燎原高数®

高等数学辅导领导品牌

高等院校教材同步辅导及考研复习用书

高等数学辅导

同济·第七版

上下册合订本

主 编 张天德

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

沈阳出版社

高等数学辅导

同济·第七版

上下册合订本

主　编　张天德
副主编　张焕玲　刘永乐

沈阳出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导：同济第七版 / 张天德主编. — 沈阳：沈阳出版社，2014.12

ISBN 978-7-5441-6335-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 288264 号

出 版 者：沈阳出版社

（地址：沈阳市沈河区南翰林路 10 号　邮编：110011）

网　　址：http://www.sycbs.com

印 刷 者：莱芜市凤城印务有限公司

发 行 者：沈阳出版社

幅面尺寸：170 mm×240 mm

印　　张：36

字　　数：700 千字

出版时间：2015 年 1 月第 1 版

印刷时间：2015 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑：杨　静　海丽丽　高玉君

封面设计：燎原视觉设计中心

版式设计：燎原视觉设计中心

责任校对：何召龙

责任监印：杨　旭

书　　号：ISBN 978-7-5441-6335-4

定　　价：36.80 元

联系电话：024—24112447　024—62564911

E-mail：sy24112447@163.com

前言

高等数学是理工类专业一门重要的基础课程，也是硕士研究生入学考试的重点科目。为帮助、指导广大读者学好高等数学，我们编写了这本与同济大学数学系主编的《高等数学》(第七版)完全配套的《高等数学辅导》，以使读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，最终提高应试能力和数学思维水平。

本书章节的划分和内容设置与同济第七版教材完全一致。在每一章的开头先对本章知识进行简要的概括，然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

讲解结构五大部分

一、本章教材全解：先对每节所涉及的考研大纲进行解读，然后对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理，指出基本概念的理解和定理运用中的难点，解答学习过程中可能出现的疑难问题，并特别归纳出各类考试中经常考查的知识点。

二、典型例题解析：这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

三、本章知识总结：对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

四、本章同步自测：精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试试题)，以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

五、教材习题详解：为了方便读者对本课本所学过的知识进行复习巩固，对教材里全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

前言

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用：本书既是一本教材同步辅导书，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步学习中完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目 录

教材知识全解+教材习题详解

教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限 …… 1
第一节 映射与函数 …… 1
第二节 数列的极限 …… 4
第三节 函数的极限 …… 6
第四节 无穷小与无穷大 …… 8
第五节 极限运算法则 …… 9
第六节 极限存在准则 两个重要极限 …… 11
第七节 无穷小的比较 …… 15
第八节 函数的连续性与间断点 …… 16
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 18
第十节 闭区间上连续函数的性质 …… 19
本章整合 …… 21
第二章 导数与微分 …… 25
第一节 导数概念 …… 25
第二节 函数的求导法则 …… 29
第三节 高阶导数 …… 32
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率 …… 33
第五节 函数的微分 …… 36
本章整合 …… 38
第三章 微分中值定理与导数的应用 …… 42
第一节 微分中值定理 …… 42
第二节 洛必达法则 …… 46
第三节 泰勒公式 …… 51
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 54
第五节 函数的极值与最大值最小值 …… 58
第六节 函数图形的描绘 …… 62
第七节 曲率 …… 64
第八节 方程的近似解 …… 65
本章整合 …… 67
第四章 不定积分 …… 74
第一节 不定积分的概念与性质 …… 74
第二节 换元积分法 …… 78
第三节 分部积分法 …… 84
第四节 有理函数的积分 …… 91
第五节 积分表的使用 …… 97
本章整合 …… 98
第五章 定积分 …… 104
第一节 定积分的概念与性质 …… 104
第二节 微积分基本公式 …… 109
第三节 定积分的换元法和分部积分法 …… 111
第四节 反常积分 …… 114
*第五节 反常积分的审敛法 Γ函数 …… 117
本章整合 …… 119
第六章 定积分的应用 …… 124
第一节 定积分的元素法 …… 124
第二节 定积分在几何学上的应用 …… 125
第三节 定积分在物理学上的应用 …… 128
本章整合 …… 130
第七章 微分方程 …… 133
第一节 微分方程的基本概念 …… 133

目录

教材知识全解+教材习题详解

第二节　可分离变量的微分方程 …… 135
第三节　齐次方程 …… 138
第四节　一阶线性微分方程 …… 139
第五节　可降阶的高阶微分方程 …… 142
第六节　高阶线性微分方程 …… 144
第七节　常系数齐次线性微分方程 …… 146
第八节　常系数非齐次线性微分方程 …… 148
*第九节　欧拉方程 …… 150
*第十节　常系数线性微分方程组解法举例 …… 152
本章整合 …… 153

教材习题详解(上册)

第一章　函数与极限 …… 159
教材习题 1-1 解答 …… 159
教材习题 1-2 解答 …… 162
教材习题 1-3 解答 …… 164
教材习题 1-4 解答 …… 165
教材习题 1-5 解答 …… 167
教材习题 1-6 解答 …… 168
教材习题 1-7 解答 …… 170
教材习题 1-8 解答 …… 171
教材习题 1-9 解答 …… 173
教材习题 1-10 解答 …… 174
教材总习题一解答 …… 175
第二章　导数与微分 …… 178
教材习题 2-1 解答 …… 178
教材习题 2-2 解答 …… 181
教材习题 2-3 解答 …… 185
教材习题 2-4 解答 …… 187
教材习题 2-5 解答 …… 189
教材总习题二解答 …… 192
第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 195
教材习题 3-1 解答 …… 195
教材习题 3-2 解答 …… 197
教材习题 3-3 解答 …… 199
教材习题 3-4 解答 …… 201
教材习题 3-5 解答 …… 205
教材习题 3-6 解答 …… 210
教材习题 3-7 解答 …… 213
教材习题 3-8 解答 …… 215
教材总习题三解答 …… 216
第四章　不定积分 …… 221
教材习题 4-1 解答 …… 221
教材习题 4-2 解答 …… 223
教材习题 4-3 解答 …… 228
教材习题 4-4 解答 …… 231
教材习题 4-5 解答 …… 234
教材总习题四解答 …… 235
第五章　定积分 …… 240
教材习题 5-1 解答 …… 240
教材习题 5-2 解答 …… 244
教材习题 5-3 解答 …… 247
教材习题 5-4 解答 …… 251
教材习题 5-5 解答 …… 253
教材总习题五解答 …… 254

目录

教材知识全解+教材习题详解

第六章　定积分的应用 …… 261
教材习题 6-2 解答 …… 261
教材习题 6-3 解答 …… 268
教材总习题六解答 …… 271
第七章　微分方程 …… 274
教材习题 7-1 解答 …… 274
教材习题 7-2 解答 …… 275
教材习题 7-3 解答 …… 277
教材习题 7-4 解答 …… 280
教材习题 7-5 解答 …… 284
教材习题 7-6 解答 …… 286
教材习题 7-7 解答 …… 289
教材习题 7-8 解答 …… 291
教材习题 7-9 解答 …… 295
教材习题 7-10 解答 …… 297
教材总习题七解答 …… 301

教材知识全解(下册)

第八章　向量代数与空间解析几何 …… 307
第一节　向量及其线性运算 …… 308
第二节　数量积　向量积　*混合积 …… 310
第三节　平面及其方程 …… 314
第四节　空间直线及其方程 …… 316
第五节　曲面及其方程 …… 320
第六节　空间曲线及其方程 …… 323
本章整合 …… 324
第九章　多元函数微分法及其应用 …… 329
第一节　多元函数的基本概念 …… 329
第二节　偏导数 …… 334
第三节　全微分 …… 338
第四节　多元复合函数的求导法则 …… 341
第五节　隐函数的求导公式 …… 345
第六节　多元函数微分学的几何应用 …… 348
第七节　方向导数与梯度 …… 352
第八节　多元函数的极值及其求法 …… 354
*第九节　二元函数的泰勒公式(略 …… 357
*第十节　最小二乘法(略) …… 357
本章整合 …… 357
第十章　重积分 …… 365
第一节　二重积分的概念与性质 …… 365
第二节　二重积分的计算法 …… 367
第三节　三重积分 …… 375
第四节　重积分的应用 …… 380
*第五节　含参变量的积分 …… 384
本章整合 …… 384
第十一章　曲线积分与曲面积分 …… 393
第一节　对弧长的曲线积分 …… 393
第二节　对坐标的曲线积分 …… 396
第三节　格林公式及其应用 …… 399
第四节　对面积的曲面积分 …… 405
第五节　对坐标的曲面积分 …… 407
第六节　高斯公式　*通量与散度 …… 409
第七节　斯托克斯公式　*环流量与旋度 …… 412
本章整合 …… 414

目 录

教材知识全解+教材习题详解

第十二章　无穷级数 …………………… 425
　第一节　常数项级数的概念和性质 … 425
　第二节　常数项级数的审敛法 ……… 428
　第三节　幂级数 ……………………… 433
　第四节　函数展开成幂级数 ………… 437
　第五节　函数的幂级数展开式的应用 ……………………… 439
　第六节　函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质 ……………………… 440
　第七节　傅里叶级数 ………………… 442
　第八节　一般周期函数的傅里叶级数 ……………………… 445
　本章整合 …………………………… 446

教材习题详解(下册)

第八章　向量代数与空间解析几何 ……… 454
　教材习题 8-1 解答 ………………… 454
　教材习题 8-2 解答 ………………… 455
　教材习题 8-3 解答 ………………… 457
　教材习题 8-4 解答 ………………… 459
　教材习题 8-5 解答 ………………… 461
　教材习题 8-6 解答 ………………… 463
　教材总习题八解答 ………………… 464
第九章　多元函数微分法及其应用 ……… 468
　教材习题 9-1 解答 ………………… 468
　教材习题 9-2 解答 ………………… 470
　教材习题 9-3 解答 ………………… 471
　教材习题 9-4 解答 ………………… 473
　教材习题 9-5 解答 ………………… 476
　教材习题 9-6 解答 ………………… 479
　教材习题 9-7 解答 ………………… 482
　教材习题 9-8 解答 ………………… 484
　教材习题 9-9 解答 ………………… 487
　教材习题 9-10 解答 ………………… 488
　教材总习题九解答 ………………… 489
第十章　重积分 ………………………… 494
　教材习题 10-1 解答 ………………… 494
　教材习题 10-2 解答 ………………… 496
　教材习题 10-3 解答 ………………… 506
　教材习题 10-4 解答 ………………… 510
　教材习题 10-5 解答 ………………… 515
　教材总习题十解答 ………………… 517
第十一章　曲线积分与曲面积分 ……… 523
　教材习题 11-1 解答 ………………… 523
　教材习题 11-2 解答 ………………… 525
　教材习题 11-3 解答 ………………… 528
　教材习题 11-4 解答 ………………… 533
　教材习题 11-5 解答 ………………… 536
　教材习题 11-6 解答 ………………… 537
　教材习题 11-7 解答 ………………… 538
　教材总习题十一解答 ……………… 541
第十二章　无穷级数 …………………… 545
　教材习题 12-1 解答 ………………… 545
　教材习题 12-2 解答 ………………… 547
　教材习题 12-3 解答 ………………… 549
　教材习题 12-4 解答 ………………… 550
　教材习题 12-5 解答 ………………… 552
　教材习题 12-6 解答 ………………… 556
　教材习题 12-7 解答 ………………… 558
　教材习题 12-8 解答 ………………… 560
　教材总习题十二解答 ……………… 563

教材知识全解(上册)

第一章 函数与极限

本章内容概览

函数是高等数学讨论的主要对象,它以极限理论为基础,在研究函数时我们总是通过函数值$f(x)$的变化来看函数的性质,所以应用运动变化的观点来掌握函数,极限与函数的连续性理论是高等数学的基础,如何用已知来逼近未知,用有限来逼近无限,在无限变化的过程中考查变量的变化趋势,从有限过渡到无限,这是本章需掌握的基本思想.

本章知识图解

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数的概念与分类
      - 分段函数、隐函数、初等函数、反函数、复合函数
    - 函数的性质
      - 有界性、单调性、奇偶性、周期性
  - 极限
    - 极限的定义
      - 极限概念及“ε-N”、“ε-δ”表述
    - 极限的性质
      - 数列极限的唯一性、有界性、保号性,收敛数列与其子数列间的关系
      - 函数极限的唯一性、局部有界性、局部保号性,函数极限与数列极限的关系
    - 极限的计算方法
      - 四则运算法则、幂指函数运算
      - 夹逼准则、单调有界准则
      - 洛必达法则、泰勒公式(第三章介绍)
      - 两个重要极限、等价无穷小因子替换
    - 无穷小
      - 无穷小与无穷大的定义及之间的关系
      - 无穷小的性质及运算、无穷小与极限的关系
      - 无穷小阶的比较与确定
  - 连续
    - 连续的定义
      - 初等函数、分段函数、反函数与复合函数的连续性的判定
    - 连续函数的性质
      - 闭区间上连续函数的有界性与最大值最小值定理、零点定理与介值定理、一致连续性
    - 间断点的分类
      - 第一类间断点:左右极限皆存在(包括:可去间断点和跳跃间断点)
      - 第二类间断点:左、右极限至少有一个不存在

第一节 映射与函数

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

重点及常考点突破

1. 函数奇偶性的运算：两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个偶函数的和、差、积、商(除数不为0)仍是偶函数；两个奇函数的积或商(除数不为0)为偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商(除数不为0)为奇函数.

2. 复合函数可由两个或多个函数相继进行有限次复合而成. 但是并不是任意两个函数都可以进行复合. 设外层函数 $y=f(u), u\in D$，内层函数 $u=g(x), x\in E$ 仅当外层函数的定义域与内层函数的值域相交时，即 $E^{*}=\{x\,|\,g(x)\in D, x\in E\}\neq\varnothing$ 时，两个函数才能复合. 例如，$y=\sqrt{u^2-2}$，$u=\sin x$ 就不能复合成 $y=\sqrt{\sin^2 x-2}$.

3. 函数有反函数的充要条件为函数是一一对应的. 严格单调函数必有反函数，且严格递增(减)函数的反函数也必严格递增(减). 反之，有反函数的函数未必一定是严格单调函数，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 表示同一条曲线，若用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f^{-1}(x)$ 及 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，$f^{-1}(x)$ 的定义域即为 $f(x)$ 的值域.

4. 分段函数是特别要注意的一类函数，它用几个不同解析式"分段"表示一个函数. 所有解析式对应的自变量集合的并集是该函数的定义域. 定义域的各段最多只能在端点处重合，重合时对应的函数值应该相等. 图像分段的函数不一定是分段函数，分段函数的图像也可以是一条不断开的曲线(或曲面).

5. 本节的难点是复合函数，重点是复合函数及分段函数. 考研中常出现的题型是求复合函数，特别是求分段函数的复合函数，方法主要有3种：代入法、分析法和图示法.

典型例题解析

基本题型Ⅰ：求函数定义域

【例1】 若函数 f 和 g 满足 $f(x)=e^x+4$，$f[g(x)]=x^2$，求函数 $g(x)$ 的定义域. (考研题)

解：由题设条件知：$f[g(x)]=e^{g(x)}+4$，又因为 $f[g(x)]=x^2$，所以有 $e^{g(x)}+4=x^2$，即 $g(x)=\ln(x^2-4)$，因而 $x^2-4>0$，即 $x<-2$ 或 $x>2$. 故 $g(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

方法点击：求初等函数的定义域有下列原则：

(1) 分母不能为零.　　(2) 偶次根式的被开方数不能为负数.

(3) 对数的真数不能为零或负数.　　(4) $\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$.

(5) $\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$.　　(6) $\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

求复合函数的定义域，通常将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考查每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可以得到复合函数的定义域.

【例2】 求函数 $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ 的定义域.

解：由对数定义知：$\dfrac{5x-x^2}{4}>0$，即 $0<x<5$. 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时，函数有定义. 即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，可知 $1\leqslant x\leqslant 4$. 故函数定义域为：$1\leqslant x\leqslant 4$.

基本题型Ⅱ：求初等函数的表达式

【例3】 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求 $f(x)$.

解：因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}=\dfrac{1}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2}$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$.

基本题型Ⅲ:求分段函数的表达式

【例 4】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=(\quad)$.(考研题)

(A) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0,\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2+x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ (C) $\begin{cases}2-x^2, x<0,\\ 2-x, x\geqslant 0,\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0.\end{cases}$

解: $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, x\geqslant 0,\\ x^2+2, x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, x<0,\\ 2+x, x\geqslant 0.\end{cases}$

故应选(D).

> **方法点击:** 本题考查将两个分段函数复合成一个复合函数的过程.先将 $g[f(x)]$ 表示为 $f(x)$ 的函数,再解不等式 $f(x)\leqslant 0$ 与 $f(x)>0$,最后将 $g[f(x)]$ 表示为 x 的函数.

【小结】 复合函数的求解方法主要有三种:

① 代入法:将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代替,适用于初等函数的复合.

② 分析法:抓住最外层函数定义域的各区间段,结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析,适用于初等函数与分段函数的复合或两分段函数的复合.

③ 图示法:ⅰ.画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图像;ⅱ.将 $y=f(u)$ 的分界点在 xu 坐标平面上画出;ⅲ.写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间;ⅳ.将 ⅲ 所得的结果代入 $y=f(u)$ 中,便得到复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应的变化区间.此方法适用于两分段函数的复合.

基本题型Ⅳ:求反函数

【例 5】 函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为________.

解: 令 $t=\sqrt{1-x}$,则 $y=\dfrac{1+t}{1-t}$,所以 $t=\dfrac{y-1}{y+1}$,即 $\sqrt{1-x}=\dfrac{y-1}{y+1}$,从而 $x=1-\left(\dfrac{y-1}{y+1}\right)^2=\dfrac{4y}{(y+1)^2}$,因此反函数为 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.故应填 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

> **方法点击:** 反函数求解方法比较固定,即由 $y=f(x)$ 解出 x 的表达式,然后交换 x 与 y 的位置,即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$.对于分段函数要注意所求函数表达式的区间.

基本题型Ⅴ:把复合函数分解为基本初等函数的复合

【例 6】 函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 由哪些基本初等函数复合而成?

解: 函数 $y=\ln\cos(e^x)$ 可由基本初等函数:$u=e^x$,$v=\cos u$,$y=\ln v$ 三个函数复合而成.

> **方法点击:** 牢记基本初等函数的表达式是解决此类问题的基础,而由里到外,逐级分解是解决问题的关键.做题时不能跨越某个级别,漏掉某个基本初等函数,要分清复合函数的成分和结构.

基本题型Ⅵ:函数单调性的问题

【例 7】 判断函数 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的单调性.

解: 对任意 $x_1,x_2\in(0,\pi)$,$x_1<x_2$,因为 $\cos x_2-\cos x_1=-2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}$,由于 $x_1<x_2$,

故有 $0<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\pi$,$0<\dfrac{x_2-x_1}{2}<\pi$,所以 $\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}>0$,$\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}>0$,从而 $\cos x_2-\cos x_1<0$,即 $y=\cos x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减.

方法点击:证明函数单调性的主要方法有:

(1) 利用函数单调性定义.

(2) 利用导数证明(例题见后续章节).

基本题型 Ⅶ:函数奇偶性问题

【例 8】 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且对 $\forall x$、y 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,且 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

【思路探索】 判断函数的奇偶性关键要考查 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 的关系,因此紧盯住这一目标,对条件进行变形是解决问题的入手点.

证明:由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,用 $-y$ 代 y 得 $f(x-y)+f(x+y)=2f(x)f(-y)$,得 $2f(x)f(y)=2f(x)f(-y)$,又因为 $f(x)\neq 0$,故 $f(y)=f(-y)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.

方法点击:判断函数奇偶性通常采用的方法有:

① 先判断定义域关于原点是否对称再从定义出发,或者利用运算性质(奇函数的代数和为奇函数等等).

② 证明 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $f(-x)-f(x)=0$.

基本题型 Ⅷ:函数周期性问题

【例 9】 设 $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b$ 均对称 $(a<b)$,求证:$y=f(x)$ 是周期函数并求其周期.

证明:由题意 $y=f(x)$ 的图形关于 $x=a$, $x=b$ 对称知对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\begin{aligned} f(x+2b-2a) &= f(b+x+b-2a)=f(b-(x+b-2a)) \\ &= f(a+a-x)=f(a-(a-x))=f(x). \end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 是周期函数,$2b-2a$ 是它的一个周期.

方法点击:判定函数为周期函数的主要方法:

(1) 从定义出发,找到 $T\neq 0$,使得 $f(x+T)=f(x)$.

(2) 利用周期函数的运算性质证明.

第二节 数列的极限

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解数列极限的概念,并用其证明简单极限问题.
2. 了解数列极限的性质.

重点及常考点突破

1. 正确理解数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义.

① $\varepsilon>0$ 的任意给定性:ε 是任意给定的正数,它是任意的,但一经给出,又可视为固定的,以便依 ε 来求 N. 由于 $\varepsilon>0$ 的任意性,所以定义中的不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 可改为 $|x_n-a|<k\varepsilon$ ($k>0$ 为常数),也可改为 $|x_n-a|<\varepsilon^2$, $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{M}$ (M 是任意正整数), $|x_n-a|\leqslant\varepsilon$ 等等,其含义与 $|x_n-a|<\varepsilon$ 等价.

② N 的相应存在性:N 依赖于 ε,通常记作 $N=N(\varepsilon)$,但 N 并不是唯一的,$N(\varepsilon)$ 是强调其依赖

性的一个符号，并不是单值函数关系，这里，N 的存在性是重要的，一般不计较其大小，甚至也不必是自然数，只要是正数就可以. 所以，定义中的 $n > N$ 可改为 $n \geqslant N$ 或 $n > A(A \in \mathbf{R}^+)$.

③ 定义中"当 $n > N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$"是指下标 $n > N$ 的无穷多项 x_n 都进入数 a 的 ε 邻域：$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$，即在 a 的 ε 邻域外最多只有 $\{x_n\}$ 的有限项. 由此可知：改变或增减数列 $\{x_n\}$ 的有限项，并不影响数列 $\{x_n\}$ 的收敛性.

2. 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 是本节的难点.

用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的关键在于给了 ε，求对应的 $N = N(\varepsilon)$，这往往通过解不等式实现，有时 N 可直接解出，有时要利用一些技巧将不等式放缩. 读者熟练掌握解证不等式的技巧是攻克这一难点的关键.

3. 数列 $\{x_n\}$ 若收敛，则它必为有界数列，反之有界数列未必收敛，例如 $\{\sin n\}$ 是有界数列，但 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在.

4. 数列 $\{x_n\}$ 收敛的**充要条件**是 $\{x_n\}$ 的任一子列都收敛，且有相同的极限.（这个定理主要用于证明不收敛）

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：用极限定义证明数列的极限

【例 1】 "对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| < 2\varepsilon$"是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的(　　).（*考研题*）

(A) 充分条件但非必要条件　　(B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

解： 由数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义得"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$". 显然可推导出"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| < 2\varepsilon$". 反过来，若有"对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$"，则对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$（不妨设 $0 < \varepsilon_1 < 1$，当 $\varepsilon_1 > 1$ 时，取 $\bar{\varepsilon}_1$，$0 < \bar{\varepsilon}_1 < 1 < \varepsilon_1$，代替即可），取 $\varepsilon = \dfrac{1}{3}\varepsilon_1 > 0$，存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon = \dfrac{2}{3}\varepsilon_1 < \varepsilon_1$，令 $N_1 = N - 1$，则满足"对任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$".

可见上述两种说法是等价的. 故应选(C).

> **方法点击：** 数列极限定义中有"任意小"和"无限大"两个术语，二者均不是确定的值，至于它们用什么符号表示并不重要，应注意 2ε 同样是一个无穷小量.

【例 2】 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = 0$.

证明： $\forall \varepsilon > 0$，要使 $\left|\dfrac{1}{n^2-1} - 0\right| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n-1} < \varepsilon\ (n \geqslant 3)$，即只需 $n > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N = 1 + \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，

当 $n > N$ 时有 $\left|\dfrac{1}{n^2-1}\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = 0$.

【错解分析】 有的人用以下方法作：$\forall \varepsilon > 0$，要证 $\left|\dfrac{1}{n^2-1} - 0\right| < \varepsilon$ 只需 $\left|\dfrac{1}{n-1}\right| < (n+1)\varepsilon$，取 $N = 1 + [(n+1)\varepsilon]$，则当 $n > N$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{n^2-1} - 0\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2-1} = 0$.

以上解法是错误的，因为数列极限定义中的 N 只与 ε 有关，它不依赖于 n，因此选取的 N 是错误的；另外，对于给定的小正数 ε，与 ε 对应的 N 不唯一.

【例 3】 用 $\varepsilon - N$ 方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明: $\forall\varepsilon>0$,要证 $\left|\dfrac{n!}{n^n}\right|=\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}<\varepsilon$,实际上只需 $\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}<\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{n^{n-1}}{n^{n-1}}=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$,取 $N=[\dfrac{1}{\varepsilon}]+1$,则当 $n>N$ 时,有 $\left|\dfrac{n!}{n^n}\right|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

方法点击: 在 $\varepsilon - N$ 定义中,并不一定要找到一个最小的 N,经常先将 $|x_n - A|$ 适当放大后再小于 ε,以方便寻找 N.

基本题型 Ⅱ:证明数列发散

【例 4】 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$,证明数列 $\{a_n\}$ 发散.

【思路探索】 若数列 $\{a_n\}$ 有极限,则由极限性质知道极限应是唯一的,要证明 $\{a_n\}$ 没有极限,只要找到两个子数列分别收敛到不同的值即可.

证明: 设 k 为整数,若 $n=4k$,则 $a_{4k}=\left(1+\dfrac{1}{4k}\right)\sin\dfrac{4k\pi}{2}=\left(1+\dfrac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0$. 若 $n=4k+1$,则

$$a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{4k+1}\to 1(k\to\infty),$$

因此 $\{a_n\}$ 发散.

方法点击: 在证明数列发散时,可采用下列两种方法:

(1) 找两个极限不相等的子数列.

(2) 找一个发散的子数列.

第三节 函数的极限

教材知识全解

考研大纲要求解读

1. 理解函数极限的概念,并用其证明简单极限问题.
2. 了解函数极限的性质.

重点及常考点突破

1. 正确理解函数极限的定义并用其证明简单极限问题是本节的重点与难点.

若把数列 $\{a_n\}$ 理解为自变量仅取自然数 n 的函数,即 $a_n=f(n)$,则数列极限就是一类特殊的函数极限.

2. 由函数极限的定义可直接得到下列两个结论:

① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$;

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

这两个结论可用来证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,还可用来证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

3. 函数极限的许多重要性质与数列极限的相应性质类似,可对照学习,加深理解.

① 极限若存在,则必唯一,这为用各种方法求极限提供了依据.

② 有极限的函数是局部有界的,而收敛数列的有界性是整体性的. 即若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在,则对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 都有 $|a_n|\leqslant M$(M 是与 n 无关的正常数且 $M=\max\{M_1,M_2\}$,其中 $\forall n>N$ 有 $|a_n|\leqslant M_1$,而 M_2

$=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|\}$). 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 若存在,则只能推得函数在 x_0 的某邻域有界,即 $\exists U_0(x_0,\delta)$,当 $x\in U_0(x_0,\delta)$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$,这是函数极限与数列极限的一个不同之处,要特别重视.

4. 极限不存在的几个典型例子.

① 趋于 ∞:$\lim\limits_{n\to\infty} n^2$,$\lim\limits_{x\to\infty} x$,$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 等.

② 左右极限不相等:

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x(a>1)$($\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$,$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$),

$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}\right)$等.

③ 振荡:$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$,$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$,$\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$ 等.

典型例题解析

基本题型 Ⅰ:用定义证明函数极限

【例 1】 利用极限定义证明:$\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

【证明】 对 $\forall\varepsilon>0$,由 $|5x+2-12|=5|x-2|<\varepsilon$ 得 $|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$,故取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$,则 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-2|<\delta$ 时,有 $|5x+2-12|<\varepsilon$ 成立,即 $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$.

方法点击:用定义证明函数极限存在的步骤:

(1) 对于任给的 $\varepsilon>0$,由不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,经一系列适当放大可得:$|f(x)-A|<\cdots<c|x-x_0|<\varepsilon$($c$ 为常数)(或 $|f(x)-A|<\cdots<cM(x)$(c 为常数)).

(2) 解不等式 $c|x-x_0|<\varepsilon$(或 $cM(x)<\varepsilon$),得 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{c}$(或 $|x|<N(x)$).

(3) 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{c}$(或取正数 $X=N(x)$),则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时(或当 $|x|>N(x)$ 时),总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$).

解题的关键在于对 $\forall\varepsilon>0$,找到 $\delta>0$,常用到不等式放大的方法.

【例 2】 在求函数极限时,何时要考虑单侧极限?

解:在求函数极限的过程中,以下几种情形通常都需考虑单侧极限.

(1) 分段函数在分界点处;

(2) 含有绝对值的函数;

(3) 取整函数;

(4) 一些函数在特殊点处或无穷远处,如 $\cot x$ 在 $x=0$ 处;$\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处;$a^x(a>0,a\neq 1)$,e^x,$\arctan x$,$\operatorname{arccot} x$ 当 $x\to\infty$ 时,应特别注意事实:$\lim\limits_{x\to 0^+} a^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^-} a^{\frac{1}{x}}=0(a>1)$.

例如,若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

事实上,$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}{1+\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x}}}}=1$,

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{3^{\frac{1}{x}}-1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=\lim_{x\to0^-}\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

基本题型 Ⅱ：证明函数极限不存在

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 当\ |x|\leqslant1,\\ x-2, & 当\ |x|>1.\end{cases}$ 试讨论 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$.

【思路探索】 本题中函数是分段表达的，因此要讨论 $x\to1$ 时 $f(x)$ 的极限值必须从左、右极限入手.

解：① 由题目条件知：$f(x)=\begin{cases}x-2, & 当\ x<-1,\\ x, & 当\ -1\leqslant x\leqslant1,\\ x-2, & 当\ x>1.\end{cases}$

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-2)=-1$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1$. 所以 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在.

② 因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(x-2)=-3$，所以 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 不存在.

【例 4】 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.（类比 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin n$.）

证明：设 $f(x)=x\sin x$，取 $x_n=n\pi$ 及 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，显然 $n\to\infty$ 时有 $x_n\to+\infty$，$y_n\to+\infty$，但是

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}n\pi\cdot\sin n\pi=0,\ \lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=+\infty,$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin x$ 不存在.

方法点击：证明极限不存在常用的办法就是从证明左、右极限入手. 或者说明一个极限不存在，或者说明二者存在不相等. 为了简化过程，这时通常取特殊子列进行求解.

第四节 无穷小与无穷大

教材知识全解

考研大纲要求解读

理解无穷小与无穷大的概念，并会判断无穷小与无穷大.

重点及常考点突破

1. 无穷小是一个变量，“0”是唯一的无穷小常数，任何一个绝对值很小很小的数都不能作为无穷小. 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小，无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小.

2. 无穷大必为无界，而无界未必是无穷大.

3. 无穷大和无穷小的关系. 在同一自变量的变化过程中：① 如 $f(x)$ 为无穷大，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小. ② 如 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq0$，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：按定义判定无穷小和无穷大

【例 1】 指出下列哪些是无穷小量，哪些是无穷大量.

(1) $\frac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时；　　(2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}$，当 $x\to0$ 时；