GAODENGSHUXUE
QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版　（下册）

滕兴虎　毛　磊　李　静
寇冰煜　裴　玉　编著

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

GAODENGSHUXUE

QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版　　（下册）

滕兴虎　毛　磊　李　静
寇冰煜　裴　玉　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与习题精解:同济七版.下册/滕兴虎等编著.—南京:东南大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-5641-5661-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 076285 号

高等数学全程学习指导与习题精解(同济七版·下册)

主　　编	滕兴虎　毛　磊　李　静 寇冰煜　裴　玉	责任编辑	戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	电子邮件	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		
出版发行	东南大学出版社	出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	邮　　编	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	http://www.seupress.com	电子邮件	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	印　　张	16.25　字　数　437千
版　　次	2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-5661-9		
定　　价	23.00 元		

前　言

《高等数学》是理工科院校各专业必修的一门重要课程，是理工科各专业研究生入学考试的必考科目。《高等数学》概念与理论是其他诸多理工课程的基础，其思想与方法更是贯穿科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文各个领域。

《高等数学》中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密、无懈可击。上海同济大学应用数学系主编的《高等数学》各版教材，以体系完整、层次清晰和深入浅出的特点而成为众多高校高等数学课程的首选教材。为了帮助广大同学扎实地掌握《高等数学》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，根据多年的教学经验，我们编写了与同济大学应用数学系主编的《〈高等数学〉第七版》配套的上、下册辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容；

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容；

3. 重点、难点解答：这是本辅导教材的独有特色，这一部分列出了每一章的重点与难点，并根据教学经验，对学生一般难于理解的重、难点内容，给出了详细的归纳与解答，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻；

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的分析和解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三、触类旁通的效果；

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解；

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广，题型多，解题技巧性强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌握《高等数学》的基本内容和解题方法；

7. 同步测试题：根据《高等数学》课程考试和考研内容，在每一章设计了一套同步测试题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己对高等数学知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学习。

本辅导教材上册由解放军理工大学理学院滕兴虎、刘希强、毛自森、张燕、徐为编写，下册由滕兴虎、毛磊、李静、寇冰煜、裴玉编写，全书由滕兴虎统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编者

目 录

第十一章　曲线积分与曲面积分

第十二章　无穷级数

第八章　向量代数与空间解析几何

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解向量的概念，掌握向量的加法与数乘运算；

(2) 理解空间直角坐标系，掌握向量的坐标及向量线性运算的坐标表示及两点之间距离公式、方向余弦；

(3) 熟练掌握向量的数量积、向量积的运算及意义，理解向量的混合积的意义；

(4) 熟练掌握平面与空间直线的方程和它们之间的平行、垂直关系；

(5) 掌握曲面与空间曲线的方程；

(6) 了解空间曲线在坐标面上的投影；

(7) 掌握常用的几种二次曲面的标准方程和它们的图形.

重点：

(1) 向量的数量积、向量积；

(2) 平面的点法式方程；

(3) 直线的对称式方程及直线与直线的关系；

(4) 母线平行于坐标轴的柱面方程.

难点：

(1) 母线平行于坐标轴的柱面方程；

(2) 空间曲线在坐标平面上的投影曲线.

主要概念与公式

向量的基本概念

向量 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(x,y,z)$，$M_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2$	
向量 $\boldsymbol{a}$ 的模	$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位化	$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)(\lvert\boldsymbol{a}\rvert\neq 0)$
向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦	$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
向量$\overrightarrow{M_1M_2}$	$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$
零向量 $\boldsymbol{0}$	若 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=0$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$. $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=0\Leftrightarrow x=y=z=0$

向量的基本运算

分类	定　义	性　质
加减运算	$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$
数乘向量	$\boldsymbol{a}=(x,y,z),\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 大小为 $\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$，$\lambda>0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；$\lambda<0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；$\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量	$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
数量积	$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$
向量积	$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为一向量 (1) 大小为：$\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ (2) 方向：同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ (3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ $=\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right)$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
混合积	$\boldsymbol{a}_i=(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3)$，称 $(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2)\cdot\boldsymbol{a}_3$ 为 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 的混合积，记为 $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]$ $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$	$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]=[\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1]=[\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2]$，$\lvert[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]\rvert$ 表示以 $\boldsymbol{a}_i(i=1,2,3)$ 为棱的平行六面体体积

向量间的关系

	$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{c}=(x_3,y_3,z_3)$
垂　直	$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
平　行	$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow$ 存在 $\lambda\in\mathbf{R}$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$
夹　角	$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
投　影	$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$
投影向量	$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\dfrac{\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{b}\rvert}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{b}\rvert^2}\boldsymbol{b}$
共　面	$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 存在不全为 0 的数 λ,μ,γ，使 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}=0\Leftrightarrow[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$

平面方程

分　类	方程形式	说　明
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	(1) $D=0$，$Ax+By+Cz=0$ 过$(0,0,0)$点 (2) $C=0$，$Ax+By+D=0$ 与 z 轴平行 (3) $Ax+By=0$ 过 z 轴，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	平面过(x_0,y_0,z_0)，法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1, abc\neq 0$	a,b,c 为 x 轴、y 轴、z 轴上的截距
三点式	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	(x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2)，(x_3,y_3,z_3) 为不共线的三点

空间直线方程

分　类	方程形式	说　明
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	方向向量为 $\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$
标准式（点向式）	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$	直线过(x_0,y_0,z_0)点，方向向量为(m,n,p)
参数式	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$	过(x_0,y_0,z_0)，方向向量为(m,n,p)

平面间位置关系

设两个平面 $\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0 (i=1,2)$	
垂　直	$\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0 (\boldsymbol{n}_i=(A_i,B_i,C_i), i=1,2)$
相　交	$\pi_1 /\!/ \pi_2$ 不成立
平　行	$\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
重　合	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$
夹　角	π_1 与 π_2 的夹角 φ 由右式确定：$\cos\varphi=\dfrac{\lvert\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}_1\rvert\lvert\boldsymbol{n}_2\rvert}$

直线与平面间位置关系

$l:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}(\boldsymbol{s}=(m,n,p)),\pi:Ax+By+Cz+D=0(\boldsymbol{n}=(A,B,C))$	
平　行	$l\parallel\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow(m,n,p)\cdot(A,B,C)=0$
相　交	$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\neq0$
垂　直	$l\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\dfrac{m}{A}=\dfrac{n}{B}=\dfrac{p}{C}$
直线在平面内	$l\subset\pi\Leftrightarrow(m,n,p)\cdot(A,B,C)=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
夹　角	直线与平面夹角 φ 由右式确定:$\sin\varphi=\dfrac{\lvert\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert\lvert\boldsymbol{n}\rvert}$

直线间位置关系

$l_i:\dfrac{x-x_i}{m_i}=\dfrac{y-y_i}{n_i}=\dfrac{z-z_i}{p_i}(\boldsymbol{s}_i=(m_i,n_i,p_i),M_i=(x_i,y_i,z_i),i=1,2)$	
异　面	$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\neq0$
共　面	$(\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{s}_1)\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
垂　直	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
垂直相交	$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)=0$,且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$
平　行	$l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$
重　合	$\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$
夹　角	两直线间夹角 φ 由右式确定:$\cos\varphi=\dfrac{\lvert\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}_1\rvert\lvert\boldsymbol{s}_2\rvert}$
平面束方程	$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

点到平面、直线的距离

点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为 $d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $l:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 的距离为 $d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{s}\rvert}{\lvert\boldsymbol{s}\rvert}$,其中 $M_1(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{s}=(m,n,p)$

几种常见的二次曲面

曲面名称	方　　程
球　面	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
椭球面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$
单叶双曲面	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$

（续　表）

曲面名称	方　　程
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0)$
椭圆抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$
双曲抛物面	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$
椭圆锥面	$z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$
抛物柱面	$x^2=ay(a>0)$

旋转曲面

曲　线	旋转轴	方　程
曲线$\begin{cases}f(x,z)=0\\y=0\end{cases}$	绕 x 轴旋转	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
	绕 z 轴旋转	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
曲线$\begin{cases}f(y,z)=0\\x=0\end{cases}$	绕 y 轴旋转	$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
	绕 z 轴旋转	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
曲线$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$	绕 x 轴旋转	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
	绕 y 轴旋转	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

柱面

准　线	母　线	方　程
$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$	平行于 z 轴	$f(x,y)=0$
$\begin{cases}\varphi(y,z)=0\\x=0\end{cases}$	平行于 x 轴	$\varphi(y,z)=0$
$\begin{cases}\psi(x,z)=0\\y=0\end{cases}$	平行于 y 轴	$\psi(x,z)=0$
$\begin{cases}f(x,y)=0\\z=0\end{cases}$	平行于(m,n,p)	$f\left(x-\frac{m}{p}z,y-\frac{n}{p}z\right)=0$

空间曲线在坐标面上的投影

曲线方程	投影柱面	投影曲线	说明
$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$	消 z 得 $H(x,y)=0$	$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$	在 xOy 面上投影
	消 x 得 $R(y,z)=0$	$\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}$	在 yOz 面上投影
	消 y 得 $T(x,z)=0$	$\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}$	在 zOx 面上投影

重、难点解答

1. 向量的运算

(1) 向量的加减法主要运用两个法则:平行四边形法则和三角形法则,运用时注意向量的方向性.

(2) 向量的数量积的交换律成立:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;但结合律和消去律不成立,即:$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\neq(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.因向量相等是指大小相等方向相同,而 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 不同向,则二者必然不同.实际上,即使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 同向,二者也未必相等,类似,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$;$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(3) 数量积的意义

几何意义:① $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积等于 $\boldsymbol{a}$ 的模和 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的乘积,或 $\boldsymbol{b}$ 的模和 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影的乘积,即:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\qquad(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{b}|\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}\qquad(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$$

② $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

物理意义:在外力 $\boldsymbol{a}$ 的作用下,质点沿直线移动 $\boldsymbol{b}$,外力 $\boldsymbol{a}$ 对质点所做的功.

(4) 向量积的运算规律中

交换律不成立 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

结合律不成立 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

消去律不成立 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(5) 向量积的几何意义:因 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,即:表示由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

注意:$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模而非向量.

注:① 在判别与向量运算有关的等式时,首先应判定等式两边表示的是数量还是向量.若都是数量只需看大小是否相等;若一向量一数量必不等;若二者均为向量,既要大小相等又要方向相同.

② 在求出 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 之后,若记 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,可用 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$ 与 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 是否同时成立验证结果在某种程度上是否正确.

③ 利用向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 可以:

(ⅰ) 判定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否平行——$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(ⅱ) 判定 A,B,C 是否共线——若 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$,则 A,B,C 共线.

(ⅲ) 求以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 及以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形面积 $S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$

(6) 向量的混合积,我们要掌握以下几个方面:

① 几何意义:$|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边作成的平行六面体的体积,这在求体积时常用到.当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成右手系时,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为正;当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 成左手系时,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 为负.

② 判定 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三个向量共面,只要验证 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$.

③ 混合积中只要两个向量平行,其值便为 0.

④ 以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体与四面体的体积分别为 $|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$,$\frac{1}{6}|\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})|$.

⑤ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=-\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})$.

2. 平面方程的求法

(1) 点法式方程,先求出平面的法向量,再求出平面上一点,代入公式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

(x_0, y_0, z_0) 为已知点，(A,B,C) 为法向量.

(2) 用平面束方程求之：

若所求平面过已知直线，而所给直线为交面式方程

$$\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

均可用平面束方法求.先设出过此直线的所求平面方程为

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

其中，λ_1, λ_2 为不同时为 0 的参数.

再利用题目中所给其他条件，确定出 λ_1, λ_2 的关系，代入平面束方程，即可求出所求平面方程.

(3) 利用三向量共面法求平面方程.

当所求平面过已知直线且直线方程为对称式如：$\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ 时可用此法，步骤如下：

因 $\boldsymbol{s} = (l,m,n)$，$\boldsymbol{a} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ 两向量均在平面上，故再在平面上求出一点 (x_1, y_1, z_1)，从而 $\boldsymbol{b} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ 也在平面上，三向量 $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共面，有 $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = 0$，化简后即为所求.

因此只要知道两向量在所求平面上，即可用三向量共面的方法.

(4) 利用点到平面的距离公式求平面方程.

当题设有点到平面的距离的条件时，就可以利用距离公式建立方程，解之即为所求平面方程.

(5) 待定系数法

可先设出平面方程的一般式：$Ax + By + Cz + D = 0$，再根据题设的各条件建立关系式，确定 A,B,C,D 的值即可.

(6) 截距方程求之

若已知所求平面在坐标轴上的两个截距，可先设出平面截距式方程，再利用已知条件，求出所设方程中的待定未知数.

3. 直线方程的求法

(1) 用直线的点向式求方程，先求出直线上的一点，再求出直线的方向向量代入点向式方程即可.

(2) 用直线的交面式方程求之

求出含有直线的两个平面，联立其方程即为所求直线方程.当已知直线在某个平面内时，通常用此方法.

(3) 利用直线的参数方程求之

当所求直线与已知直线或平面相交时，常设出直线的参数方程代入已知直线或平面方程中，确定参数 t，即可求出所求直线方程.

注：在求平面方程与直线方程时，关键是明确各向量间关系，即平面的法向量，直线的方向向量的关系，对解这类题目非常重要.

4. 旋转曲面方程的求法

(1) 坐标面上的曲线绕坐标轴旋转所得的旋转曲面，只需保持曲线方程坐标与旋转轴同名的变量不变，另一个变量变成旋转轴以外的两个变量的平方和.

即曲线 Γ: $\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 y 轴旋转所得旋转曲面方程为 $F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$，绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为 $F(\pm\sqrt{y^2+x^2}, z) = 0$.

曲线 Γ: $\begin{cases} F(x,y) = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面方程为 $F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$，绕 y 轴旋转所得

旋转曲面方程为 $F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

曲线 Γ: $\begin{cases}F(x,z)=0,\\ y=0,\end{cases}$ 绕 x 轴旋转所得旋转曲面方程为 $F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$，绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为 $F(\pm\sqrt{y^2+x^2},z)=0$.

(2) 若空间直线为 $\begin{cases}x=x(z),\\ y=y(z),\end{cases}$ 则直线绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程为 $x^2+y^2=x^2(z)+y^2(z)$.

5. 旋转曲面的识别

(1) 若变量 x^2,y^2,z^2 中有两个系数相同，则此曲面为旋转曲面，且其旋转轴为另一变量.

(2) 若旋转曲面为二次曲面，也可用垂直于某坐标轴的平面去截曲面，所求截痕为圆周，则该坐标轴为此曲面的旋转轴.

6. 空间曲线在坐标面上的投影曲线的求法

空间曲线 Γ: $\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\ F_2(x,y,z)=0,\end{cases}$ 在坐标平面 xOy 上的投影柱面为：在 Γ 中消去 z 有：$F(x,y)=0$. 若再与 $z=0$ 联立得 Γ 在坐标平面 xOy 面上的投影曲线：$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

同理在 yOz 面上的投影曲线为 $\begin{cases}G(y,z)=0,\\ x=0,\end{cases}$ （Γ 中消去 x）

在 xOz 面上的投影曲线为 $\begin{cases}H(x,z)=0,\\ y=0.\end{cases}$ （Γ 中消去 y）

7. 点在直线上的投影点的求法

过点作直线垂直于平面，求出平面与直线的交点即可.

若直线方程 L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$，则

(1) 过点 (x_1,y_1,z_1) 的垂直于直线 L 的平面方程为

$$l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0;$$

(2) 设直线 L 的参数方程为：$x=lt+x_0,y=mt+y_0,z=nt+z_0$；

(3) 代入平面方程确定出 t 值；

(4) 再代入直线参数方程，即求出投影点坐标.

8. 点在平面上的投影点的求法

求出过点且垂直于平面的直线，直线与平面的交点即可.

若平面方程为：$Ax+By+Cz+D=0$，则点 (x_0,y_0,z_0) 的投影点可如下求得：

(1) 写出过点 (x_0,y_0,z_0) 且垂直于平面的直线方程：

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

(2) 求出直线与平面的交点即为点在平面上的投影点.

典型例题分析

【例 1】 证明不等式

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|,$$

其中 $a_i,b_i(i=1,2,3)$ 为任意实数，并指出等号成立的条件.

证明　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

即原不等式成立. 等号成立的充要条件是 $\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行.

【例 2】设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=0$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=$________.

解　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=0$ 知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相连构成一个三角形. 再由 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$ 知该三角形为直角三角形且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 因

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

故原式 $=3|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=3|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\dfrac{\pi}{2}=36$.

【例 3】$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$________.

解　
$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2\times2=4.\end{aligned}$$

【例 4】求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

解　
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|-|\boldsymbol{a}|)(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|+|\boldsymbol{a}|)}{x(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|+|\boldsymbol{a}|)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x+|\boldsymbol{b}|^2x^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}x|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim_{x\to0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x+|\boldsymbol{b}|^2x^2}{2|\boldsymbol{a}|x}\\&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).\end{aligned}$$

【例 5】曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\z=0,\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为________.

解　旋转曲面方程为（y 不变，$x^2\to x^2+z^2$）$3(x^2+z^2)+2y^2=12$，

则在点 (x,y,z) 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(6x,4y,6z)$，故在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量为 $\left.\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$.

【例 6】平面过 z 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求此平面方程.

解　因平面过 z 轴，可以设平面方程为 $Ax+By=0$，由两平面夹角公式可得

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(\sqrt{5})^2}}$$

所以
$$\frac{\sqrt{10}}{2}\sqrt{A^2+B^2}=|2A+B|,$$

解得 $A=\dfrac{1}{3}B$，$A=-3B$，因此所求平面方程为 $x+3y=0$ 或 $-3x+y=0$.

【例 7】设有直线 $l_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+1}{1}$，$l_2:\dfrac{x+4}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{3}$，试求与 l_1,l_2 都垂直且相交的直线方程.

解　设 l 为所求直线，则 l 与 l_1 可确定平面 π_1，l 与 l_2 可确定平面 π_2，设 l_1 与 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$，则直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

所以平面 π_1,π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_1=(2,7,5)$,$\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{s}_2=(-6,18,-2)$.
又 π_1 与 π_2 分别过点$(-2,3,-1)$ 与$(-4,0,4)$,所以平面 π_1 与 π_2 分别为

$$\pi_1:2(x+2)+7(y-3)+5(z+1)=0,$$

$$\pi_2:-6(x+4)+18y-2(z-4)=0,$$

即

$$\pi_1:2x+7y+5z-12=0,$$

$$\pi_2:3x-9y+z+8=0,$$

所以直线 l 的方程为$\begin{cases}2x+7y+5z-12=0,\\3x-9y+z+8=0.\end{cases}$

【例 8】若柱面的母线平行于向量 $\boldsymbol{L}=(2,-3,4)$,而其准线为$\begin{cases}x^2+y^2=9,\\z=1,\end{cases}$求柱面方程.

解 设(x,y,z) 为柱面上的任一点,过这一点的母线与准线的交点为$(x',y',z')=(x',y',1)$,则

$$\frac{x'-x}{2}=\frac{y'-y}{-3}=\frac{z'-z}{4}=\frac{1-z}{4},$$

因此

$$x'=x+\frac{1}{2}(1-z),y'=y-\frac{3}{4}(1-z),$$

而 $x'^2+y'^2=9$,所以柱面方程为$\left[x-\frac{1}{2}(z-1)\right]^2+\left[y+\frac{3}{4}(z-1)\right]^2=9.$

【例 9】求顶点在原点,准线为曲线 l:$\begin{cases}x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}=1,\\x+y+z=2,\end{cases}$的锥面方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为锥面上任一点,则直线 PO 为锥面的母线,其方程为

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}=t,$$

故 $x'=tx,y'=ty,z'=tz$,将 x',y',z' 代入曲线 l 的方程得

$$\begin{cases}t^2\left(x^2+2y^2+\dfrac{z^2}{4}\right)=1,\\t(x+y+z)=2.\end{cases}$$

消去 t 得

$$x^2+2y^2+\frac{z^2}{4}=\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2,$$

即柱面方程为

$$3x^2+7y^2-2xy-2yz-2xz=0.$$

【例 10】求曲线 l:$\begin{cases}y=1,\\z=x^2\end{cases}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

解 设$P(x,y,z)$为曲面上任一点,设P由曲线l上一点$P'(x',y',z')$即$P'(x',l,z')$绕z轴旋转到某一位置得到,故点 P 与 P' 到 z 轴的距离相等,即

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+1+z'^2.$$

而旋转过程中有 $z=z'$ 及 $z'=x'^2$,所以旋转曲面方程为

$$x^2+y^2-z=1(0\leqslant z\leqslant 1).$$

【例 11】求曲线 l:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1\end{cases}$在 xOz 平面上的投影曲线方程.

解 在 l 的方程组中消 y 得 $x+z=1$,又由$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$,
可知 $0\leqslant x\leqslant 1,y\geqslant 0$,因此投影曲线方程为

$$\begin{cases}x+z=1,\\y=0.\end{cases}(0\leqslant x\leqslant 1,z\geqslant 0)$$

注:此例中容易疏忽 x 与 z 的范围,也易疏忽 $x+z=1$ 应与 $y=0$ 联立.

【例 12】求过直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x-2y+z+3=0\end{cases}$ 且与平面 $\pi: x+y+z=0$ 垂直的平面方程.

解　注意到 L 方程中的平面 $x-2y+z+3=0$ 与已知平面 $\pi: x+y+z=0$ 垂直，故 $x-2y+z+3=0$ 即为所求平面.

注:若设平面束 $x+y-z-1+\lambda(x-2y+z+3)=0$,
利用平面束的方法来求平面方程,得不出结论. 因为上面这个平面束方程中不含平面

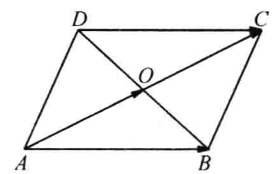
$$x-2y+z+3=0.$$

因此在设平面束方程前,需判断平面束方程中会漏掉的方程是否是所求平面.

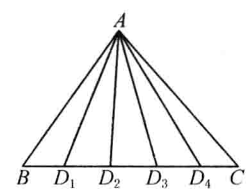
课后习题全解

习题 8 - 1

1. 解　$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$
$=5\boldsymbol{a}-11\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}.$



2. 解　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}$,
因为对角线互相平分,故 $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$,
从而 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,即 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ 且 $AB \parallel DC$,
故该四边形是平行四边形.



3. 解　$\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD_1}=-\boldsymbol{c}-\dfrac{1}{5}\boldsymbol{a}$,

$$\overrightarrow{D_2A}=\overrightarrow{D_1A}-\overrightarrow{D_1D_2}=-\boldsymbol{c}-\frac{2}{5}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{D_3A}=\overrightarrow{D_2A}-\overrightarrow{D_2D_3}=-\boldsymbol{c}-\frac{3}{5}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{D_4A}=\overrightarrow{D_3A}-\overrightarrow{D_3D_4}=-\boldsymbol{c}-\frac{4}{5}\boldsymbol{a}.$$

4. 解　$\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,0)-(0,1,2)=(1,-2,-2)$,

$$-2\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,4,4).$$

5. 解

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$$

故 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\dfrac{6}{11},\dfrac{7}{11},-\dfrac{6}{11}\right)$, $\boldsymbol{e}_2=\dfrac{-\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(-\dfrac{6}{11},-\dfrac{7}{11},\dfrac{6}{11}\right)$.

6. 解　点 $A(1,-2,3)$在第Ⅳ卦限,点 $B(2,3,-4)$在第Ⅴ卦限,
点 $C(2,-3,-4)$在第Ⅷ卦限,点 $D(-2,-3,1)$在第Ⅲ卦限.

7. 解　坐标面上的点至少有一个坐标为 0;坐标轴上的点至少有两个坐标为 0. A 在 xOy 面上,B 在 yOz 面上,C 在 x 轴上,D 在 y 轴上.

8. 解　(a,b,c)关于 xOy 面的对称点为$(a,b,-c)$,
关于 yOz 面的对称点为$(-a,b,c)$,关于 xOz 面的对称点为$(a,-b,c)$,
关于 x 轴的对称点为$(a,-b,-c)$,关于 y 轴的对称点为$(-a,b,-c)$,
关于 z 轴的对称点为$(-a,-b,c)$,关于坐标原点的对称点为$(-a,-b,-c)$.

9. 解　过 $P_0(x_0,y_0,z_0)$作 xOy 面的垂线,垂足为$(x_0,y_0,0)$,
作 yOz 面的垂线,垂足为$(0,y_0,z_0)$,作 xOz 面的垂线,垂足为$(x_0,0,z_0)$,
作 x 轴的垂线,垂足为$(x_0,0,0)$,作 y 轴的垂线,垂足为$(0,y_0,0)$,
作 z 轴的垂线,垂足为$(0,0,z_0)$.