

陆传赓◎编著

Functional Analysis and its Application in
Communication Network and Signal Analysis

泛函分析及其在 通信网与信号分析等中的应用



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

泛函分析及其在通信网与 信号分析等中的应用

陆传赓 编 著



北京邮电大学出版社
[www. buptpress. com](http://www.buptpress.com)

内 容 简 介

本书共分5章.第1章介绍距离空间及其性质,压缩映射原理和不动点定理在通信网理论及在计算机形式语义中的应用.第2章介绍线性空间、映射以及巴拿赫空间在IP网管、电信管理网和信道编码中的应用.第3章介绍希尔伯特空间以及正交性、正交变换在通信系统、数字图像处理和滤波器组理论中的应用.第4章介绍线性算子、线性泛函和哈恩-巴拿赫定理的若干应用以及自伴算子在光通信中的应用.第5章介绍有界线性算子、紧线性算子和自伴算子的谱论,同时介绍算子谱论在MIMO系统的容量分析及在UWB(超宽带)通信波形研究中的应用.各章末附有一定的习题,书后给出各章的习题提示或解答.

本书可作为工科专业研究生和理科数学专业本科生教材,也可供有关工程人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析及其在通信网与信号分析等中的应用 / 陆传赓编著. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2015.1
ISBN 978-7-5635-4268-0

I. ①泛… II. ①陆… III. ①泛函分析—应用—通信系统—信号处理—研究 IV. ①O177
②TN911.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第303814号

书 名: 泛函分析及其在通信网与信号分析等中的应用

著作责任者: 陆传赓 编著

责任编辑: 刘 颖

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路10号(邮编:100876)

发行部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京源海印刷有限责任公司

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

印 张: 15.5

字 数: 341千字

印 数: 1—1500册

版 次: 2015年1月第1版 2015年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-4268-0

定 价: 35.00元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

目前,国内已出版多种供本科或研究生使用的泛函分析教材,其中绝大多数是理论性地讲述相关的知识,极少涉及泛函分析应用方面的内容.对于工程(或管理)的学生来说,这些高度概括的抽象思维内容,初学好比读天书,腾云驾雾似的,更不知道如何运用其中的知识解决工科(或管理)专业中的问题.本人曾在北京邮电大学和中国科学院自动化研究所为硕士、博士生讲授近 20 年泛函分析,其间,学生们纷纷提出希望有一本既有高度抽象、概括的内容,又有具体如何应用于工科(或管理)实际的泛函分析教材,以便学习起来有较强的针对性.本人历经多年的素材搜集与积累,编写出这本既有较系统的理论知识,又能将泛函分析有关内容具体应用于光通信、超宽带通信、通信网理论、信号分析、信道编码、MIMO(多入多出)系统的容量分析、数字图像处理、IP 网络管理以及计算机形式语义分析等内容的泛函分析及其应用的教材,期望能为若干工科(或管理)专业的学生提供一些泛函分析应用方面的参考.这是一本抛砖引玉的教材,更希望有关教师能编写出更多、更好的应用教材以满足更多工科(或管理或经济)领域人才的需要.

本书在编写过程中曾得到王蕴辉、兰淑平、王民、孙军涛、王艳鹏、邱小玲、丁玉江等同志在素材的取所,书稿的整理、打印以及例题的解答等方面的许多帮助,作者在此一并向他们表示诚挚的谢意.

限于作者的水平,不妥或错漏之处在所难免,恳请广大读者不吝赐教,以期提高和完善.

作 者

目 录

第 1 章 距离空间	1
1.1 距离空间的基本概念	1
1.2 距离空间中的点集	4
1.3 稠密性与可分性	8
1.4 距离空间的完备性	9
1.5 列紧性、紧性与全有界性	16
1.6 压缩映射原理及其应用	21
1.6.1 压缩映射原理	21
1.6.2 压缩映射原理的某些应用	24
1.7 不动点定理在通信网理论及计算机形式语义中的应用	29
1.7.1 不动点定理在通信网理论中的应用	29
1.7.2 不动点定理在计算机形式语义中的应用	32
习题 1	34
第 2 章 巴拿赫空间	38
2.1 线性空间	38
2.2 赋范线性空间与巴拿赫空间	42
2.3 赋范空间中的列紧性与紧性	49
2.4 有限维赋范空间	55
2.5 泛函分析在 IP 网管、电信管理网以及在信道编码中的应用	60
2.5.1 用泛函分析方法实现 IP 网络的 SLA 网络管理算法	60
2.5.2 泛函分析在电信管理网定价方案中的应用	66
2.5.3 线性空间在信道编码中的应用	72
习题 2	78

第 3 章 希尔伯特空间	80
3.1 内积空间的基本概念	80
3.2 希尔伯特空间	82
3.3 正交性和正交系	87
3.3.1 正交性	87
3.3.2 变分原理、投影定理与正交分解定理	89
3.3.3 正交系	93
3.4 黎斯表现定理、对偶空间	102
3.5 希尔伯特空间的同构	106
3.6 正交性与正交变换在通信系统、数字图像处理以及在滤波器组理论中的应用	108
3.6.1 正交性在通信系统中的应用	108
3.6.2 正交变换在数字图像处理中的应用	114
3.6.3 正交性在滤波器组理论中的应用	118
习题 3	122
第 4 章 线性算子与线性泛函	125
4.1 有界线性算子与有界线性泛函	125
4.2 有限维赋范线性空间上的线性算子	131
4.3 开映射定理、逆算子定理、闭图像定理	136
4.4 一致有界原理(或共鸣定理)及其应用	140
4.5 哈恩-巴拿赫定理	145
4.6 对偶空间、自反空间	148
4.7 弱收敛	153
4.8 对偶算子	157
4.9 紧算子	160
4.10 哈恩-巴拿赫定理的若干应用以及自伴算子在光通信中的应用	164
4.10.1 哈恩-巴拿赫延拓定理及其应用	164
4.10.2 哈恩-巴拿赫延拓定理在网络性能测量中的应用	170
4.10.3 自伴算子在光通信中的应用	171
习题 4	175

第 5 章 谱论简介.....	180
5.1 有界线性算子的谱	180
5.2 紧线性算子的谱	186
5.3 自伴算子的谱	194
5.4 算子谱理论在多人多出系统容量分析及在超宽带通信波形研究中的应用 ...	202
5.4.1 算子谱理论在多人多出系统容量分析中的应用	202
5.4.2 算子谱理论在超宽带通信波形研究中的应用	206
习题 5	210
习题解答或提示.....	213
参考文献.....	236

第1章 距离空间

1.1 距离空间的基本概念

众所周知,极限运算是初等微积分中重要运算之一. 设 $\{x_n\}$ 是一个实数列, x 是一个实数,如果对任意给定的 $\epsilon > 0$,存在自然数 N ,当 $n > N$ 时, $|x_n - x| < \epsilon$,我们就说当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\{x_n\}$ 以 x 为极限. 此处 $|x_n - x|$ 表示直线 $\mathbf{R}$ 上的点 x_n 与点 x 之间的“距离”,于是可重新说成对任意给定的 $\epsilon > 0$,存在自然数 N ,当 $n > N$ 时, x_n 与 x 之间的“距离”小于 ϵ . 类似地,平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点列 $x_n = (\xi_n, \eta_n)$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时以点 $x = (\xi, \eta)$ 为极限的定义是对于充分大的自然数 n ,点 x_n 与点 x 的“距离” $\sqrt{(\xi_n - \xi)^2 + (\eta_n - \eta)^2}$ 可以任意小. 那么,对于一般(非空)集合中的两点 x 与 y ,如何定义它们之间的距离呢? 数学家们经过几十年不断地探索,经历无数次试验,经历无数失败和总结,最终提炼出一套公理化的方法,其优点是掌控事物最本质的东西,忽略具体问题中非本质的内容;它不仅联接各个数学分支之间的关系,而且成为解决具体问题的得力手段. 于是,人们将“距离”最基本的性质抽象化就得到下述的距离空间的概念.

定义 1.1 设 X 是非空集合,对于 X 中任意的两个元素 x 与 y ,按某一法则都对应唯一的实数 $d(x, y)$,而且满足下述三条公理:

- (1) (非负性) $d(x, y) \geq 0$ [$d(x, y) = 0$, 当且仅当 $x = y$];
- (2) (对称性) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (3) (三角不等式)对于任意的 $x, y, z \in X$,恒有

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

则称 $d(x, y)$ 为 x 与 y 的距离,并称 X 是以 d 为距离的距离空间,记作 (X, d) . 通常,在距离已被定义的情况下, (X, d) 可以简单地将 X 中的元素称为 X 中的点.

例 1.1 设 X 是 n 元实数组全体,定义

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2},$$

其中, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$; $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$.

我们证明 (X, d) 是一个距离空间, 为此我们需要验证 d 满足距离的三条公理. (1)、(2) 显然成立, 关键是证明三角不等式成立, 我们先证明以下的柯西-许瓦兹 (Cauchy-Schwarz) 不等式: 对任意实数 $a_k, b_k (k=1, \dots, n)$, 我们有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

事实上, 任取实数 α , 则

$$\sum_{k=1}^n (a_k + \alpha b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2\alpha \sum_{k=1}^n a_k b_k + \alpha^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0,$$

上面不等式左端是 α 的一个二次三项式, 于是它的判别式不大于 0, 即柯西-许瓦兹不等式成立.

现在证明三角不等式成立, 由柯西-许瓦兹不等式, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

设 $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n); z = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ 是任意 X 的三点, 在以上不等式中令 $a_k = (\xi_k - \zeta_k), b_k = (\zeta_k - \eta_k)$, 则

$$\left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{k=1}^n (\xi_k - \zeta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n (\zeta_k - \eta_k)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

即

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

所以 (X, d) 是一个距离空间, 以后把这个空间简记为 $\mathbf{R}^n$, 本节开头提到的 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 的特殊情形.

例 1.2 考虑区间 $[a, b]$ 上所有连续函数集, 设 $x(t), y(t)$ 是 $[a, b]$ 上任意两个连续函数, 定义

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$$

由于 $x(t) - y(t)$ 也是 $[a, b]$ 上的连续函数, 因此有最大值. 距离公理 (1)、(2) 显然成立. 设 $x(t), y(t), z(t)$ 是 $[a, b]$ 上任意三个连续函数, 则 $\forall t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| \\ &= d(x, z) + d(z, y), \end{aligned}$$

所以

$$d(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq d(x, z) + d(z, y).$$

$[a, b]$ 上的连续函数全体赋以上述距离 d 是一个距离空间, 记它为 $C[a, b]$.

例 1.3 空间 s .

考虑实数列 (ξ_k) 的全体. 设 $x=(\xi_k), y=(\eta_k)$ 是两个实数列, 定义

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

上式右边的 $\frac{1}{2^k}$ 是一个收敛因子, 保证级数收敛, 距离公理的 (1)、(2) 显然成立, 为证三角不等式, 考虑 $(0, \infty)$ 上的函数

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t},$$

易见 $\psi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, 所以 $\psi(t)$ 是单增的. 由此, 设 $x=(\xi_k), y=(\eta_k), z=(\zeta_k)$. 由于

$$|\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|,$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &\leq \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

在上面不等式两边乘以 $\frac{1}{2^k}$ 并求和, 则得

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

这个距离空间记为 s .

由此例易知, 若 $d(x, y)$ 为 X 中的一个距离, 则 $\sigma(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ 也是 X 的一个距离.

例 1.4 有界数列空间 (l^∞ 空间).

设 X 是所有有界数列 $x=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)=(\xi_i)$ 所成的集合, 就是说对每一个 $x \in X$ 都存在一个常数 K_x , 使得 $|\xi_i| \leq K_x (i=1, 2, \dots)$. 设 $x=(\xi_i), y=(\eta_i) \in X$, 则令

$$d_\infty(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i|.$$

易知它满足距离公理 (1) 与 (2). 再设 $z=(\zeta_i)$, 则

$$\begin{aligned} |\xi_i - \eta_i| &\leq |\xi_i - \zeta_i| + |\zeta_i - \eta_i| \\ &\leq \sup_i |\xi_i - \zeta_i| + \sup_i |\zeta_i - \eta_i| \\ &= d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y). \end{aligned}$$

再取上确界得: $d_\infty(x, y) = \sup_i |\xi_i - \eta_i| \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$, 所以 d_∞ 满足公理(3). 通常称 (X, d_∞) 为有界数列空间或 l^∞ .

例 1.5 $l^p (p \geq 1)$ 空间.

设 X 是满足 $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$ 的所有数列 $x = (\xi_i) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ 的集合. 又设 $y = (\eta_i) \in X$, 则定义距离为

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{1/p}.$$

容易证明它满足距离三公理. 这个空间称为 l^p 空间.

例 1.6 离散空间 D .

设 X 是任一非空集, 在 X 中定义 d 如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

不难验证 d 是一个距离, 从而 (X, d) 是一个距离空间, 称这个空间为离散空间, 用 D 表示.

由上可知我们可以随意地定义距离, 特别地, 距离不是唯一的, 即使同一集也可以引进不同的距离, 从而得到不同的距离空间. 例如在 $[a, b]$ 区间上所有连续函数集中, 如果我们定义

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

不难验证 d_1 是一个距离, 于是我们得到一个新的距离空间, 我们认为这个空间与例 1.2 中的空间 $C[a, b]$ 是两个不同的距离空间. 实际上, 距离的定义是任意的, 但是对每一个具体问题, 选择这样或那样的距离总是依据所研究的极限过程的需要而引入的.

1.2 距离空间中的点集

本节在一般的距离空间 X 中给出开球、闭球、球面、开集、闭集等概念, 这些概念都离不开预先定义的距离. 与欧氏空间 $\mathbf{R}$ 相比较, 这里用抽象的距离 $d(x, y)$ 代替 $\mathbf{R}$ 中的绝对值 $|x - y|$, 用开球 $B(x_0, r)$ 代替 $\mathbf{R}$ 中的对称开区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$.

定义 1.2 设 (X, d) 为距离空间, 则可依次定义概念:

(1) **开球**: 设 $x_0 \in X, r > 0$, 称 X 中的点集

$$B_r(x_0) = B(x_0, r) = \{x: d(x, x_0) < r, x \in X\}$$

是以 x_0 为中心, 以 r 为半径的**开球**; 又称为 x_0 的 r **邻域**.

(2) **闭球**: 设 $x_0 \in X, r > 0$, 称

$$\bar{B}_r(x_0) = \bar{B}(x_0, r) = \{x: d(x, x_0) \leq r, x \in X\}$$

是以 x_0 为中心, 以 r 为半径的**闭球**.

(3) **球面**: 设 $x_0 \in X, r > 0$, 称

$$S_r(x_0) = S(x_0, r) = \{x: d(x, x_0) = r, x \in X\}.$$

是以 x_0 点为中心, 以 r 为半径的**球面**.

(4) **内点**: 设 $E \subset X, x_0 \in E$. 若存在 x_0 的 r 邻域 $B_r(x_0) \subset E$, 则称点 x_0 为 E 的**内点**. E 的内点全体称为 E 的**内部**记为 $\mathring{E}$.

(5) **开集**: 设 $G \subset X$. 若 G 中每一点都是其内点, 则称 G 为**开集**.

(6) **闭集**: 设 $F \subset X$. 若 $X - F$ 为开集, 则称 F 为**闭集**.

(7) **邻域**: 包含 $x_0 \in X$ 的任一开集均称为 x_0 的一个邻域. 特别称 $B(x_0, r)$ 是 x_0 的**球形邻域**, 有时也简称**邻域**.

(8) **聚点**: 设 $E \subset X, x_0 \in X$. 若 x_0 的每一个邻域中均含有 E 的无穷多个点, 则称 x_0 为 E 的**聚点**或**极限点**. E 的聚点可以在 E 中也可不在 E 中. x_0 为 E 的聚点可等价定义为: x_0 的每个邻域中含有 E 的点 x , 但 $x \neq x_0$.

(9) **导集**: E 的聚点的全体称为 E 的**导集**, 记为 E' .

(10) **闭包**: 设 $E \subset X$. E 的**闭包** $\bar{E}$ 定义为

$$\bar{E} = E \cup E',$$

$\bar{E}$ 中的点又称为 E 的**接触点**. 可以知道 $x_0 \in \bar{E}$ 的充要条件是 $d(x_0, E) = 0$, 因此 E 的闭包 $\bar{E}$ 又可定义为与 E 的距离为 0 的一切点的全体. E 的**聚点**(**极限点**)必是 E 的**接触点**, 反之则不然.

若用 $\hat{E}$ 记不含在 E 中的 E 的聚点集合, 则有

$$\hat{E} = E' - E; \quad \bar{E} = E \cup \hat{E} \text{ (其中 } E \cap \hat{E} = \emptyset \text{)}.$$

(11) **孤立点**: 设 $E \subset X, x_0 \in E$. 若 x_0 的某一邻域中没有除 x_0 以外的 E 的其他点, 则称 x_0 为 E 的**孤立点**.

(12) **边界、有界集、直径**: 称 $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$ 为 E 的**边界**; 设 $E \subset X$, 若 $E \subset B_r(x_0)$, 则称 E 为**有界集**; 称 $d(E) = \sup\{d(x, y): \forall x, y \in E\}$ 为 E 的**直径**. 如果 $E \subset X$ 的直径 $d(E) < \infty$, 则 E 是**有界集**.

例 1.7 求证距离空间 (X, d) 中的开球 $B(x_0, \delta)$ 是开集.

证明 设 $x_1 \in B(x_0, \delta)$, 只需证 x_1 是 $B(x_0, \delta)$ 的内点即可.

取 $\delta_1 \leq \delta - d(x_0, x_1)$, 作开球 $B(x_1, \delta_1)$, 可以证明 $B(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta)$. 事实上, 设 $x \in B(x_1, \delta_1)$, 则 $d(x, x_1) < \delta_1$, 故

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < \delta_1 + d(x_1, x_0)$$

$$\leq \{\delta - d(x_0, x_1)\} + d(x_1, x_0) = \delta$$

所以 $x \in B(x_0, \delta)$.

例 1.8 求证距离空间 (X, d) 中闭球 $\bar{B}_\delta(x_0)$ 是闭集.

证明 设 $E = X - \bar{B}_\delta(x_0) = \{x: x \in X, d(x, x_0) > \delta\}$, 我们证明 E 是开集. 取 $x_1 \in E$, 则 $d(x_1, x_0) > \delta$. 取 $\delta_1 \leq d(x_1, x_0) - \delta$, 可证 $B(x_1, \delta_1) \subset E$, 从而 x_1 是 E 的内点. 由 $x_1 \in E$ 的任意性知 E 是开集. 事实上, 设 $x \in B(x_1, \delta_1)$, 则

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\geq d(x_1, x_0) - d(x, x_1) > d(x_1, x_0) - \delta_1 \\ &\geq d(x_1, x_0) - \{d(x_1, x_0) - \delta\} = \delta. \end{aligned}$$

所以 $x \in E$.

例 1.9 试问在距离空间 (X, d) 中, 开球 $B_r(x_0)$ 的闭包是闭球, 对吗?

解 易知在 $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 中有 $\overline{B_r(x_0)}$ 是闭球. 但在离散距离空间 D (见例 1.6) 中, 因为开球 $B_1(x_0) = \{x_0\}$, 它的闭包也为 $\{x_0\}$, 但是闭球为 $\{x: d(x, x_0) \leq 1, x \in X\} = X \neq \{x_0\}$. 所以在一般的距离中, 命题: 开球的闭包是闭球, 并不成立.

下面给出几个关于开集、闭集性质的定理.

定理 1.1 设 X 是距离空间, 则 X 中的开集具有以下基本性质:

- (1) 全空间 X 与空集 $\emptyset$ 是开集;
- (2) 任意个开集的并集是开集;
- (3) 任意有穷多个开集的交集是开集.

证明 (1) 显然.

设 $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, 其中 $\forall \alpha \in I, G_\alpha$ 是开集, $\forall x \in G$, 则存在 $\alpha_0 \in I$, 使得 $x \in G_{\alpha_0}$, 由于 G_{α_0} 是开集, 存在开球 $B(x, r) \subset G_{\alpha_0}$, 从而 $B(x, r) \subset G$, 即 G 是开集, (2) 得证. 以下证明 (3).

设 $G = \bigcap_{k=1}^n G_k$, 其中每一个 $G_k (k=1, 2, \dots, n)$ 是开集, $\forall x \in G$, 对于每一个 k , 存在开球 $B(x, r_k)$, 使得

$$B(x, r_k) \subset G_k (k=1, 2, \dots, n).$$

取

$$r = \min_{1 \leq k \leq n} \{r_k\},$$

则 $B(x, r) \subset B(x, r_k) \subset G_k (k=1, 2, \dots, n)$. 即

$$B(x, r) \subset G,$$

所以 G 是开集.

定理 1.2 设 A, B 是距离空间 X 的子集, 则

- (1) $A \subset \bar{A}$;
- (2) $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$;
- (3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
- (4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

证明 (1)、(4)显然.

由(1), $\bar{A} \subset \bar{A}$, 所以为证明(2), 只需证明 $\bar{A} \subset \bar{A}$. $\forall x_0 \in \bar{A}$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 球 $B(x_0, \epsilon)$ 中含有 A 中点, 设 y_0 是这样的一点, 则 $\delta = \epsilon - d(x_0, y_0) > 0$, 且 $B(y_0, \delta)$ 中含 A 中点. 而 $B(y_0, \delta) \subset B(x_0, \epsilon)$, 所以 $B(x_0, \epsilon)$ 中含有 A 中点, 即 $x_0 \in \bar{A}$, 所以 $\bar{A} = \bar{A}$.

由于 $A \subset A \cup B$, 所以 $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$, 同理 $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, 因此 $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. 为证明(3)只需证明反向包含关系. $\forall x_0 \in \overline{A \cup B}$, 则 $\forall \epsilon > 0$,

$$B(x_0, \epsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset.$$

我们证明这时或 $x_0 \in \bar{A}$ 或 $x_0 \in \bar{B}$. 因为如不然, 必存在正数 ϵ_1, ϵ_2 , 使得

$$B(x_0, \epsilon_1) \cap A = \emptyset \text{ 且 } B(x_0, \epsilon_2) \cap B = \emptyset.$$

取 $\epsilon_0 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, 则

$$B(x_0, \epsilon_0) \cap (A \cup B) = \emptyset,$$

矛盾. 所以 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

设 A 是距离空间 X 中的集, 如果 $A = \bar{A}$, 则称 A 为闭集.

由以上定理, 任一集的闭包 $\bar{A}$ 是闭集, 它是包含集 A 的最小闭集.

由于在一个距离空间中, 任一开集的余集是闭集, 任一闭集的余集是开集. 因此, 由德·摩根(de Morgan)公式立刻可得闭集的基本性质.

定理 1.3 设 X 是距离空间, 则

- (1) 全空间 X 及空集 $\emptyset$ 是闭集;
- (2) 任意个闭集的交集是闭集;
- (3) 任意有穷个闭集的并集是闭集.

定理 1.4 在距离空间 (X, d) 中, $E \subset X$ 是闭集的充要条件是:

$$(a) \ E' \subset E; \text{ 或 } (b) \ \bar{E} = E; \text{ 或 } (c) \ \hat{E} = \emptyset$$

证明 我们只证(a)而把(b)、(c)的证明留给读者. 依定义有: E 为闭集的充要条件是它的余集 E^c 为开集. 而 $E' \subset E$ 的充要条件是 $E^c \subset (E')^c$. 下面我们证本定理(a)的等价命题:

$$E^c \text{ 为开集的充要条件是 } E^c \subset (E')^c \quad (1.1)$$

必要性: 任取 $x \in E^c$. 因 E^c 为开集, 所以存在开球 $B(x, \delta) \subset E^c$, 即在 x 的 δ 邻域中没有 E 的点, 从而 $x \notin E'$, 即 $x \in (E')^c$. 由 x 在 E^c 中的任意性, 便有 $E^c \subset (E')^c$.

充分性: 任取 $x \in E^c$. 因 $E^c \subset (E')^c$, 故 $x \in (E')^c$, 即 $x \notin E'$. 这说明 x 不是 E 的聚点 (注意 $x \notin E$), 从而存在 $B(x, \delta)$ 使其不含 E 的点, 即 $B(x, \delta) \subset E^c$. 这表明 x 是 E^c 的内点. 注意 $x \in E^c$ 的任意性. 便知 E^c 是开集, 式(1.1)得证.

由此定理可直接给出:

推论 1.5 距离空间 (X, d) 中任意集合 $E \subset X$ 的导集 E' 是闭集.

提示: 只要证明 $(E')' \subset E'$ 即可.

推论 1.6 距离空间中任何集合 E 的闭包都是闭集.

提示:利用定理 1.2 与定理 1.4 即可.

1.3 稠密性与可分性

类似于空间 $(\mathbf{R}, d)$ 中有理数集 $\mathbf{Q}$ 在 $(\mathbf{R}, d)$ 中稠密, 而 $(\mathbf{R}, d)$ 是可分的一样. 对于一般的距离空间 (X, d) 也可引入如下的定义.

定义 1.3 (1) **稠密**: 设 A, B 都是距离空间 (X, d) 中的两个集合. 如果 $\bar{A} \supset B$, 则称 A 在 B 中稠密.

(2) **稠密集**: 如果 $\bar{A} = X$, 则称 A 为 X 中的稠密集.

(3) **稠密子集**: 若 $A \subset B \subset \bar{A}$, 则称 A 为 B 的稠密子集.

注 1. A 在 B 中稠密, 当且仅当下述三个条件中任意一条成立:

(1°) 对于任意的 $x \in B$ 以及任意的 $\epsilon > 0$, 存在 A 中的点 y 使得 $d(x, y) < \epsilon$;

(2°) 对于任给的 $\epsilon > 0$, 以 A 中的每个点为中心, 以 ϵ 为半径的全部开球的并包含 B ;

(3°) 对于任意的 $x \in B$, 存在 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

注 2. 在稠密性的定义中, A 不必包含在 B 中甚至不必与 B 相交.

(4) **可分空间**: 若距离空间 (X, d) 中含有一个可列的稠密子集, 则称 (X, d) 为可分空间.

例 1.10 复数集 $\mathbf{C}$ 是可分的. 因为集合

$$A = \{a + bi : a, b \in \mathbf{Q}\} \subset \mathbf{C}$$

是可列的, 且在 $\mathbf{C}$ 中稠密.

例 1.11 $C[a, b]$ 是可分的.

由外尔斯托拉斯(Weierstrass)定理, 对于 $[a, b]$ 上的任一连续函数 $x(t)$, 存在多项式列 $\{p_n(t)\}$, 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $x(t)$, 每一多项式 $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ 可用有理系数多项式一致逼近, 而有理系数多项式集是可数集, 所以 $C[a, b]$ 是可分的.

例 1.12 空间 (l^p, d_p) 是可分的.

事实上, 令

$$\mathbf{M} = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots) : r_i \in \mathbf{Q}, i = 1, 2, \cdots, n, n \in \mathbf{N}\}.$$

很明显 $\mathbf{M}$ 是可数的. 下面证明 $\mathbf{M}$ 在 l^p 中稠密. 我们仅需证明对于任意点 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in$

l^p , x 的任意 ϵ 邻域内包含 $\mathbf{M}$ 的元素即可. 因为 $x \in l^p$, 所以 $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, 故对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 n_0 , 使得

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\epsilon^p}{2}.$$

对如此选定的自然数 n_0 , 对于 n_0 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$, 取 n_0 个有理数点列 $r_i^{(k)}$, 使得 $r_i^{(k)} \rightarrow x_i (k \rightarrow \infty), i=1, 2, \dots, n_0$, 因此, 存在自然数 K , 使得当 $k \geq K$ 时, 对于 $i=1, 2, \dots, n_0$, 有

$$|r_i^{(k)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{(2n_0)^{1/p}},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n_0} |r_i^{(k)} - x_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

令 $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots, r_{n_0}^{(k)}, 0, \dots) \in \mathbf{M} \subset l^p$, 则

$$d(r^{(k)}, x) = \left(\sum_{i=1}^{n_0} |r_i^{(k)} - x_i|^p + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

这说明在 x 的 ε 邻域内必包含 $\mathbf{M}$ 中的点, 故 $\mathbf{M}$ 在 l^p 中稠密, 也就是说 l^p 有一个可数稠密子集, 因此, (l^p, d_p) 是可分的.

注 3. 可分概念是与距离、集合有关的. 对于同一集合, 若定义的距离不同, 它在一种距离下可分, 而在另一种距离下就不一定是可分的.

例 1.13 设 $X=[0, 1]$, 对任意的 $x, y \in [0, 1]$, 定义它们之间的距离如下:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x=y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

则 (X, d) 是一个距离空间, 但不是可分的.

证明 反证法. 假若 (X, d) 可分, 则存在可数子集 $B = \{x_1, x_2, \dots\}$ 在 X 中稠密, 因为对于任意的 $\delta > 0, \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_n, \delta) \supset X$, 特别取 $\delta = 1/3$, 下面说明这是不可能的. 事实上, 由于 $X=[0, 1]$ 不可数, 那么在可数个球 $B(x_n, 1/3) (n=1, 2, \dots)$ 中至少有一个球 $B(x_{n_0}, 1/3)$ 中含有 X 中的两个不同点 x, y , 即 $x, y \in B(x_{n_0}, 1/3)$, 而且 $x \neq y$. 又因为

$$d(x, y) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1,$$

这与 $x \neq y$ 时, $d(x, y) = 1$ 相矛盾, 因此 $X=[0, 1]$ 在此处距离下不是可分的.

例 1.14 有界数列空间 $l^\infty = (l^\infty, d_\infty)$ 是不可分的.

由于证明过程中涉及可能未学的连续统的势, 故略.

1.4 距离空间的完备性

1. 基本列与完备性

借鉴微积分中柯西(Cauchy)序列的定义及 $\mathbf{R}$ 是一个完备空间的概念, 我们在一般的距离空间中给出下述的定义.

定义 1.4 柯西列(基本列): 设 $\{x_n\}$ 是距离空间 X 中的点列, 如果对任意的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 当 $m, n > N$ 时, $d(x_m, x_n) < \epsilon$, 称 $\{x_n\}$ 是一个柯西列(基本列).

完备的距离空间: 若距离空间 (X, d) 中的每一个基本点列都收敛于 (X, d) 中的某一元素, 则称 (X, d) 是完备的距离空间.

由上定义可得以下结论:

(1) 距离空间中任一收敛点列是柯西列; 反之, 柯西列未必收敛.

(2) 完备距离空间的任一子空间也是完备的充要条件, 它是闭集.

(1) 之证明 设 $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$, 则对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 只要 $n > N$ 就有 $d(x_n, x_0) < \epsilon/2$. 任取 $m > N$, 同理也有, $d(x_m, x_0) < \epsilon/2$, 因此, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

故收敛点列必为基本点列. 反之未必为真, 请看下例.

例 1.15 取 $X = \mathbf{R} - \{0\}$, 其距离为通常的距离, 则 $\{1/n\}$ 是 (X, d) 中的基本点列, 但它在 (X, d) 中没有极限.

证明 因为

$$d(x_n, x_m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0 (n, m \rightarrow \infty),$$

所以 $\{1/n\}$ 是 (X, d) 中的基本点列, 但它在 (X, d) 中没有极限, 故 $\{1/n\}$ 不是收敛点列.

(2) 之证明. 必要性: 设 $\mathbf{M}$ 为 X 中的完备子空间, $\{x_n\}$ 为 $\mathbf{M}$ 中的收敛点列. 不妨假定当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow x$, 则 $\{x_n\}$ 必定是 $\mathbf{M}$ 中的基本点列. 由 $\mathbf{M}$ 的完备性知, 存在 $y \in \mathbf{M}$, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x_n \rightarrow y$. 由极限的唯一性可知, $x = y \in \mathbf{M}$, 故 $\mathbf{M}$ 是闭的.

充分性. 设 $\mathbf{M}$ 为 X 的闭子集, 而且 $\{x_n\}$ 为 $\mathbf{M}$ 中的基本点列, 则 $\{x_n\}$ 也是 X 中的基本点列. 由于 X 是完备的, 所以, 存在 $x \in X$, 而且 $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$. 考虑到 $\mathbf{M}$ 为闭集, 故 $x \in \mathbf{M}$. 因此, $\mathbf{M}$ 是完备的.

例 1.16 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是完备的距离空间.

事实上, 设 $\{x_k\}$ 是 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中的基本点列, $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, 因此, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 始终存在自然数 N , 当 $m, k > N$ 时, 有

$$d_2(x_m, x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^{(m)} - x_i^{(k)}|^2} < \epsilon.$$

由上式, 对 $i=1, 2, \dots, n$, 只要 $m, k > N$, 就有 $|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| < \epsilon$. 这表明对于任意的 $i=1, 2, \dots, n$, $\{x_i^{(k)}\}$ 皆为基本点列, 由实数 $\mathbf{R}$ 的完备性可知, 对于任意的 $i=1, 2, \dots, n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$.

由此就确定了元素 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 再在上式中令 $m \rightarrow \infty$, 可以得到

$$d_2(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i|^2} \leq \epsilon.$$

这就说明, 对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N , 只要 $k > N$, 就有 $d_2(x_k, x) \leq \epsilon$. 故 x 为