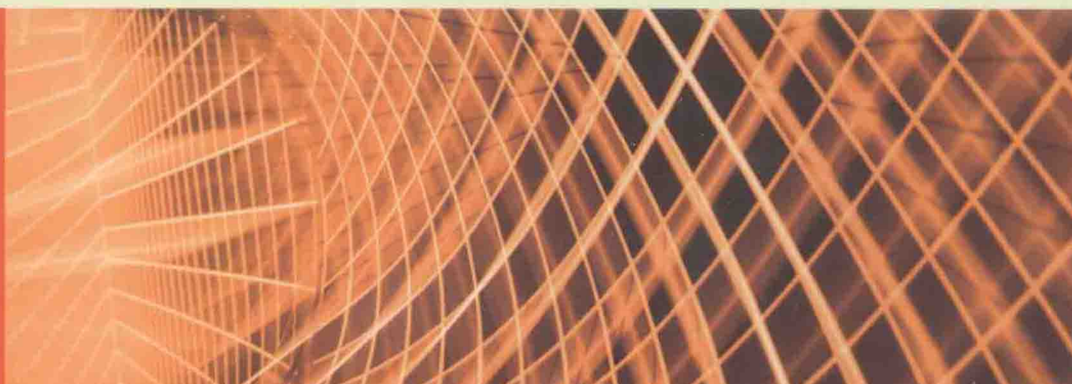
高校核心课程学习指导丛书

数学分析范例选解

SHUXUE FENXI
FANLI XUANJIE

朱尧辰／编著



中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

朱尧辰 / 编著

数学分析范例选解

SHUXUE FENXI
FANLI XUANJIE

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书通过一些特别挑选的范例（约240个题或题组）和配套习题（约220个题或题组）来提供数学分析习题的某些解题技巧，涉及基础性和综合性两类问题，题目总数近1000个.题目选材范围比较广泛，范例解法具有启发性和参考价值，所有习题均附解答或提示.

本书可作为大学数学系师生的教学参考书或研究生入学应试备考资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析范例选解/朱尧辰编著.—合肥：中国科学技术大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-312-03616-3
（高校核心课程学习指导丛书）

Ⅰ.数… Ⅱ.朱… Ⅲ.数学分析—高等学校—题解 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第247509号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.tobao.com
印刷 合肥现代印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 40
字数 1213千
版次 2015年1月第1版
印次 2015年1月第1次印刷
定价 69.00元

前　言

编写本书主要是为具有一定微积分解题基础的大学生提供一个辅导材料, 借助对一些范例解法的展示和“揣摩”, 使他们的微积分解题技巧有所提高; 也为硕士研究生入学考试的应试复习增添一种参考资料. 本书所选问题 (例题和习题) 涉及基础性和综合性两个方面, 计算题和证明题并重, 但不追求面面俱到. 多数问题取自多种中外 (欧美俄日) 数学书刊, 以及 20 世纪 80 年代以来的某些硕士生入学考试试题. 因为市面上学习辅导书籍甚多, 所以很难完全不与其他类似的书籍中的问题有所重复. 所有范例按照问题的主题作了大体的分类, 分为九章, 前八章又大致分为若干节, 每章后都安排一些配套习题. 范例的解答都是经过重新加工整理的, 一般包含必要的计算或推理的细节, 有的附加一些注释或少许引申材料. 还给出全部习题的解答或提示. 最后一章即第 9 章, 给出一些不分类的补充习题, 也给出了解答或提示. 标有 $*$ 号的例题和习题是 (国内外) 硕士生入学考试试题.

使用本书的一些建议 (或忠告) 如下:

1. 本书不配备数学知识提要, 请依据自己所使用的教材及备考目标, 自行编写适合需要的这类材料.

2. 本书的例题和习题应作为一个整体看待, 它们实际上是互相补充的.

3. 本书没有特别标注较难的例题和习题, 请依据自己的情况确定例题和习题的难易分类.

4. 请依据自己的情况和备考目标有选择地采用本书的例题和习题, 特别是综合性例题, 不要“一刀切”.

5. 做习题时宜首先自行思考解法, 尽量不要立即翻看题解或提示.

6. 本书介绍的某些解题技巧或方法宜通过多次阅读和演练以加深理解, 对于它们, 在不同的学习阶段会有不同的感受.

作者只是一个数学研究人员. 本书的部分素材来自过去对大学生和研究生兼课 (基础课程和专业课程) 的积累, 限于作者的水平和经验, 本书在取材、编排和解题等方面难免存在不妥、疏漏甚至谬误, 欢迎读者和同行批评指正.

朱尧辰
2014 年 2 月于北京

符号说明

1° $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$　(依次) 正整数集, 整数集, 有理数集, 实数集, 复数集.

$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

$\mathbb{R}_+$　正实数集.

2° $[a]$　实数 a 的整数部分, 即不超过 a 的最大整数.

$\{a\}=a-[a]$　实数 a 的分数部分 (也称小数部分).

$\|a\|=\min(a-[a],[a]+1-a)$　实数 a 与最靠近它的整数间的距离.

$\lceil a\rceil$　大于或等于 a 的最小整数.

$\lfloor a\rfloor$　小于或等于 a 的最大整数 (亦即 a 的整数部分 $[a]$).

$\mathrm{Re}(z)$　复数 z 的实数部分.

$(2n+1)!!=(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1$.

$(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2$.

$\delta_{i,j}$　Kronecker 符号 (即当 $i=j$ 时其值为 1, 否则为 0).

3° $\log_b a$　实数 $a>0$ 的以 b 为底的对数.

$\log a$(与 $\ln a$ 同义)　实数 $a>0$ 的自然对数.

$\lg a$　实数 $a>0$ 的常用对数 (即以 10 为底的对数).

$\exp(x)$　指数函数 e^x.

$\sinh x\,(\cosh x,\tanh x,\coth x)$　双曲正弦 (余弦, 正切, 余切).

$\arcsin x,\arccos x,\arctan x$　反三角函数 (一般按主值理解).

$\mathrm{sgn}(x)$　符号函数 (即当 $x>0$ 时其值为 1; 当 $x<0$ 时其值为 -1; 当 $x=0$ 时其值为 0).

$\mathrm{B}(p,q)\,(p,q>0)$　贝塔函数, 即

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}}\mathrm{d}s$$
$$=2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\mathrm{d}\theta.$$

$\Gamma(a)\,(a>0)$　伽马函数, 即

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

γ Euler-Mascheroni 常数 (Euler 常数), 即

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$
$$=0.6772156649015328606065120\cdots.$$

4° $C[a,b],C(A)$ 所有定义在区间 $[a,b]$ 或集合 A 上的连续函数形成的集合.

$C^r[a,b],C^r(A)$ 所有定义在区间 $[a,b]$ 或集合 A 上的 $r(r\geqslant 0)$ 阶导数连续的函数形成的集合.

$\mathbb{R}[x]$ 所有实系数多项式形成的集合 ($\mathbb{R}$ 可换成其他集合).

$|S|$ 有限集 S 所含元素的个数.

5° $f(x)\sim g(x)\,(x\to a)$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 当 $x\to a$ 时等价, 即 $\lim\limits_{x\to x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$(此处 a 是实数或 $\pm\infty$)(对于离散变量 n 类似, 下同).

$f(x)=o\big(g(x)\big)\,(x\to a)$ 指 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$(此处 a 是实数或 $\pm\infty$).

$f(x)=O\big(g(x)\big)\,(x\in A)$ 指存在常数 $C>0$ 使 $|f(x)|\leqslant C|g(x)|$(对于所有 $x\in A$)(此处 A 为某个集合).

$f(x)=O\big(g(x)\big)\,(x\to a)$ 指对于 a 的某个邻域中的所有 $x,f(x)=O\big(g(x)\big)$(此处 a 是实数或 $\pm\infty$).

$o(1)$ 和 $O(1)$ 无穷小量和有界量.

$a_n\,(n\geqslant 1)$ 数列 (不引起混淆时也可简记为 a_n).

$a_n\downarrow a\,(n\to\infty)$ 数列 a_n 单调下降趋于 a(函数情形类似).

$a_n\uparrow a\,(n\to\infty)$ 数列 a_n 单调上升趋于 a(函数情形类似).

$f(a-),f(a+)$ $f(x)$ 在点 a 的左极限 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$, 右极限 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)$.

$f'_-(a),f'_+(a)$ $f(x)$ 在点 a 的左导数, 右导数.

$f_x,f_{x,x}$ $f(x,y)$ 的偏导数 $\partial f/\partial x=f'_x,\partial^2 f/\partial x^2=f''_{x,x}$(在不引起混淆时) 的简记号 (余类推).

(r,θ) (平面) 极坐标系,Jacobi 式 $=r\big($有时记为 $(r,\phi),(\rho,\theta),(\rho,\phi)\big)$.

(r,ϕ,θ) 或 (ρ,ϕ,θ) (空间) 球坐标系, Jacobi 式 $=r^2\sin\theta$.

(r,ϕ,z) 或 (ρ,ϕ,z) (空间)(圆) 柱坐标系, Jacobi 式 $=r$.

6° $\boldsymbol{xy}$ 向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ 的内积 (数量积), 即 $x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

$(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 及 $(a_{i,j})_{n\times n}$ n 阶方阵.

$\det(\boldsymbol{A}),|\boldsymbol{A}|$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.

7° $\square$ 表示问题解答完毕.

目　次

第 1 章　数列极限

1.1　上极限和下极限

例 1.1.1　求数列

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{3} \quad (n=1,2,\cdots)$$

的上极限和下极限 (并加以证明).

解　定义集合

$$N_0 = \{6k\,(k\geqslant 1)\}, \quad N_j = \{6k+j\,(k\geqslant 0)\} \quad (j=1,2,\cdots,5).$$

分别考虑当下标 $n\in N_j\,(j=0,1,\cdots,5)$ 不同情形的子列. 当 $n\in N_0$ 时, 即子列 $x_{n_k}, n_k = 6k(k\geqslant 1)$, 有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{6k}{6k+1} = 1;$$

当 $n\in N_1$ 时, 即子列 $x_{n_k}, n_k = 6k+1(k\geqslant 1)$, 有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\frac{6k+1}{6k+2} = -\frac{1}{2};$$

类似地可算出其他 4 种情形, 相应的子列极限等于 1(当 $n\in N_3$), 或 $-1/2$(当 $n\in N_2,N_4,N_5$). 因为 $\mathbb{N} = N_0\cup N_1\cup\cdots\cup N_5$, 并且诸 N_j 两两无公共元素, 所以任何一个下标 n 必属于某个确定的 N_j. 对于 x_n 的任一收敛子列, 其任何收敛子列也有与该子列相同的极限, 因此其各项的下标除去可能有限多个例外, 必然或者同属于 N_0,N_3 或它们的并集, 此时其极限等于 1; 或者同属于 N_1,N_2,N_4,N_5 或它们的并集, 此时其极限等于 $-1/2$. 因此 x_n 的任一收敛子列的极限或等于 1, 或等于 $-1/2$, 从而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1/2$. □

例 1.1.2　设 $a_n\geqslant 0$, 并且

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty \quad (n\to\infty).$$

对于任意无穷数列 $x_n\,(n\geqslant 1)$ 定义

$$\omega_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \quad (n=1,2,\cdots).$$

证明:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \omega_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \omega_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

解 (i) 首先证明 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \omega_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 如果 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 那么此不等式显然成立, 所以可设 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = l$(有限实数). 由 l 的定义可知, 对于任意给定的 $L > l$, 存在下标 $m = m(L)$ 具有下列性质:$x_n < L$(当 $n > m$). 于是当 $n > m$ 时,

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{m} a_k x_k + \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k \\
&\leqslant \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{m} a_k x_k + \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k L \\
&= \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{m} a_k x_k + L\cdot \frac{\sum\limits_{m+1\leqslant k\leqslant n} a_k}{\sigma_n},
\end{aligned}$$

因为 m 固定,$\sigma_n \to \infty\,(n\to\infty)$, 并且 $\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \leqslant \sigma_n$, 所以

$$\omega_n \leqslant o(1) + L \quad (n\to\infty).$$

于是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \omega_n \leqslant L$. 这对任何 $L > l$ 成立, 所以 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \omega_n \leqslant l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. 因此上述结论得证.

(ii) 将步骤 (i) 中得到的结论应用于无穷数列 $-x_n\,(n\geqslant 1)$, 可得

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} a_k(-x_k) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(-x_n),$$

即

$$-\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \leqslant -\varliminf_{n\to\infty} x_n,$$

也就是 $-\varliminf\limits_{n\to\infty} \omega_n \leqslant -\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, 于是 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \omega_n$.

(iii) 最后, 由上、下极限的基本性质知 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \omega_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} \omega_n$. 于是本题得证. □

1.2 简单的数列极限问题

下面例子的解法主要是基于数列极限的基本性质.

*** 例 1.2.1** 计算:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3\left(2\sin\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{2}{n}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \log(1+x^n)\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为 $\sin^2 t$ 以 π 为周期, 所以

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-\pi n) = \sin^2\left((\sqrt{n^2+n}-n)\pi\right).$$

注意

$$\sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{1+\sqrt{1+1/n}},$$

我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{1+\sqrt{1+1/n}} = 1.$$

(2) 解法 1　注意

$$n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right) = \frac{2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3} = 1,$$

在其中将连续变量 x 代以离散变量 $1/n$, 可知所求极限等于 1.

解法 2　我们有

$$\begin{aligned}
n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right) &= n^3\left(2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!}\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{3!}\frac{8}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)\right)\\
&= n^3\left(\frac{1}{n^3}+O\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\to 1 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$

(3) 由 $0\leqslant \log(1+x^n)\leqslant x^n\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 可知所求极限等于 0. □

例 1.2.2　若数列 $a_n\,(n\geqslant 1)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/n = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\max(a_1,\cdots,a_n)}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\min(a_1,\cdots,a_n)}{n} = 0.$$

解　记

$$b_n = \max(a_1,\cdots,a_n) \quad (n=1,2,\cdots).$$

因为 $b_n\in\{a_1,\cdots,a_n\}$, 所以对于某个 $k_n\,(1\leqslant k_n\leqslant n), b_n = a_{k_n}$, 于是

$$0\leqslant \left|\frac{b_n}{n}\right| = \left|\frac{a_{k_n}}{k_n}\cdot\frac{k_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{a_{k_n}}{k_n}\right|,$$

由于 $a_{k_n}/k_n\,(n\geqslant 1)$ 是 $a_n/n\,(n\geqslant 1)$ 的子列, 所以依题设当 $n\to\infty$(因而 $k_n\to\infty$) 时, 上式右边趋于 0, 从而第一个结论得证. 题中另一个结论可类似地证明. □

例 1.2.3 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}])=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}])=1$.

解 (1) 我们有

$$n!\mathrm{e}=n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}.$$

显然上式右边第一项是整数; 右边第二项满足不等式

$$\begin{aligned}0<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}&=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}+\cdots\right)\\&<\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)<\frac{\mathrm{e}}{n+1}.\end{aligned}$$

当 $n>\mathrm{e}-1$ 时 $\mathrm{e}/(n+1)<1$, 因此

$$[n!\mathrm{e}]=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\quad(n>\mathrm{e}-1),$$

并且

$$0<n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}]=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{n!}{k!}<\frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

令 $n\to\infty$ 即得 $n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}]\to 0$.

(2) 令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},$$

那么 (依 e 的定义)$S_n\to\mathrm{e}(n\to\infty)$. 对于正整数 n 和 m, 有

$$\begin{aligned}S_{n+m}-S_n&=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}\\&=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)}\right)\\&<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}+\cdots\right)\\&<\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^k}=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

在此式中固定 n, 令 $m\to\infty$, 得到

$$\mathrm{e}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1},$$

于是

$$n!\mathrm{e}-\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!}\leqslant\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由本题 (1), 这就是

$$n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}] \leqslant \frac{n+2}{(n+1)^2} \quad (n>\mathrm{e}-1).$$

又由本题 (1) 推出

$$n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}] = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} > \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad (n>\mathrm{e}-1).$$

因此最终得到

$$\frac{n}{n+1} < n(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}]) \leqslant \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad (n>\mathrm{e}-1).$$

令 $n\to\infty$ 即得 $n(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}])\to 1$. □

注　1° 由本题 (1) 的解法只能得到较粗的估计:

$$\frac{n}{n+1} < n(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}]) \leqslant \frac{\mathrm{e}n}{n+1},$$

不足以推出本题 (2) 中的结论.

2° 因为本题 (2) 中的极限存在且不等于 0, 所以 $n(n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}])$ 有界, 于是直接得到 $n!\mathrm{e}-[n!\mathrm{e}] = O(1/n)\to 0\,(n\to\infty)$.

例 1.2.4　令

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n^2} \quad (n\geqslant 1),$$

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解　令

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\frac{k}{n} \quad (n\geqslant 1),$$

则

$$v_n-u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\sin\frac{k}{n^2}\right)\sin\frac{k}{n}.$$

因为当 $x>0$ 时 $x-x^3/3!<\sin x$(见例 8.2.1), 所以当 $k\leqslant n$ 时,

$$0<\frac{k}{n^2}-\sin\frac{k}{n^2}<\frac{1}{6}\cdot\frac{k^3}{n^6}\leqslant\frac{1}{6n^3},$$

从而

$$0\leqslant |u_n-v_n| < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\sin\frac{k}{n}\right) < n\cdot\frac{1}{6n^3} = \frac{1}{6n^2},$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. 而由 Riemann 积分的定义得

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x = (-x\cos x+\sin x)\Big|_0^1 = \sin 1-\cos 1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sin 1-\cos 1$. □

例 1.2.5　若 $a_n\,(n\geqslant 1)$ 是一个非负数列, 满足

$$a_{m+n}\leqslant a_m+a_n+C \quad (当所有\ m,n\geqslant 1),$$

其中 $C \geqslant 0$ 是一个常数, 则数列 a_n/n 收敛.

解 由题设条件可知, 对任何正整数 $n>1$ 有

$$a_n = a_{(n-1)+1} \leqslant a_{n-1} + a_1 + C \leqslant \cdots < n(a_1 + C),$$

所以数列 a_n/n 有界, 从而 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n/n$ 有限.

对于任何给定的正整数 k, 可将 n 表示为 $n = qk + r$, 其中 q, k 是整数, 而且 $q \geqslant 0, 0 \leqslant r < k$. 由题设条件可得

$$\begin{aligned} a_n &= a_{qk+r} \leqslant a_{qk} + a_r + C \leqslant (a_{(q-1)k} + a_k + C) + a_r + C \\ &\leqslant \big((a_{(q-2)k} + a_k + C) + a_k + C\big) + a_r + C \leqslant \cdots \leqslant q(a_k + C) + a_r \end{aligned}$$

(上式中当 $r=0$ 时 a_r 理解为 0). 于是

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{q(a_k + C)}{qk + r} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{a_k + C}{k} + \frac{a_r}{n}.$$

令 $n \to \infty$, 注意 $a_r \in \{0, a_1, \cdots, a_{k-1}\}$ 有界, 我们得到

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_k + C}{k}.$$

此式对任何正整数 k 都成立, 所以

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}.$$

此外, 依上、下极限的性质, 反向不等式也成立, 所以数列 a_n/n 收敛. □

1.3 Stolz 定理的应用

Stolz 定理是指: 若数列 y_n(从某个下标开始) 严格单调递增趋于无穷, 数列 x_n 满足条件:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \alpha \quad (\text{有限或 } \pm\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \alpha.$$

这个定理的证明可见: 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程: 第一卷 [M].8 版. 北京: 高等教育出版社,2006:50.

例 1.3.1 设 s 是正整数, 计算

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \left(s! + \frac{(s+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(s+n)!}{n!} \right).$$

解　在 Stolz 定理中令

$$x_n = s! + \frac{(s+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(s+n)!}{n!}, \quad y_n = n^{s+1}.$$

那么 $y_n \uparrow \infty$, 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)}{n^{s+1} - (n-1)^{s+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{s}{n}\right)}{n\left(1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{s+1}\right)}.$$

反向应用几何级数求和公式可知 $n\Big(1-(1-1/n)^{s+1}\Big) = 1+(1-1/n)+\cdots+(1-1/n)^s$; 或者: 由二项式展开得

$$\begin{aligned} n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{s+1}\right) &= n\left(1-1+\binom{s+1}{1}\frac{1}{n} - \binom{s+1}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots - (-1)^{s+1}\frac{1}{n^{s+1}}\right) \\ &= \binom{s+1}{1} - \binom{s+1}{2}\frac{1}{n} + \cdots - (-1)^{s+1}\frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{s+1},$$

从而所求极限等于 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n/y_n) = 1/(s+1)$. □

例 1.3.2　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 其中 $a \leqslant +\infty$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} = a$, 其中实数 $\lambda_k > 0, \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n \to \infty\,(n\to\infty)$.

解　(1) 在 Stolz 定理中令 $x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n, y_n = n$(读者补出细节).

(2) 解法 1　在 Stolz 定理中令 $x_n = a_1+2a_2+\cdots+na_n, y_n = n^2$ (读者补出细节).

解法 2　如果用 $b_n\,(n\geqslant 1)$ 表示下列无穷数列:

$$a_1, \underbrace{a_2, a_2}_{2\text{ 次}}, \underbrace{a_3, a_3, a_3}_{3\text{ 次}}, \cdots, \underbrace{a_k, \cdots, a_k}_{k\text{ 次}}, \cdots,$$

那么 $b_n \to a\,(n\to\infty)$, 于是依本题 (1) 可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} = a.$$

我们取无穷数列

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \quad (n\geqslant 1)$$

的下列无穷子列

$$\frac{\sigma_1}{l_1}, \frac{\sigma_2}{l_2}, \cdots, \frac{\sigma_k}{l_k}, \cdots,$$

其中

$$\sigma_k = a_1 + \underbrace{a_2 + a_2}_{2\text{ 次}} + \cdots + \underbrace{a_k + a_k + \cdots + a_k}_{k\text{ 次}},$$

$$l_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

那么 $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k/l_k = a$. 于是由上式推出

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + ka_k}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sigma_k}{l_k} \cdot \frac{l_k}{k^2} = \frac{a}{2}.$$

(3) 在 Stolz 定理中令 $x_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n, y_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$(读者补出细节). □

注 本题 (1) 中的结果有时称为"算术平均值数列收敛定理", 是一个有用的结果. 当然, 不难给出它的直接证明 (不应用 Stolz 定理, 而是用 $\varepsilon - N$ 方法, 并且要区分 $a < \infty$ 和 $a = \infty$ 两种情形). 本题 (3) 中的结果考虑了加权平均. 当然, 题 (1)(2) 中的两个结果也是题 (3) 的显然推论(分别取所有 $\lambda_n = 1$ 及 $\lambda_n = n(n \geqslant 1)$).

1.4 $\varepsilon - N$ 方法

例 1.4.1 若数列 $a_n (n \geqslant 1)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a,$$

则当 $a > 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ 或 $-\infty$; 当 $|a| < 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解 设 $\varepsilon > 0$ 任意给定. 那么存在 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时,

$$a - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon.$$

(i) 设 $a > 1$, 则取 ε 满足 $0 < \varepsilon < (a-1)/2$, 于是 $a - \varepsilon > (a+1)/2 > 1$, 从而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a+1}{2} > 1 \quad (n > N).$$

由此可知当 $n > N$ 时所有 a_n 同号. 若 $a_n > 0 (n > N)$, 则

$$a_{2n+1} > \frac{a+1}{2} a_{2n} > \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 a_{2n-1} > \cdots > \left(\frac{a+1}{2}\right)^n a_n \to +\infty \quad (n \to \infty),$$

于是 $a_n \to +\infty$. 若 $a_n < 0 (n > N)$, 则

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > \frac{a+1}{2} \quad (n > N),$$