中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座2013

席南华　主编

科学出版社

华罗庚-吴文俊数学出版基金资助项目
中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座 2013

席南华　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

中国科学院数学研究所一批中青年学者发起组织了数学所讲座，介绍现代数学的重要内容及其思想、方法，旨在开阔视野，增进交流，提高数学修养. 本书根据 2013 年 8 个讲座的讲稿整理而成，内容涉及微分方程和随机微分方程、变分原理、代数曲线的模空间、复动力系统、卡-丘空间的几何、Leech 格及相关的数学、宇宙学中的基本常数、等参函数和怪球面等.

本书可供数学专业的高年级本科生、研究生、教师和科研人员阅读参考，也可作为数学爱好者提高数学修养的学习读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学所讲座 2013/席南华主编. —北京：科学出版社，2014.10

ISBN 978-7-03-042152-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①席… Ⅲ. ①数学-普及读物 Ⅳ. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 237631 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：张怡君
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：10 1/4
字数：193 000

定价：48.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

学术交流对促进研究工作、培养人才有着十分重要的作用, 尤其对以学者个人思维为主要研究方式的数学研究, 作用更显突出. 国际上, 学术水平很高、人才辈出的研究机构与大学, 也总是学术交流活动 (Seminar, Colloquium, Workshop) 十分活跃的地方.

国内现代科学的发展已有百年历史, 学术交流也伴随着产生和发展. 近三十多年改革开放的进程, 大大加速了学术交流与科学的发展. 从数学学科来说, 许多研究机构与大学涉及专门领域的讲座或专题讨论班(Seminar) 一般进行得比较好, 对参加者尤其是青年学者帮助较大, 从而参加者的积极性也比较高. 然而综合性的讨论班 (Colloquium) 情况就有显著的不同, 听众常常感到完全听不懂, 没有什么收获, 不感兴趣. 综合讨论班进行得不理想, 原因可能是多方面的, 例如, 从大学到研究生阶段, 基础就打得比较专门与单一; 研究工作长期局限于自己的专业领域, 对其他方面缺少了解与兴趣; 演讲人讲得过于专业, 没有深入浅出的本领; 听讲人有实用主义的观点, 如果演讲内容与自己的研究工作没有联系, 报告对自己没有直接帮助, 就对演讲不感兴趣, 如此等等. 长期下去, 我们仅仅熟悉自己的研究领域, 对数学的全貌与日新月异的发展缺乏了解. 不同的领域之间, 相当隔膜, 甚至缺乏共同的语言.

这些情况, 与出高质量的研究成果和高水平人才的目标是难以符合的, 也难以形成国际上有吸引力与影响力的数学研究中心. 为此, 中国科学院数学研究所席南华院士与一批出色的中青年学者发起, 组织了数学所讲座, 正是一种适合我国当前情况的综合讨论班. 进行了近两年, 效果是很好的. 演讲人虽然都是各领域的专家, 却做了认真与精心的准备, 将该领域的主要思想、成果、方法, 用深入浅出、通俗易懂的方式介绍给大家. 听众从白发苍苍的老教授到许多中青年学者以及广大的博士后、研究生, 都十分踊跃参加, 普遍感到开拓了视野, 增进了交流, 使学术气氛更为浓郁.

现在, 演讲的学者花费了许多时间与精力, 将演讲正式整理成文, 由科学出版社出版, 这是对我国数学发展很有意义的工作. 认真阅读这些文章, 将使我们对数学的有关领域有扼要的了解, 对数学里的 “真” 与 “美” 有更多的感悟, 提高数学修养, 促进数学研究与人才培养工作.

杨　乐

2011 年 12 月 10 日

前　言

“数学所讲座” 始于 2010 年, 宗旨是介绍现代数学的重要内容及其思想、方法和影响, 扩展科研人员和研究生的视野, 提高数学修养, 加强相互交流, 增强学术气氛. 那一年的 8 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2010》, 杨乐先生作序, 于 2012 年由科学出版社出版发行. 2011 年和 2012 年数学所讲座的 16 个报告整理成文后集成《数学所讲座 2011—2012》, 于 2014 年由科学出版社出版发行. 两本文集均受到业内人士的欢迎. 这对报告人和编者都是很大的鼓励.

本书的文章系根据 2013 年数学所讲座的 8 个报告整理而成, 按报告的时间顺序编排. 如同前两本文集, 在整理过程中力求文章流畅易读, 平易近人, 取舍得当. 文章要求数学上准确, 但对严格性的追求适度, 不以牺牲易读性和流畅性为代价.

文章的选题, 也就是报告的主题, 有微分方程和随机微分方程、变分原理、代数曲线的模空间、复动力系统、卡 - 丘空间的几何、Leech 格及相关的数学、宇宙学中的基本常数、等参函数和怪球面等. 内容的选取反映了作者对数学和相关学科的认识和偏好, 但有一点是共同的, 它们都在主流中, 有其深刻性. 希望这些文章能对读者认识现代数学科学有所助益.

编　者

2014 年 9 月

目　　录

1 微分方程和随机微分方程

吉 敏

我的主要研究方向是偏微分方程, 重点研究与几何有关的方程. 最近几年的关注点是著名的 Forkker-Planck 方程. 这是一个抛物型方程, 有着深刻的物理背景, 和随机微分方程密切相关, 事实上它即来源于随机微分方程. 于是产生了今天的题目: 微分方程和随机微分方程.

1.1 动机, 直观

所谓随机, 即指偶然性、不确定性. 在我们的生活中, 随机现象无时无处不在. 比如: 我们周围的噪声、股市的行情、股票的价格等等, 都受各种偶然的、不确定因素的影响. 其实, 自然界中的一切现象都具有随机的特点. 就说现在正在进行的讲座, 虽然我事先准备了演示文稿 (PPT), 准备了演讲的言词, 但事实上这会儿讲出来的言词一定和准备的不一样, 一定带着不确定性和偶然性. 尽管如此, 尽管事物充满不确定性, 我们还是很希望了解, 在这些不确定背后是否有某种确定性? 是否有某种稳定的性质、某种规律?

简言之, 我们的问题是: 随机现象的背后有无规律可循? 如果有, 在数学上应该如何描述? 考虑微分方程

$$\dot{x} = V(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

其中 Ω 是欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, $V : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是连续向量场. 这是一个确定型方程, 人们用它刻画这样的物理现象: 某物体以速度 V 运动. 作为物体的运动轨迹, 其解 $x(t)$, $t \geqslant 0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的**光滑**曲线.

然而, 实际情况并非如此. 在许多应用中, 人们从实验所观测到的运动轨迹, 却远不像上述确定性方程所描述的那样是一个光滑曲线, 它实际上是**不光滑**的. 这是因为现实世界中难免有各种随机因素, 例如噪声等因素的干扰. 因此, 为了更准确地描述客观世界, 有必要修改上述确定性方程, 把随机因素的影响考虑进去.

在上述方程的右端加上 “白噪声” 项, 即得如下随机微分方程 (stochastic differential equation):

$$\mathrm{d}X(t) = V(X(t))\mathrm{d}t + G(X(t))\xi(t), \quad t > 0,$$

其中系数 $G(X(t))$ 是 $n \times m$ 矩阵, $\xi(\cdot)$ 表示 m 维的 "白噪声". 所谓 "白", 是指各向同性的意思, 也就是说每个方向的噪声干扰是相同的. 这里我们用大写的 X 强调其解是一个随机过程, 而不是 t 的光滑函数. 那么, 对这个方程自然有下列问题:

- 在数学上如何严格定义 "白噪声" $\xi(\cdot)$?
- 作为一个随机过程, "$X(\cdot)$ 是随机微分方程的解" 是什么意思?
- 证明方程有解存在, 并讨论解的唯一性、渐近性和对初值、向量场 V, 以及系数矩阵 G 的依赖性质.

在数学上严格描述之前, 我们先做一些试探, 作一些直观上的了解.

(1) 首先看特殊的情况: $X(0) = 0$, $m = n$, $V \equiv 0$ 以及 $G \equiv I$(单位矩阵). 在这最简单的情形, 方程的解应该是 n 维的 Brown 运动, 或 Wiener 过程, 记为 $W(\cdot)$. 于是

$$\mathrm{d}W(t) = \xi(t), \quad t > 0.$$

由此我们看到, 所谓**"白噪声"**, 即为 **Brown 运动对时间的 "导数"**. Brown 运动是最典型的人们最早了解的随机现象, 稍后我会做较详细的介绍. 早在 1905 年爱因斯坦即对 Brown 现象进行理论研究, 从而大大推动了统计物理学的发展.

(2) 其次, 上面说 "Brown 运动对时间的导数", 其中 "导数" 其实只是一个形式上的记号. 因为 Brown 运动, 作为随机过程是不可微的, 通常意义下的微分对它没有意义. 因此我们就有必要说明这个导数是什么含义, 也就是要建立**随机微积分**, 即**Itô(伊藤) 微积分**. 所以随机微分方程里出现的微积分, 意指 Itô 微积分.

(3) Itô 微积分可以对一大类随机过程 (通常意义下不一定可微的函数) 进行微分, 与通常的微积分相比, 其最大的不同点就是

通常的连锁法则不成立!

这是什么含义呢? 我们先看一维的情况. 设 u 是一光滑函数, $X(\cdot)$ 是随机微分方程的解, 问复合函数 $Y(t) := u(X(t))$ 适合什么方程呢? 如果通常的连锁法则成立, 就应该有

$$\mathrm{d}Y = u'\mathrm{d}X = u'(V\mathrm{d}t + G\mathrm{d}W).$$

但是, 这是错误的! 注意: $W(\cdot)$ 是不可微的. 而事实上, 在某种意义上有

$$\mathrm{d}W(t) \approx (\mathrm{d}t)^{1/2}.$$

由此, 如果我们计算 $\mathrm{d}Y$ 并保留所有界为 $\mathrm{d}t$ 和 $(\mathrm{d}t)^{1/2}$ 的项, 即得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y &= u'\mathrm{d}X + \frac{1}{2}u''(\mathrm{d}X)^2 + \cdots \\ &= u'(V\mathrm{d}t + G\mathrm{d}W) + \frac{1}{2}u''(V\mathrm{d}t + G\mathrm{d}W)^2 + \cdots \\ &= \left(u'V + \frac{1}{2}G^2u''\right)\mathrm{d}t + u'G\mathrm{d}W + \cdots .\end{aligned}$$

这里我们用到 $(\mathrm{d}W)^2 = \mathrm{d}t$, 从而得到 $Y(t)$ 适合的方程:

$$\mathrm{d}Y = \left(u'V + \frac{1}{2}G^2u''\right)\mathrm{d}t + u'G\mathrm{d}W.$$

这就是一维情形随机微分的连锁法则, 不仅与 u 的一阶导数有关, 还和二阶导数有关. 当然, 如果噪声系数 $G=0$, 就和通常的连锁法则一样了. 在高维的情形, 连锁法则的形式会更复杂一些.

上面我们对随机微分方程及随机微积分有了一些直观的了解. 那么数学上如何严格定义? 比如 "随机" 这个概念, 在数学上是什么意思? 什么是随机过程?

1.2 概率论基本概念回顾

为了准确定义 "随机", 首先引进概率空间的数学结构.

所谓概率空间, 是指三元素 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, 其中 Ω 是一集合; $\mathcal{U}$ 是 Ω 之子集的 σ-代数; P 是 $\mathcal{U}$ 到 $[0,1]$ 的映射, 称为 $\mathcal{U}$ 上的概率测度.

一些常用术语: 称 $\mathcal{U}$ 中的元素 $A \in \mathcal{U}$ 为事件; 称 Ω 中的点 $\omega \in \Omega$ 为样本点; 称 $P(A)$ 的值为事件 A 的概率.

下面的例子是一个常用的概率空间.

例 记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中所有 Borel 子集, 定义

$$P(B) = \int_B f\mathrm{d}x, \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

其中 f 是一个适合 $\int_{\mathbb{R}^n} f\mathrm{d}x = 1$ 的非负函数. 则 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, P)$ 是一个概率空间, 并称 f 为 P 的密度函数.

有了概率空间的概念即可以定义随机变量、随机过程及样本路径.

定义 给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{U}, P)$,

(1) 称映射 $X: \Omega \to \mathbb{R}^n$ 是一个随机变量, 如果 X 是 $\mathcal{U}$ 可测的, 即

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}, \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

(2) 如果每个 $X(t)(t \geqslant 0)$ 都是随机变量, 则称随机变量族 $\{X(t)|t \geqslant 0\}$ 为随机过程.

(3) 固定 $\omega \in \Omega$, 称映射 $t \mapsto X(t,\omega)$ 为样本路径.

随机微分方程的解 X 是一个随机过程, 在每个时间 t, 对应的 $X(t)$ 是随机变量, 是 Ω 上的一个可测映射. 这和通常的确定型方程不一样, 通常微分方程的解在每个时间 t 所对应的 $x(t)$ 是 Ω 中的一个点, 而随机变量 $X(t)$ 却与整个 Ω 有关系, 是上面的一个映射. 由此看出来, 随机过程作为随机微分方程的解, 并不是 $\mathbb{R}^n$ 中的曲线. 其次, 虽然对于固定的样本点 $\omega \in \Omega$, 样本路径 $X(t,\omega)(t \geqslant 0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个曲线, 但是对于一个随机变量, 我们通常用 X 而不是 $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ 来表示, 这反映了概率论的习惯 —— 不去展示或强调对样本点的依赖关系. 省略掉这个依赖关系, 其原因是一个样本路径并没有代表性, 不反映事物的本质, 仅仅一个样本点有太大的偶然性.

因此在概率论中, 对于一个随机变量 X, 相比较它作为映射本身, 人们更关心其概率性质, 即这个随机变量映到某个集合里的概率有多大, 以及它的平均值、它与平均值之差的平均. 下面引进概率函数、数学期望、方差的概念.

定义　给定一个随机变量 X, 称 $F(B) := P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}$ 为 X 的概率函数. 如果概率函数可以表示为

$$F(B) = \int_B f(x)\mathrm{d}x, \quad \forall B \in \mathcal{B},$$

则称 f 是 X 的密度函数; 称积分

$$E(X) := \int_\Omega X\mathrm{d}P$$

为 X 的数学期望; 称

$$V(X) := \int_\Omega |X - E(X)|^2\mathrm{d}P$$

为 X 的方差.

密度函数非常重要. 因为在概率理论中, 几乎所有有趣的量, 都可以通过密度函数来计算.

例　高斯分布 $N(m,\sigma^2)$.

如果随机变量 $X : \Omega \to \mathbb{R}^1$ 具有密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x-m|^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

称 X 具高斯 (或正态) 分布, 并记为 $N(m,\sigma^2)$.

很容易计算出来, 一切具高斯分布 $N(m,\sigma^2)$ 的随机变量, 其数学期望等于 m, 方差等于 σ^2. 前面提到的 Brown 运动就是这样的随机过程. 其实在现实世界中, 大多数随机变量都具有高斯分布的特点. 因为根据中心极限定理, 任何一组独立同分布的随机变量, 其数量和一定服从高斯分布.

1.3 Brown 运动, Wiener 过程

人们最早了解的最典型的随机过程是 Brown 运动或 Wiener 过程. 早在 1826~1827 年, R.Brown 观察花粉颗粒悬浮于水中的运动, 发现其运动轨迹有这样的特点: 任何一点都不正则, 没有切线, 而且任何两个颗粒之间相互独立, 没有关联. 人们将具有这类特点的随机现象称为 Brown 现象. 1900 年, L.Bachelier 用数学方法研究股票的价格, 对 Brown 现象给予数学描述; 1905 年, 爱因斯坦通过研究墨滴在清水中的扩散, 证明对 Brown 现象来说其密度函数服从扩散方程, 从而服从正态分布. 也就是说, Brown 运动作为随机过程, 其密度函数是高斯分布. 直到 20 世纪 20 年代, N.Wiener 对 Brown 运动建立了严格的数学基础, 所以 Brown 运动也叫做 Wiener 过程. 下面给出一维 Brown 运动数学上的严格定义.

定义 $(n=1)$ 称随机过程 $W(\cdot)$ 为 Brown 运动, 或 Wiener 过程, 如果

(i) $W(0)$ 几乎处处为零;

(ii) $W(t)-W(s)$ 具高斯分布 $N(0,t-s)$, $\forall t\geqslant s\geqslant 0$;

(iii) (增量独立性) 对 $0<t_1<\cdots<t_k$, $W(t_1)$, $W(t_2)-W(t_1),\cdots,W(t_k)-W(t_{k-1})$ 是独立的随机变量.

第 (i) 条性质很简单, 意即初值为零; 第 (ii) 条则等同爱因斯坦的发现即密度函数服从正态分布; 第 (iii) 条反映了相互独立性, 正是前面所说 Brown 现象中任何两个颗粒之运动的不相关性. 任何一个随机过程, 只要适合上述三条, 就叫做 Brown 运动, 或 Wiener 过程.

但是, Wiener 过程一定存在吗? 它有什么性质? 连续性如何? 可微性如何? 特别地, 它有什么样的概率性质? 这些都是我们自然要问的问题.

对于存在性, 可以证明: 只要一个概率空间存在可数多个相互独立的正态分布, 就可以构造一维 Brown 运动.

关于 Wiener 过程的连续性, 可以证明: 几乎所有的样本路径都是连续的, 而且是 Hölder 连续. 准确地说有下面的定理.

定理 设 $W(\cdot)$ 是一 Wiener 过程. 则对 $\gamma<1/2$, 以及几乎处处的样本点 ω, 样本路径 $W(\cdot,\omega)$ 是 γ-Hölder 连续.

当然, 连续性是随机过程理论中的一个基本问题. 下面的 Kolmogorov 定理

是关于一般随机过程样本轨道的 Hölder 连续性的结果. 上述关于 Wiener 过程的 Hölder 连续性结果, 便是此定理的一个推论.

Kolmogorov 定理　对于随机过程 $X(\cdot)$, 如果几乎处处的样本路径是连续的, 且对某 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$,

$$E(|X(t) - X(s)|^{\beta}) \leqslant C|t-s|^{1+\alpha}.$$

则对任一 $0 < \gamma < \alpha/\beta$, $T > 0$, 以及几乎处处的 ω, 样本路径 $X(\cdot, \omega)$ 在 $[0, T]$ 上是一致 γ-Hölder 连续的.

如前所知, Wiener 过程几乎处处的样本轨道 $W(\cdot, \omega)$ 是 γ-Hölder 连续的, 只要 γ 小于 1/2. 那么当 $\gamma \geqslant 1/2$ 时, 它的 Hölder 连续性如何呢? 答案是否定的, 这时一定不是 γ-Hölder 连续的. 由此可见, Brown 运动是处处不可微的. 这就是下面的

定理　设 $W(\cdot)$ 是一个 Wiener 过程. 对 $1/2 \leqslant \gamma \leqslant 1$ 以及几乎处处的 ω, 样本路径 $W(\cdot, \omega)$ 处处不可能 γ-Hölder 连续, 从而处处不可微.

Brown 运动的处处不可微性有其概率上的意义. 下面的定理便给出处处不可微性一个概率的解释.

定理　任一 n 维的 Brown 运动 $W(\cdot)$ 是一个 Markov 过程.

Markov 过程具有 “无记忆”“无后效” 的特征. 也就是说, s 时刻之前的历史不影响 s 时刻之后的状态. 粗略地说, 这样的随机过程只 “知道” 当前时刻的值, 而不 “记得” 是如何达到这个值的.

1.4　Itô 积分, Itô 连锁法则

既然 Brown 运动 $W(\cdot)$ 是不可微的, 那么作为白噪声的 dW 是什么意思? 前面说到这是 Itô 意义下的微分, 那么什么是 Itô 意义下的微分? 事实上需要定义的只是 Itô 积分.

定义　设 X 是一个随机过程, 适合

$$X(t) = X(r) + \int_r^t V(X(s))\mathrm{d}s + \int_r^t G(X(s))\mathrm{d}W(s)$$

对所有时间 $0 \leqslant r \leqslant t \leqslant T$. 我们就说随机过程 X 具有随机微分

$$\mathrm{d}X(t) = V(X(t))\mathrm{d}t + G(X(t))\mathrm{d}W(t), \quad t \in [0, T],$$

或称 X 是此随机微分方程的解.

请注意这里的微分符号仅仅是上面积分表达的替用, 严格来说, 单独的 "dX" "dt" 和 "dW" 是没有意义的.

我们看到, 在上面积分等式里, 唯右端最后一项的积分没有意义. 所以, 只需要定义 Itô 积分:

$$\int_0^t G\mathrm{d}W,$$

其中 G 是一个随机变量.

1.4.1 Itô 积分之定义

如何定义积分 $\int_0^t G\mathrm{d}W$?

设想一下, 如果 G 是可微函数, 这时可以将 dW 理解为 "广义导数", 即

$$\int_a^b G\mathrm{d}W := -\int_a^b G'W + GW|_a^b.$$

但是, 当 G 不是可微函数时, 如此定义便行不通了.

我们再做进一步的观察, 看看当 $G = W$ 时, 应该如何定义积分?

$$\int_0^t W\mathrm{d}W = ?$$

考察 Riemann 和如下. 给定一个分布

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t,$$

在每个区间取一点

$$\tau_k := (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}, \quad 对某个 \lambda \in [0,1],$$

那么, 可以证明: 当 $\max_k |t_{k+1} - t_k| \to 0$ 时, Riemann 和

$$\sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k)(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到

$$\frac{W(t)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)t.$$

请注意, Riemann 和的极限值与 λ 有关! 也就是说与每个区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 中 τ_k 的选择有关. 既然极限值与区间中点的选择有关, 就不能随便选取了.

Itô 的定义 取 $\lambda = 0$, 即

$$\int_0^t W\mathrm{d}W := \frac{W(t)^2}{2} - \frac{t}{2},$$

更一般地

$$\int_s^t W\mathrm{d}W := \frac{W(t)^2 - W(s)^2}{2} - \frac{t-s}{2}.$$

注　还有另一种定义方法, 即取 $\lambda = 1/2$. 这就是所谓的 Stratonovich 积分.

人们自然要问, 为什么取 $\lambda = 0$? 这样选择有何益处?

这样做可以对很广泛的一类所谓 "非预测" 的 (nonanticipating) 随机过程 G 建立 Itô 积分

$$\int_0^t G\mathrm{d}W,$$

并通过在小区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 左端点 $\tau_k = t_k$ 上取值的 Riemann 和来逼近积分.

1.4.2　性质

Itô 积分有些什么性质?

和通常的微积分相比, 随机微积分最大的特点就是其连锁法则 (chain rule) 具有下面的特别形式.

定理(Itô公式或 Itô连锁法则)　假设 $X(\cdot)$ 具有随机微分

$$\mathrm{d}X(t) = V(X(t))\mathrm{d}t + G(X(t))\mathrm{d}W, \quad t \in [0, T].$$

如果 $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}^1$ 是 C^2 光滑的, 则复合函数 $u(X(t), t)$ 适合

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(X(t), t) &= \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t + \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}X^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} \sum_l G^{il}G^{jl}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + L^* u\right)\mathrm{d}t + \nabla u \cdot G\mathrm{d}W, \end{aligned}$$

其中 L^* 是微分算子

$$L^* u = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a^{ij} \frac{\partial u^2}{\partial x_i \partial x_j} + V \cdot \nabla u, \quad a^{ij} = \sum_l G^{il}G^{jl}.$$

我们称 L^* 为随机微分 $\mathrm{d}X$ 的生成子 (generator), 这是一个椭圆型微分算子. 十分有趣的是, 后面我们将看到, 对应到这个椭圆算子的偏微分方程 (PDE) 与随机微分方程 (SDE) 之间, 关系紧密. 换言之, Itô 公式提供了随机微分方程与偏微分方程 (确定型方程) 两者之间的一个重要连接.

1.5 随机微分方程的解

考虑随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t) = V(X(t))\mathrm{d}t + G(X(t))\mathrm{d}W, \quad t \in [0,T] \tag{1}$$

的初值问题

$$X(0) = x \in \mathbb{R}^n.$$

1.5.1 基本结果

对于随机微分方程的初值问题解的存在性、唯一性、正则性, 以及解对参数的连续依赖性等等, 人们已有比较多的了解. 在一定的条件下, 比如假定噪声系数 G 局部 Lipschitz 连续以及向量场 V 不超线性增长, 可以用逐次逼近法证明: 初值问题的解全局存在且唯一, 并且对初始值有比较好的连续依赖性质.

关于解的正则性, 可以证明它的样本路径具有和 Brown 运动一样的连续性, 即对几乎处处的样本点 $\omega \in \Omega$, 样本路径 $X(\cdot,\omega)$ 是 γ-Hölder 连续, 只要 $\gamma < 1/2$.

解的渐近行为, 即当时间 $t \to \infty$ 时, 随机变量 $X(t)$ 的极限状态是人们特别关心的问题, 这也正是**随机动力系统**所研究的课题. 这里不作进一步的深入.

1.5.2 应用

随机微分方程有许多重要应用, 比如控制论中的最优停止 (optimal stopping) 问题、数学金融理论中的期权定价 (options pricing) 问题. 特别有趣的是, 它对偏微分方程理论有十分重要的应用. 应用随机理论, 人们能够对偏微分方程的解给出概率解释.

例 *偏微分方程 (PDE) 解之概率表达.*

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 有界开集, 有光滑边界. 设 u 是下列边值问题:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Delta u = 1, & \text{在 } U \text{ 内}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial U \text{ 上} \end{cases}$$

的唯一解. 对 $x \in U$, 记 $X(\cdot)$ 是 "从 x 出发的 Brown 运动", 即

$$X(\cdot) = W(\cdot) + x.$$

定义随机变量 τ_x 如下:

$$\tau_x := X(\cdot) \text{ 首次碰到 } \partial U,$$