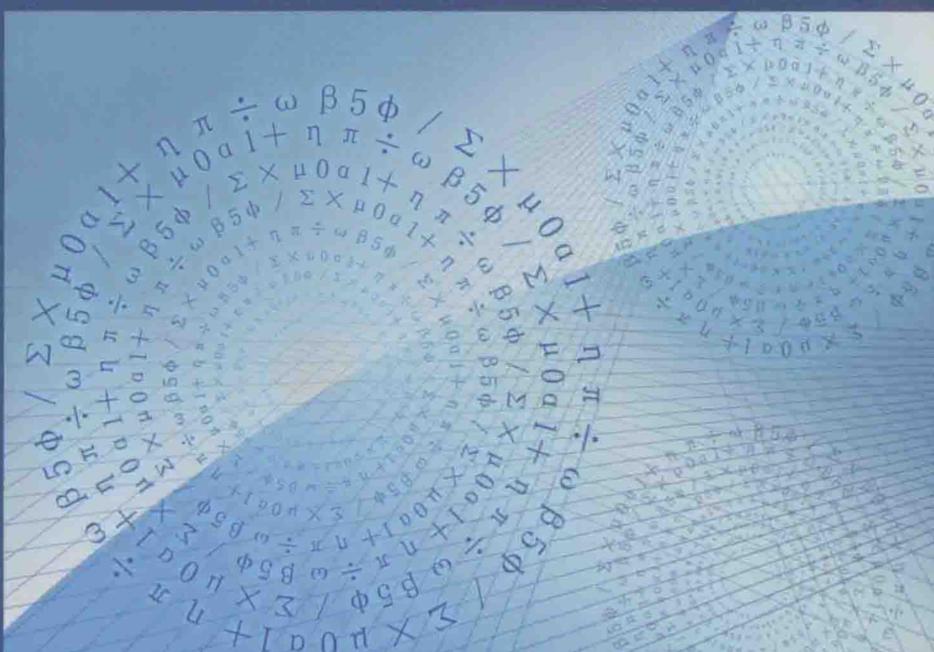
抽象代数习题
精选精解

主编　张天德　刘红星

CHOUXIANG DAISHU XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

抽象代数习题

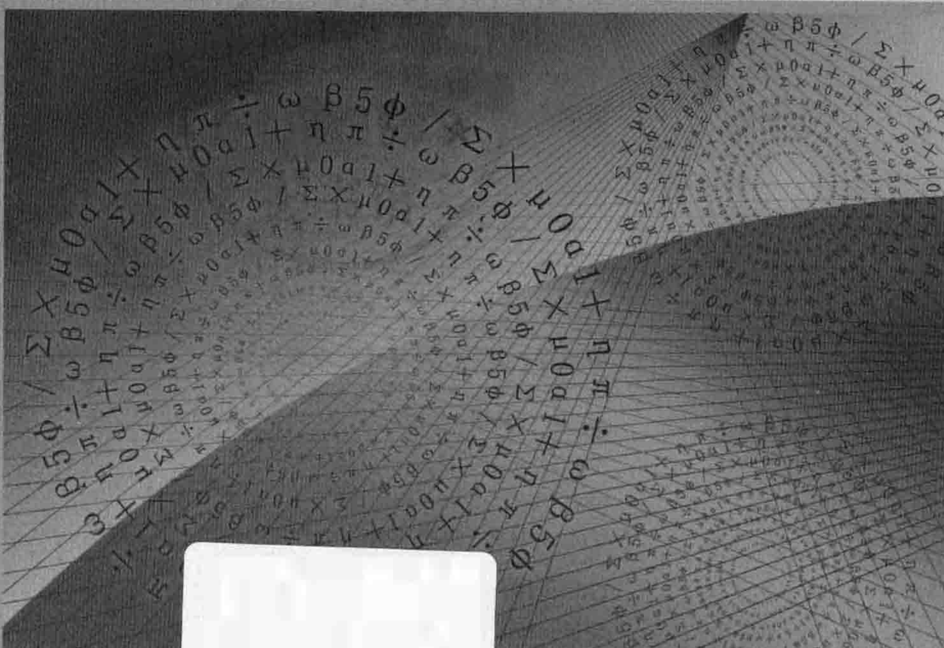
精选精解

MATH

抽象代数习题精选精解

主编　张天德　刘红星

CHOUXIANG DAISHU XITI JINGXUAN JINGJIE



山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

抽象代数习题精选精解 / 张天德，刘红星主编. —
济南：山东科学技术出版社，2014
ISBN 978-7-5331-7578-8

Ⅰ. ①抽… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ①抽象代数－高
等学校－题解 Ⅳ. ①O153－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 167061 号

主　编　张天德　刘红星
主　审　刘建亚　吴　臻
副主编　李　刚　赵大亮　包玉宝
编　委（以姓氏笔画为序）
王　颜　叶　宏　许文文　吕洪波
乔　凤　李　娜　高夫征　程红玉

抽象代数习题精选精解

出版者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn
发行者：山东科学技术出版社
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531) 82098071
印刷者：山东新华印务有限责任公司
地址：济南市世纪大道 2366 号
邮编：250104　电话：(0531)82079112

开本：720mm×1020mm　1/16
印张：12.5
版次：2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-5331-7578-8
定价：20.00 元

前言

QIANYAN

抽象代数又称近世代数，法国数学家伽罗瓦在 1832 年研究代数方程的根式解时首次提出了“群”的概念，从而使代数学的发展进入抽象代数时期。抽象代数主要介绍一般的代数结构，包含群论、环论、域论等。抽象代数是现代数学的重要基础，在数学的许多分支中有着重要应用，而且在计算机科学、信息科学等学科中也有着广泛的应用，是这些学科的重要数学工具。

抽象代数是数学专业的一门重要基础课程，也是大学生代数训练的一门重要课程。由于许多学生对于这门课程的学习感到比较困难，对其中的内容感到比较抽象，为了帮助读者更好的学习抽象代数这门课程，我们编写了这本书。

本书第一章是抽象代数的基本概念。第二章是群论，内容包括循环群、置换群、不变子群、商群、群同态、群在集合上的作用、Sylow 定理、群的直积等。第三章是环和域，内容包括整环、除环、理想、商环、环同态、素理想与极大理想等。第四章是整环的因子分解。第五章是域，包括素域、单扩域、代数扩域、有限域等。

我们在本书各节的第一部分给出了相关内容的定义和重要结论，这些是相关内容的重点和难点；第二部分给出了大量的习题，并将习题按照知识点分类，难易搭配，以便帮助读者更好地掌握相关知识以及更好地掌握解题技巧。我们对本书的习题解答努力做到详尽，希望能够为读者学习这门课程提供帮助。

由于作者水平有限，在书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2014 年 6 月

目 录

MULU

目 录

MULU

第一章　基本概念

§1. 集　　合

1. 集合的概念

(1)把具有某种性质或满足一定条件的所有事物或对象视为一个整体,这一整体就称为集合,这些事物或对象称为属于该集合的元素.

集合常用英文大写字母 $A,B,C\cdots$ 等来表示.集合中元素常用小写英文字母 $a,b,c\cdots$ 来表示.

设 A 是集合,a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$,不是 A 的元素记为 $a\notin A$.

(2)不包含任何元素的集合称为空集合,记为 $\varnothing$.

(3)表示集合的方法通常有列举法和描述法.

(4)设 A 和 B 是两集合.若 A 的元素都属于 B,则称 A 是 B 的一个子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

若 $A\subseteq B$ 且存在 B 中的元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记为 $A\subset B$.

(5)若两集合 A、B 满足 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

2. 集合的运算

(1)开集　设 A、B 为两集合,称集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

(2)交集　设 A、B 为两集合,称集合

$$\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

为 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.

(3)直积　设 A、B 为两集合,称集合

$$\{(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$$

为 A 与 B 的直积集,记为 $A\times B$.

3. 集合的运算法则

(1)$A\cup A=A$,$A\cap A=A$;

(2) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(3) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(4) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

基本题型

证明恒等式

【1】 设 A、B 是两集合，称集合

$$A-B=\{a\,|\,a\in A, a\notin B\}$$

为 A 与 B 的差集.

证明：$A-B=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$.

证：(1) $A-B\subseteq A-(A\cap B)$ 显然.

反之，设 $x\in A-A\cap B$，则 $x\in A$ 但 $x\notin A\cap B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$. 从而 $x\in A-B$. 于是有

$$A-(A\cap B)\subseteq A-B.$$

由此可得第一个等式.

(2) $A-B\subseteq(A\cup B)-B$ 显然.

设 $x\in(A\cup B)-B$，则 $x\in A\cup B$ 但 $x\notin B$. 从而必有 $x\in A$. 所以 $x\in A-B$. 由此可得

$$(A\cup B)-B\subseteq A-B.$$

从而有 $A-B=(A\cup B)-B$.

【2】 $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$.

证：设 $x\in(A-B)\cap(C-D)$，则 $x\in A-B$ 且 $x\in C-D$. 于是有 $x\in A$ 但 $x\notin B$，$x\in C$ 但 $x\notin D$. 所以 $x\in A\cap C$ 但 $x\notin B\cup D$. 从而 $x\in(A\cap C)-(B\cup D)$. 由此可得

$$(A-B)\cap(C-D)\subseteq(A\cap C)-(B\cup D).$$

设 $x\in(A\cap C)-(B\cup D)$，则 $x\in A\cap C$ 但 $x\notin B\cup D$. 于是有 $x\in A$，$x\notin B$，$x\in C$，$x\notin D$. 从而 $x\in(A-B)\cap(C-D)$. 因此

$$(A\cap C)-(B\cup D)\subseteq(A-B)\cap(C-D).$$

由此可得等式成立.

【3】 设 X，Y 是两集合且 $Y\subseteq X$，用 Y' 表示 $X-Y$，并称为 Y 在 X 中的余集. 证明：若 A，$B\subseteq X$，则

(1)$(A\cup B)'=A'\cap B'$;

(2)$(A\cap B)'=A'\cup B'$(德·摩根律).

证:(1)设 $x\in(A\cup B)'$,则 $x\notin A\cup B$. 即:$x\notin A$ 且 $x\notin B$. 于是 $x\in A'$ 且 $x\in B'$. 从而 $x\in A'\cap B'$. 因此

$$(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'.$$

反之,若 $x\in A'\cap B'$,则 $x\in A'$ 且 $x\in B'$. 即:$x\notin A$ 且 $x\notin B$. 于是 $x\notin A\cup B$. 所以 $x\in(A\cup B)'$. 即

$$A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'.$$

从而证得等式.

(2)设 $x\in(A\cap B)'$,则 $x\notin A\cap B$. 即:$x\notin A$ 或 $x\notin B$. 从而 $x\in A'\cup B'$,于是

$$(A\cap B)'\subseteq A'\cup B'.$$

反之,若 $x\in A'\cup B'$,则 $x\in A'$ 或 $x\in B'$. 即:$x\notin A$ 或 $x\notin B$. 所以 $x\notin A\cap B$. 于是

$$A'\cup B'\subseteq(A\cap B)'.$$

从而(2)成立.

【4】 证明:$A=B\Leftrightarrow A\cup B=A\cap B$.

证:$\Rightarrow$:若 $A=B$,则

$$A\cup B=A,\quad A\cap B=A,$$

所以 $A\cup B=A\cap B$.

$\Leftarrow$:若 $A\cup B=A\cap B$,则 $\forall x\in A$,有

$$x\in A\cup B=A\cap B,$$

从而 $x\in B$,即 $A\subseteq B$.

同理可证:$B\subseteq A$. 所以 $A=B$.

【5】 证明:$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$.

证:$\Rightarrow$:若 $A\subseteq B$,则 $A\cap B$ 显然成立.

$\Leftarrow$:若 $A\cap B=A$,$\forall x\in A$,则 $x\in A\cap B$. 于是有 $x\in B$. 所以 $A\subseteq B$.

§2. 映射、映射的合成

1. 映射的概念

(1)设 A,B 是两个集合. 若有一个对应法则 φ,使任意 $a\in A$,通过 φ,存在唯一的元素 $b\in B$ 与之对应,则称 φ 是 A 到 B 的一个映射,b 称为 a 在映射 φ 下的像,记

为 $b=\varphi(a)$. a 称为 b 在映射 φ 下的一个逆像(原像).

注:(ⅰ)所有的像都必须在 B 中;

(ⅱ)A 中的任一元素在 B 中必有像;

(ⅲ)唯一性. A 中的元素只能有一个像.

(2)将 A 换成集合的直积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,则有映射

$$\varphi: A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\to B$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\longmapsto b=\varphi(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

注:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中可以有相同的集合,但 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 不相同时,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的次序不能调换.

(3)设 φ_1,φ_2 是 A 到 B 的两个映射,若对任意 $a\in A$,有

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a),$$

则称 φ_1,φ_2 是相等的. 记作 $\varphi_1=\varphi_2$.

(4)满射　若 φ 是 A 到 B 的映射,且在 φ 下 B 中任一元素在 A 中都有原像,则称 φ 是 A 到 B 的一个满射.

注:设 $X\subseteq A$,记

$$\varphi(X)=\{\varphi(x)\mid x\in X\}.$$

显然 $\varphi(X)\subseteq B$.

φ 是满射 $\Leftrightarrow\varphi(A)=B$.

(5)单射　若 φ 是 A 到 B 的映射,且 A 中不同的元素在 B 中的像也不同,则称 φ 是 A 到 B 的一个单射.

注:φ 是单射 $\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in A$,若 $x_1\neq x_2$,则 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$.

$\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in A$,若 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$,则 $x_1=x_2$.

(6)双射　设 φ 是 A 到 B 的映射,若 φ 既是满射又是单射,则称 φ 是 A 到 B 的一个双射.

注:若 φ 是双射,则 φ 有逆映射.

2. 映射的合成

设 f 是 A 到 B 的映射,g 是 B 到 C 的映射,则

$$x\longmapsto g(f(x))\quad(\forall x\in A),$$

是 A 到 C 的一个映射,记为 gf. 即

$$gf(x)=g(f(x))\quad(\forall x\in A),$$

则称 gf 为映射的合成(映射的乘法).

3. 变换

(1)集合 A 到自身的映射称为 A 的一个变换.

注:A 的双射变换也称为一一变换.

(2)设 I 是 A 的一个变换,任意 $a\in A$,有

$$I(a)=a,$$

则称 I 是 A 的恒等变换.

基本题型

映射的性质

【1】 设 f 是 A 到 B 的映射,X_1 与 X_2 是 A 的两非空子集. 试确定

(1)$f(X_1\cup X_2)$与 $f(X_1)\cup f(X_2)$的包含关系;

(2)$f(X_1\cap X_2)$与 $f(X_1)\cap f(X_2)$的包含关系.

解:(1)由于 $X_1\subseteq X_1\cup X_2$. 从而有

$$f(X_1)\subseteq f(X_1\cup X_2).$$

同理:$f(X_2)\subseteq f(X_1\cup X_2)$.

所以有 $f(X_1)\cup f(X_2)\subseteq f(X_1\cup X_2)$.

设 $x\in f(X_1\cup X_2)$,则存在 $y\in X_1\cup X_2$ 使得

$$x=f(y),$$

所以 $x\in f(X_1)\cup f(X_2)$. 即:

$$f(X_1\cup X_2)\subseteq f(X_1)\cup f(X_2).$$

从而有 $f(X_1\cup X_2)=f(X_1)\cup f(X_2)$.

(2)因为 $X_1\cap X_2\subseteq X_1$,所以

$$f(X_1\cap X_2)\subseteq f(X_1).$$

同理:$f(X_1\cap X_2)\subseteq f(X_2)$.

所以有 $f(X_1\cap X_2)\subseteq f(X_1)\cap f(X_2)$.

反向包含关系不成立. 令 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,2\}$. 设 $X_1=\{1,2\}$,$X_2=\{3\}$,f 是A 到 B 的映射,且

$$f:\quad 1\longmapsto 1,\quad 2\longmapsto 2,\quad 3\longmapsto 2,$$

则 $f(X_1\cap X_2)=f(\varnothing)=\varnothing$. 而

$$f(X_1)=\{1,2\}=B,\quad f(X_2)=\{2\},$$

从而 $f(X_1)\cap f(X_2)=\{2\}\not\subseteq f(X_1\cap X_2)$.

【2】 设 f 是 A 到 B 的映射,Y_1,$Y_2\subseteq B$. 试确定

(1)$f^{-1}(Y_1\cup Y_2)$与$f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$的关系；

(2)$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$与$f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$的关系.

(若$Y\subseteq B$,记$f^{-1}(Y)=\{a\in A \mid f(a)\in Y\}$).

解:(1)由于$Y_1\subseteq Y_1\cup Y_2$,则有

$$f^{-1}(Y_1)\subseteq f^{-1}(Y_1\cup Y_2).$$

同理:$f^{-1}(Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1\cup Y_2)$.

所以$f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1\cup Y_2)$.

设$x\in f^{-1}(Y_1\cup Y_2)$,则$f(x)\in Y_1\cup Y_2$. 从而有$x\in f^{-1}(Y_1)$或$x\in f^{-1}(Y_2)$. 于是

$$f^{-1}(Y_1\cup Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2).$$

所以$f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$.

(2)由于$Y_1\cap Y_2\subseteq Y_1$,则有

$$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1).$$

同理:$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_2)$.

所以有$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$.

设$x\in f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$,则$x\in f^{-1}(Y_1)$且$x\in f^{-1}(Y_2)$.

由$x\in f^{-1}(Y_1)$可得:$f(x)\in Y_1$. 同理可得:$f(x)\in Y_2$. 于是$f(x)\in Y_1\cap Y_2$. 从而$x\in f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$. 所以

$$f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)\subseteq f^{-1}(Y_1\cap Y_2).$$

因此$f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$.

【3】 设f是A到B的映射,$X\subseteq A$,$Y\subseteq B$. 证明:

(1)$X\subseteq f^{-1}(f(X))$,且当f为单射时等号成立;

(2)$f(f^{-1}(Y))\subseteq Y$,且当f为满射时等号成立.

证:(1)$\forall x\in X$,则$f(x)\in f(X)$,从而$x\in f^{-1}(f(X))$. 于是

$$X\subseteq f^{-1}(f(X)).$$

若f是单射,$\forall x\in f^{-1}(f(X))$,则$f(x)\in f(X)$. 从而存在$x'\in X$,使得

$$f(x)=f(x').$$

由于f是单射,则$x=x'$,从而$x\in X$. 因此

$$f^{-1}(f(X))\subseteq X.$$

所以等号成立.

(2)$\forall y\in f(f^{-1}(Y))$,则$\exists a\in f^{-1}(Y)$,使得

$$y=f(a).$$

由 $a\in f^{-1}(Y)$ 可知 $f(a)\in Y$，从而有 $y=f(a)\in Y$. 于是

$$f(f^{-1}(Y))\subseteq Y.$$

设 f 是满射，$\forall\, y\in Y$，则存在 $a\in A$，使得

$$f(a)=y,$$

所以 $a\in f^{-1}(Y)$. 因此 $y=f(a)\in f(f^{-1}(Y))$. 于是

$$Y\subseteq f(f^{-1}(Y)).$$

所以等号成立.

映射的合成

【4】 设 f 是 A 到 B 的映射. I_A，I_B 分别是集合 A 和 B 上的恒等变换. 证明：

$$fI_A=f=I_Bf.$$

证：任意 $x\in A$，有

$$fI_A(x)=f(I_A(x))=f(x),$$

从而 $fI_A=f$.

同理可证：$I_Bf=f$.

【5】 设 f 是 A 到 B 的映射，g 是 B 到 C 的映射，证明：

(1)若 f，g 都是单射，则 gf 是单射；若 gf 是单射，则 f 是单射；

(2)若 f，g 都是满射，则 gf 是满射；若 gf 是满射，则 g 是满射.

证：(1)若 f，g 都是单射. 设 $x_1,x_2\in A$，且 $gf(x_1)=gf(x_2)$. 由于 g 是单射，则有

$$f(x_1)=f(x_2).$$

再由 f 是单射可得：$x_1=x_2$. 从而 gf 是单射.

若 gf 是单射. 设 $a_1,a_2\in A$ 且 $f(a_1)=f(a_2)$，则

$$gf(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))=gf(a_2),$$

由 gf 是单射可得：$a_1=a_2$. 从而 f 是单射.

(2)若 f，g 都是满射，$\forall\, c\in C$. 由 g 是满射可知存在 $b\in B$ 使得

$$g(b)=c,$$

而 f 是满射，则存在 $a\in A$，使得

$$f(a)=b.$$

于是

$$c=g(b)=g(f(a))=gf(a),$$

从而 gf 是满射.

若 gf 是满射，$\forall\, c\in C$，则存在 $a\in A$，使得

$$gf(a)=c.$$

即：$g(f(a))=c$. 而 $f(a)\in B$，从而 g 是满射.

【6】 设 f 是 A 到 B 的映射. 证明：

$$f\text{ 是单射}\Leftrightarrow\text{存在 }B\text{ 到 }A\text{ 的映射 }g\text{，使 }gf=I_A.$$

证：$\Rightarrow$：若 f 是单射. 取定 $a_0\in A$. 若 $b\in f(A)$，则存在唯一的 $a\in A$ 使得 $b=f(a)$. 定义

$$g:B\to A$$

$$b\mapsto\begin{cases}a, & \text{若}\ \exists a\in A\text{，使 } f(a)=b,\\ a_0 & \text{否则}.\end{cases}$$

则 g 是 B 到 A 的映射，且易证 $gf=I_A$.

$\Leftarrow$：若存在 B 到 A 的映射 g 使 $gf=I_A$.

任意 $a_1,a_2\in A$，若 $f(a_1)=f(a_2)$，则

$$gf(a_1)=g(f(a_1))=g(f(a_2))=gf(a_2),$$

从而 $I_A(a_1)=I_A(a_2)$. 于是 $a_1=a_2$. 所以 f 是单射.

§3. 代 数 运 算

1. 代数运算的意义

(1)设 A,B,D 是集合，称 $A\times B$ 到 D 的映射为 $A\times B$ 到 D 的代数运算.

注：(ⅰ)代数运算是一种特殊映射；

(ⅱ)A 和 B 的次序一般不能交换；

(ⅲ)代数运算通常用符号"$\circ$"表示.

(2)一个 $A\times A$ 到 A 的代数运算称为 A 上的(二元)代数运算.

2. 运算律

(1)结合律

(ⅰ)设$\circ$是 A 上的一个代数运算. 若 $a,b,c\in A$ 有

$$(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c),$$

则称 A 上的这个代数运算$\circ$满足结合律.

(ⅱ)若集合 A 上的代数运算$\circ$满足结合律，则对 A 中任意 $n(n\geqslant 3)$ 个元素无论怎样加括号，其结果都相等.

(2)交换律

(ⅰ)设$\circ$是 A 上的一个代数运算. 若 $\forall a,b\in A$ 有

$$a\circ b=b\circ a,$$

则称 A 上的代数运算$\circ$满足交换律.

(ⅱ)若集合 A 上的代数运算既满足结合律又满足交换律,则对 A 中任意 n 个元素进行运算时可以任意结合和交换元素的前后次序,其结果均相等.

(3)消去律

(ⅰ)设$\circ$是 A 上的一个代数运算. 若 $\forall a,b,c\in A$,有

$$ab=bc\Rightarrow b=c,$$

则称"$\circ$"满足左消去律.

(ⅱ)设$\circ$是 A 上的代数运算. 若 $\forall a,b,c\in A$,有

$$ba=ca\Rightarrow b=c,$$

则称"$\circ$"满足右消去律.

(ⅲ)若$\circ$既满足左消去律又满足右消去律,则称$\circ$满足消去律.

(4)分配律

(ⅰ)左分配律

①设集合 A 上有两个代数运算$\circ$和$\oplus$,若 $\forall a,b,c\in A$,有

$$a\circ(b\oplus c)=(a\circ b)\oplus(a\circ c),$$

则称$\circ$对$\oplus$满足左分配律.

②设集合 A 上有两个代数运算$\circ$和$\oplus$,若$\oplus$满足结合律且$\circ$对$\oplus$满足左分配律,则 $\forall a,b_1,b_2,\cdots,b_n\in A$,有

$$a\circ(b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_n)=(a\circ b_1)\oplus(a\circ b_2)\oplus\cdots\oplus(a\circ b_n).$$

(ⅱ)右分配律

①设集合 A 上有两个代数运算$\circ$和$\oplus$,若 $\forall a,b,c\in A$,有

$$(b\oplus c)\circ a=(b\circ a)\oplus(c\circ a),$$

则称$\circ$对$\oplus$满足右分配律.

②设集合 A 上有两个代数运算$\circ$和$\oplus$,若$\oplus$满足结合律且$\circ$对$\oplus$满足右分配律,则 $\forall a,b_1,b_2,\cdots,b_n\in A$,有

$$(b_1\oplus b_2\oplus\cdots\oplus b_n)\circ a=(b_1\circ a)\oplus(b_2\circ a)\oplus\cdots\oplus(b_n\circ a).$$

基 本 题 型

代数运算

【1】 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集. 下列法则是 $\mathbb{Z}$ 上的代数运算的是哪些?

(ⅰ)普通加法 $a\circ b=a+b$;

(ⅱ)普通乘法 $a\circ b=ab$;

(ⅲ)普通减法 $a\circ b=a-b$;

(ⅳ)普通除法 $a\circ b=\frac{b}{a}$;

(ⅴ)$a\circ b=\sqrt{a^2+b^2}$.

解:(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)是 $\mathbb{Z}$ 上的代数运算.

(ⅳ)不 $\mathbb{Z}$ 上的代数运算,因为

$$0\circ b=\frac{b}{0}$$

没有意义.

(ⅴ)不是 $\mathbb{Z}$ 上的代数运算. 因为

$$1\cdot 1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

不是整数.

结合律

【2】 设 $A=R\backslash\{\circ\}$,其中 R 是实数集,$\circ$是普通除法

$$a\circ b=\frac{b}{a}.$$

问:代数运算$\circ$是否满足结合律?

解:代数运算$\circ$不满足结合律.

取 $a=2,b=3,c=3$,则

$$(a\circ b)\circ c=(2\circ 3)\circ 3=\frac{3}{2}\circ 3=2;$$

$$a\circ(b\circ c)=2\circ(3\circ 3)=2\circ\frac{3}{3}=\frac{1}{2}.$$

从而 $a=2,b=3,c=3$ 时,有

$$(a\circ b)\circ c\neq a\circ(b\circ c).$$

【3】 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集. 问:$\mathbb{Z}$ 上的代数运算

$$a\circ b=2a+ab$$

是否满足结合律?

解:代数运算$\circ$不满足结合律.

取 $a=1,b=2,c=3$,则

$$(a\circ b)\circ c=(1\circ 2)\circ 3=(2+1\times 2)\circ 3=4\circ 3=8+4\times 3=20;$$

$$a\circ(b\circ c)=1\circ(2\circ 3)=1\circ(4+2\times 3)=1\circ 10=2+1\times 10=12.$$