格”个数不大于 $n(n-2\ 004)$.

另一方面，将棋盘的第 $i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 行，第 $i,i+1,\cdots,i+2\ 003$(大于 n 时取模 n 的余数)列中的格子填入“ * ”. 将 $1,2,3,\cdots,2\ 004n$ 填入有“ * ”的格子，其余的数填入没有“ * ”的格子. 没有“ * ”的格子中填的数大于有“ * ”的格子中的任何一个数，所以棋盘上没有“ * ”的格子都为“优格”，共有 $n(n-2\ 004)$ 个.

此时每行有 2 004 个格子有“ * ”，每列也有 2 004 个格子有“ * ”(表 1). 实际上，当 $1\leqslant i\leqslant 2\ 003$ 时，第 i 列的第 $1,2,\cdots,i,n+i-2\ 003,n+i-2\ 002,\cdots,n$ 行中有“ * ”. 当 $i\geqslant 2\ 004$ 时，第 i 列的第 $i-2\ 003,i-2\ 002,\cdots,i$ 行中有“ * ”. 所以每行有2 004 个格子有“ * ”. 每列也有 2 004 个格子有“ * ”.

表 1

*	*	*					
	*	*	*				
		*	*	*			
			*	*	*		
				*	*	*	
					*	*	*
*						*	*
*	*						*

所以棋盘中“优格”个数的最大值是 $n(n-2\ 004)$.

第 2 天

(2004 年 7 月 11 日 8：00 ~ 12：00)

5 已知不等式 $\sqrt{2}(2a+3)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{6}{\sin\theta+\cos\theta}-2\sin 2\theta<3a+6$ 对于 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(张鹏程供题)

解 设 $\sin\theta+\cos\theta=x$，则

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}x,\sin 2\theta=x^2-1\quad(x\in[1,\sqrt{2}])$$

从而原不等式可化为

$$(2a+3)x+\frac{6}{x}-2(x^2-1)<3a+6$$

即

$$2x^2-2ax-3x-\frac{6}{x}+3a+4>0$$

$$2x\left(x+\frac{2}{x}-a\right)-3\left(x+\frac{2}{x}-a\right)>0$$

$$(2x-3)\left(x+\frac{2}{x}-a\right)>0\quad(x\in[1,\sqrt{2}])\qquad ①$$

所以原不等式等价于不等式 ①.

因为 $x\in[1,\sqrt{2}]$，所以 $2x-3<0$. 从而不等式 ① 恒成立等价于 $x+\frac{2}{x}-a<0(x\in[1,\sqrt{2}])$ 恒成立. 因此只要

$$a>\left(x+\frac{2}{x}\right)_{\max}\quad(x\in[1,\sqrt{2}])$$

又容易知道 $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 在$[1,\sqrt{2}]$上递减，所以

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)_{\max}=3\quad(x\in[1,\sqrt{2}])$$

所以 $a>3$.

6 设点 D 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上一点，F 为过 A，D，C 三点的圆在 $\triangle ABC$ 内的弧上一点，过 B，D，F 三点的圆与边 AB 交于点 E. 求证

$$CD \cdot EF + DF \cdot AE = BD \cdot AF \quad ①$$

（冷岗松、萧振纲供题）

证明 如图3，设 AF 的延长线交圆 BDF 于 K. 因为 $\angle AEF = \angle AKB$，所以 $\triangle AEF \backsim \triangle AKB$，因此 $\frac{EF}{AF} = \frac{BK}{AB}$，$\frac{AE}{AF} = \frac{AK}{AB}$. 于是要证 ①，只需证明

$$CD \cdot BK + DF \cdot AK = BD \cdot AB \quad ②$$

又注意到

$$\angle KBD = \angle KFD = \angle C$$

我们有

$$S_{\triangle DCK} = \frac{1}{2} CD \cdot BK \cdot \sin \angle C$$

$$S_{\triangle ADK} = \frac{1}{2} AK \cdot DF \cdot \sin \angle C$$

同时

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AB \cdot \sin \angle C$$

因此要证 ②，只需证明

$$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DCK} + S_{\triangle ADK} \quad ③$$

而

$$③ \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AKC}$$
$$\Leftrightarrow BK \parallel AC \quad ④$$

事实上，由 $\angle KBD = \angle C$ 知 ④ 成立，故得证.

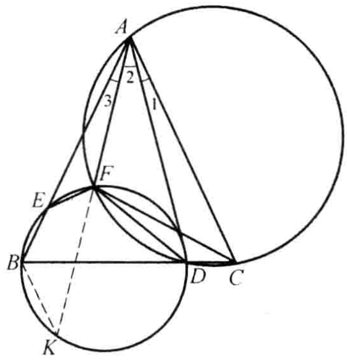


图 3

7 n 支球队要举行主客场双循环比赛（每两支球队比赛两场，各有一场主场比赛），每支球队在一周（从周日到周六的七天）内可以进行多场客场比赛. 但如果某周内该球队有主场比赛，在这一周内不能安排该球队的客场比赛. 如果四周内能够完成全部比赛，求 n 的最大值.

（裘宗沪供题）

注：甲、乙两队在甲方场地举行的比赛，称为甲的主场比赛，乙的客场比赛.

解 (1) 如表2所示：表格中有“*”表示该球队在该周有主场比赛，不能出访. 容易验证，按照表中的安排，6 支球队四周可

表 2

球队	第一周	第二周	第三周	第四周
1	*	*		
2	*		*	
3	*			*
4		*	*	
5		*		*
6			*	*

以完成该项比赛.

(2) 下面证明 7 支球队不能在四周完成该项比赛. 设 $S_i(i=1,2,3,4,5,6,7)$ 表示 i 号球队的主场比赛周次的集合. 假设 4 周内能完成该项比赛, 则 S_i 是 $\{1,2,3,4\}$ 的非空真子集.

一方面由于某周内该球队有主场比赛, 在这一周内不能安排该球队的客场比赛, 所以 $S_i(i=1,2,3,4,5,6,7)$ 中, 没有一个集是另一个的子集.

另一方面, 设

$A=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$,

$B=\{\{2\},\{2,3\},\{2,3,4\}\}$,

$C=\{\{3\},\{1,3\},\{1,3,4\}\}$,

$D=\{\{4\},\{1,4\},\{1,2,4\}\}$,

$E=\{\{2,4\}\}$,

$F=\{\{3,4\}\}$.

由抽屉原理, 一定存在 $i,j\in\{1,2,3,4,5\}(i\neq j)$, 使 S_i,S_j 属于同一集合 A 或 B 或 C 或 D 或 E 或 F, 因此必有 $S_i\subseteq S_j$, 或 $S_i\supseteq S_j$ 发生.

综上所述, n 的最大值是 6.

8 求满足 $\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-u}{z+u}+\frac{u-x}{u+x}>0$, 且 $1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10$ 的所有四元有序整数组 (x,y,z,u) 的个数.

(冷岗松供题)

解 设 $f(a,b,c,d)=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-d}{c+d}+\frac{d-a}{d+a}$. 记

$A:\{(x,y,z,u)\mid 1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10,f(x,y,z,u)>0\}$

$B:\{(x,y,z,u)\mid 1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10,f(x,y,z,u)<0\}$

$C:\{(x,y,z,u)\mid 1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10,f(x,y,z,u)=0\}$

显然 $\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)=10^4$.

我们证明 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$. 对每一个 $(x,y,z,u)\in A$, 考虑 (x,u,z,y)

$$(x,y,z,u)\in A\Leftrightarrow f(x,y,z,u)>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-y}{x+y}+\frac{y-z}{y+z}+\frac{z-u}{z+u}+\frac{u-x}{u+x}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-u}{x+u}+\frac{u-z}{u+z}+\frac{z-y}{z+y}+\frac{y-x}{y+x}<0$$

$$\Leftrightarrow f(x,u,z,y)<0\Leftrightarrow(x,u,z,y)\in B$$

接着计算 $\mathrm{card}(C)$

$$(x,y,z,u)\in C\Leftrightarrow\frac{xz-yu}{(x+y)(z+u)}=\frac{xz-yu}{(y+z)(u+x)}$$
$$\Leftrightarrow(z-x)(u-y)(xz-yu)=0$$

设

$C_1=\{(x,y,z,u)\mid x=z,1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10\}$

$C_2=\{(x,y,z,u)\mid x\neq z,y=u,1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10\}$

$C_3=\{(x,y,z,u)\mid x\neq z,y\neq u,xz=yu,1\leqslant x,y,z,u\leqslant 10\}$

因为满足 $a\times b=c\times d$，(a,b,c,d) 为 $1,2,3,\cdots,10$ 的两两不同的无序四元组，只有

$$1\times 6=2\times 3,1\times 8=2\times 4,1\times 10=2\times 5$$
$$2\times 6=3\times 4,2\times 9=3\times 6,2\times 10=4\times 5$$
$$3\times 8=4\times 6,3\times 10=5\times 6,4\times 10=5\times 8$$

满足 $x=y,z=u,x\neq z$ 的四元组共 90 个，满足 $x=u,y=z,x\neq z$ 的四元组共 90 个，所以 $\mathrm{card}(C_3)=4\times 2\times 9+90+90=252$.

又 $\mathrm{card}(C_1)=1\ 000$，$\mathrm{card}(C_2)=900$，所以 $\mathrm{card}(C)=2\ 152$.

因此 $\mathrm{card}(A)=3\ 924$.

2005 年第 2 届中国东南地区数学奥林匹克

（福建　福州）

第 *1* 天

（2005 年 7 月 10 日 8：00 ～ 12：00）

1 (1) 设 $a \in \mathbf{R}$，求证：抛物线 $y = x^2 + (a+2)x - 2a + 1$ 都经过一个定点，且顶点都落在一条抛物线上.

(2) 若关于 x 的方程 $x^2 + (a+2)x - 2a + 1 = 0$ 有两个不等实根，求其较大根的取值范围.

（吴伟朝供题）

解　(1) 令 $f_a(x) = x^2 + (a+2)x - 2a + 1 = x^2 + 2x + 1 + a(x-2)$，因此抛物线过定点 $(2,9)$. 该抛物线的顶点坐标为

$$x = -\frac{a+2}{2}$$

$$y = \frac{4(1-2a)-(a+2)^2}{4} = \frac{-a^2-12a}{4}$$

(2) 消去 a 得 $f_a(x) = 0$ 的大根为

$$x = \frac{-(a+2)+\sqrt{(a+2)^2-4(1-2a)}}{2}$$

$$= \frac{-(a+2)+\sqrt{a^2+12a}}{2}$$

$$= \frac{-(a+2)+\sqrt{(a+6)^2-36}}{2}$$

令 $a + 6 = 2k$，则

$$x = \frac{-(2k-4)+\sqrt{4k^2-36}}{2} = \sqrt{k^2-9} - k + 2$$

由判别式 $\Delta > 0$ 得，$k > 3$ 或 $k < -3$.

当 $k < -3$ 时，$x > 5$；

当 $k>3$ 时，$x=2-\dfrac{9}{\sqrt{k^2-9}+k}$，可得 $-1<x<2$.

综上所述，方程的大根 x 的取值范围为 $(-1,2)\cup(5,+\infty)$.

2 如图1，圆 O（圆心为 O）与直线 l 相离，作 $OP\perp l$，P 为垂足. 设点 Q 是 l 上任意一点（不与点 P 重合），过点 Q 作圆 O 的两条切线 QA 和 QB，A 和 B 为切点，AB 与 OP 相交于点 K. 过点 P 作 $PM\perp QB$，$PN\perp QA$，M 和 N 为垂足. 求证：直线 MN 平分线段 KP.

（裘宗沪供题）

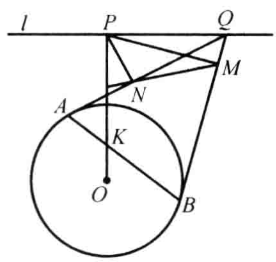


图 1

证明 作 $PI\perp AB$，I 为垂足，记 J 为直线 MN 与线段 PK 的交点. 易知 $\angle QAO=\angle QBO=\angle QPO=90^\circ$，故 O,B,Q,P,A 均在以线段 OQ 为直径的圆周上.

由于 $PN\perp QA$，$PM\perp QB$，$PI\perp AB$，所以由西姆森定理知：$\triangle QAB$ 的外接圆上一点 P 在其三边的垂足 N,M,I 三点共线，即 N,M,J,I 四点共线.

因为 $QO\perp AB$，$PI\perp AB$，所以 $QO\parallel PI$，所以 $\angle POQ=\angle IPO$，又因为 P,A,I,N 四点共圆，P,A,O,Q 也四点共圆，所以

$$\angle PIJ=\angle PIM=\angle PAN=\angle POQ$$

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle PIK$ 中，$\angle PIJ=\angle JPI$，所以 J 为 PK 的中点. 因此直线 MN 平分线段 KP.

3 设 n 是正整数，集合 $M=\{1,2,\cdots,2n\}$. 求最小的正整数 k，使得对于 M 的任何一个 k 元子集，其中必有4个互不相同的元素之和等于 $4n+1$.

（张鹏程供题）

解 考虑 M 的 $n+2$ 元子集 $P=\{n-1,n,n+1,\cdots,2n\}$. P 中任何4个不同元素之和不小于 $n-1+n+n+1+n+2=4n+2$，所以 $k\geqslant n+3$.

将 M 的元配为 n 对，$B_i=(i,2n+1-i)$，$1\leqslant i\leqslant n$.

对 M 的任一 $n+3$ 元子集 A，必有三对 B_{i_1},B_{i_2},B_{i_3} 同属于 A（i_1,i_2,i_3 两两不同）.

又将 M 的元配为 $n-1$ 对，$C_i=(i,2n-i)$，$1\leqslant i\leqslant n-1$.

对 M 的任一 $n+3$ 元子集 A，必有一对 C_{i_4} 同属于 A.

这一对 C_{i_1} 必与刚才三对 B_{i_1},B_{i_2},B_{i_3} 中至少一对无公共元，这4个元素互不相同，且和为 $2n+1+2n=4n+1$.

因此，所求的最小正整数 k 等于 $n+3$.

4 试求满足 $a^2+b^2+c^2=2\ 005$，且 $a\leqslant b\leqslant c$ 的所有三元正整数组 (a,b,c).

（陶平生供题）

解 由于任何奇平方数被 4 除余 1，任何偶平方数是 4 的倍数，因 2 005 被 4 除余 1，故 a^2,b^2,c^2 三数中，必是两个偶平方数，一个奇平方数.

设 $a=2m,b=2n,c=2k-1,m,n,k$ 为正整数，原方程化为

$$m^2+n^2+k(k-1)=501 \qquad ①$$

又因任何平方数被 3 除的余数，或者是 0，或者是 1，今讨论 k：

（ⅰ）若 $3\mid k(k-1)$，则由 ①，$3\mid m^2+n^2$，于是 m,n 都是 3 的倍数.

设 $m=3m_1,n=3n_1$，并且 $\frac{k(k-1)}{3}$ 是整数，由 ①

$$3m_1^2+3n_1^2+\frac{k(k-1)}{3}=167 \qquad ②$$

于是

$$\frac{k(k-1)}{3}\equiv 167\equiv 2(\bmod 3)$$

设 $\frac{k(k-1)}{3}=3r+2$，则

$$k(k-1)=9r+6 \qquad ③$$

且由 ①，$k(k-1)<501$，所以 $k\leqslant 22$.

故由 ③，k 可取 3，7，12，16，21，代入 ② 分别得到如下情况

$$\begin{cases}k=3\\m_1^2+n_1^2=55\end{cases},\quad\begin{cases}k=7\\m_1^2+n_1^2=51\end{cases},\quad\begin{cases}k=12\\m_1^2+n_1^2=41\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=16\\m_1^2+n_1^2=39\end{cases},\quad\begin{cases}k=21\\m_1^2+n_1^2=9\end{cases}$$

由于 55，51 都是 $4N+3$ 形状的数，不能表示为两个正整数的平方和，并且 9 也不能表示成两个正整数的平方和，因此只有 $k=12$ 与 $k=16$ 时有如下整数解 m_1,n_1.

当 $k=12$ 时，由 $m_1^2+n_1^2=41$，得 $(m_1,n_1)=(4,5)$，则 $a=6m_1=24,b=6n_1=30,c=2k-1=23$，于是 $(a,b,c)=(24,30,23)$.

当 $k=16$ 时，由 $m_1^2+n_1^2=29$，得 $(m_1,n_1)=(2,5)$，这时 $a=6m_1=12,b=6n_1=30,c=2k-1=31$，因此 $(a,b,c)=(12,30,31)$.

（ⅱ）若 $3\nmid k(k-1)$，由于任何三个连续数中必有一个是 3 的倍数，则 $k+1$ 是 3 的倍数，故 k 被 3 除余 2，因此 k 只能取 2，5，8，11，14，17，20 诸值.

利用 ① 分别讨论如下：

若 $k=2$,则 $m_1^2+n_1^2=499$,而 $499\equiv 3 \pmod 4$,此时无解.

若 $k=5$,则 $m_1^2+n_1^2=481$,利用关系式

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)&=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2\\&=(\alpha x-\beta y)^2+(\alpha y+\beta x)^2\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}481=13\times 37&=(3^2+2^2)(6^2+1^2)\\&=20^2+9^2=16^2+15^2\end{aligned}$$

所以

$$(m,n)=(9,20)\text{ 或}(15,16)$$

于是得两组解 $(a,b,c)=(2m,2n,2k-1)=(18,40,9)$ 或 $(30,32,9)$.

若 $k=8$,则 $m_1^2+n_1^2=445$,而 $445=5\times 89=(2^2+1^2)(8^2+5^2)=21^2+2^2=18^2+11^2$.所以 $(m,n)=(2,21)$ 或 $(11,18)$,得两组解 $(a,b,c)=(2m,2n,2k-1)=(4,42,15)$ 或 $(22,36,15)$.

若 $k=11$,则 $m_1^2+n_1^2=391$,而 $391\equiv 3 \pmod 4$,此时无解.

若 $k=14$,则 $m_1^2+n_1^2=319$,而 $319\equiv 3 \pmod 4$,此时无解.

若 $k=17$,则 $m_1^2+n_1^2=229$,而 $229=15^2+2^2$,得 $(m,n)=(2,15)$,得一组解 $(a,b,c)=(2m,2n,2k-1)=(4,30,33)$.

若 $k=20$,则 $m_1^2+n_1^2=121=11^2$,而 11^2 不能表示成两个正整数的平方和,因此本题共有 7 组解,分别为:$(23,24,30)$,$(12,30,31)$,$(9,18,40)$,$(9,30,32)$,$(4,15,42)$,$(15,22,36)$,$(4,30,33)$.

经检验,它们都满足方程.

第 2 天

(2005 年 7 月 11 日 8：00 ～ 12：00)

5 已知直线 l 与单位圆 S 相切于点 P，点 A 与圆 S 在 l 的同侧，且 A 到 l 的距离为 $h(h>2)$，从点 A 作 S 的两条切线，分别与 l 交于 B，C 两点. 求线段 PB 与线段 PC 的长度之乘积.

（冷岗松、司林供题）

解　设 PB，PC 的长度分别为 p，q，设 $\angle ABP=\beta$，$\angle ACP=\gamma$，设 AC 与 S 的切点为 E，记圆心为 O，设 AE 的长度为 t，联结 AO，OE，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AOE$ 中，我们有

$$\angle AOE=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

因此

$$t=\tan\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=\frac{p+q}{pq-1}$$

这样我们可得 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 为

$$S_{\triangle ABC}=(p+q+t)\times 1=\frac{pq(p+q)}{pq-1}$$

又因为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(p+q)\times h$$

所以可得

$$\frac{1}{2}h=\frac{pq}{pq-1}$$

整理得

$$pq=\frac{h}{h-2}$$

6 将数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 中所有元素的算术平均值记为 $P(A)\left(P(A)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)$. 若 B 是 A 的非空子集，且 $P(B)=P(A)$，则称 B 是 A 的一个“均衡子集”. 试求数集 $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的所有“均衡子集”的个数.

（陶平生供题）

解　由于 $P(M)=5$，令 $M'=\{x-5\mid x\in M\}=\{-4,-3,$