矩阵分析

姜志侠　孟品超　李延忠　编著

清华大学出版社

矩阵分析

姜志侠　孟品超　李延忠　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书简明扼要地介绍了矩阵分析的基本理论及方法.全书共分为6章,包括线性空间与线性变换,内积空间,矩阵的相似标准形,矩阵分解,矩阵分析,矩阵函数等内容.各章后配有一定数量的习题并在书后附有答案和提示.

本书可作为理工类院校硕士研究生和高年级本科生的教材,也可作为相关专业的教师及工程技术人员的参考用书.本书配有同步学习指导书,可辅助教师教学和供学生自学.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析/姜志侠,孟品超,李延忠编著.--北京:清华大学出版社,2015
ISBN 978-7-302-37226-4

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①姜… ②孟… ③李… Ⅲ.①矩阵分析 Ⅳ.①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第152124号

责任编辑: 陈 明
封面设计: 傅瑞学
责任校对: 王淑云
责任印制: 李红英

出版发行: 清华大学出版社
网　　址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址: 北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编:** 100084
社 总 机: 010-62770175　　**邮　　购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者: 北京嘉实印刷有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 185mm×260mm　　**印　　张:** 9.25　　**字　　数:** 224千字
版　　次: 2015年1月第1版　　**印　　次:** 2015年1月第1次印刷
印　　数: 1～2500
定　　价: 19.80元

产品编号:059834-01

FOREWORD 前言

本书是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会研究生组制定的“矩阵论”课程的教学要求，在戴天时、李延忠编著的《矩阵论》(吉林科学技术出版社，2000)教材的基础上，为更好地适应现阶段研究生课程教学需要，特修订编写而成的.

矩阵理论作为数学的一个重要分支，具有悠久的发展历史和极其丰富的内容；作为一种基本工具，矩阵理论在数学学科以及其他科学技术领域，诸如优化理论、微分方程、数值分析、运筹学、信息科学与技术等领域都有非常广泛的应用. 矩阵理论的相关知识对于理工科研究生来说是必须掌握的.

本书较为全面系统地介绍了矩阵的基本理论、基本方法及应用. 在编写过程中，结合高等院校理工科本科生“线性代数”课程的内容，在教材起点上力求与其相衔接，同时注重广度适中、深入浅出、简洁易懂，但又力求有一定的理论深度. 以矩阵理论为主线，内容包括了线性空间、线性变换、内积空间、矩阵的相似标准形、矩阵的分解、广义逆矩阵、函数矩阵的微积分、矩阵函数等. 带 * 的内容可根据课时和专业的不同要求用于选讲或自学，主要内容可用 48 学时左右讲授完成. 每章后都配有习题，书末附有参考答案，便于读者学习和巩固重点内容.

感谢吉林大学戴天时教授对本书编写提供的支持与帮助. 本书可作为理工科院校硕士研究生和高年级本科生的教材，也可作为有关专业教师及工程技术人员的参考书.

限于作者水平，书中难免有疏漏与不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编者

2014 年 5 月

目 录

CONTENTS

第 1 章 线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是学习现代矩阵理论时经常用到的两个极其重要的概念.本章主要论述这两个概念及其相关理论,这些内容都是已有线性代数知识的进一步深化.

1.1 线性空间

线性空间是线性代数最基本的概念之一,也是学习现代矩阵论的重要基础,本章所考虑的数域是实数域(记为$\mathbb{R}$)和复数域(记为$\mathbb{C}$),统称为数域 F.

1.1.1 线性空间的定义及性质

定义 1.1 设 V 是一个非空集合,F 是一数域.如果存在一种规则叫做 V 的**加法**运算:对于 V 中任意两个元素 α,β,总有 V 中一个确定的元素 γ 与之对应,γ 称为 α 与 β 的和,记为 $\gamma=\alpha+\beta$.另有一种规则,叫做 V 对于 F 的**数乘**运算:对于 F 中的任意数 k 及 V 中任意元素 α,总有 V 中一个确定的元素 σ 与之对应,σ 叫做 k 与 α 的数乘,记为 $\sigma=k\alpha$.而且,以上两种运算还具有如下的性质:

对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$ 及 $k,l\in F$,有

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) V 中存在零元素 0,对于任何 $\alpha\in V$,恒有 $\alpha+0=\alpha$;

(4) 对于任何 $\alpha\in V$,都有 α 的负元素 $\beta\in V$,使 $\alpha+\beta=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;(式中 kl 是通常的数的乘法)

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;(式中 $k+l$ 是通常的数的加法)

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

则称 V 为数域 F 上的一个**线性空间**,也称向量空间.

V 中所定义的加法及数乘运算统称为**线性运算**,其中数乘又称为数量乘法.在不致产生混淆时,将数域 F 上的线性空间简称为线性空间.

需要指出,不管 V 的元素如何,当 F 为实数域$\mathbb{R}$时,称 V 为实线性空间;当 F 为复数域$\mathbb{C}$时,就称 V 为复线性空间.

例 1.1 任何数域 F(作为集合),对于通常的数的加法与乘法(作为数乘)运算,都构成此数域 F 上的线性空间.

例 1.2 实数域$\mathbb{R}$作为集合，对于通常的数的加法及乘法（作为数乘）运算，不能构成复数域$\mathbb{C}$上的线性空间.

因为 $a\in\mathbb{R}$,$k=\mathrm{i}\in\mathbb{C}$,$ka=a\mathrm{i}\notin\mathbb{R}$.

例 1.3 以数域 F 上的数为系数的多项式称为数域 F 上的多项式. 数域 F 上以 x 为变量的全体多项式的集合记为 $F[x]$；次数小于 n 的全体多项式的集合记为 $F[x]_n$.

可以证明，$F[x]_n$ 对于通常的多项式加法及多项式数乘运算构成数域 F 上的线性空间.

对于多项式 $f(x),g(x)\in F[x]_n$，设

$$f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0,$$

这里 $a_i,b_i\in F(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，于是

$$f(x)+g(x)=(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+(a_{n-2}+b_{n-2})x^{n-2}+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in F[x]_n.$$

对于任何 $k\in F$，有 $kf(x)=ka_{n-1}x^{n-1}+ka_{n-2}x^{n-2}+\cdots+ka_1x+ka_0\in F[x]_n$. 容易证明线性空间定义中的八条性质都成立，因此 $F[x]_n$ 是 F 上的线性空间.

类似可证 $F[x]$对于通常的多项式加法及数乘运算也构成数域 F 上的线性空间.

例 1.4 数域 F 上的 n 维列（或行）数组向量的全体所构成集合记为 F^n，它对于数组向量加法、数乘运算构成 F 上的线性空间.

例 1.5 数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵的全体构成的集合记为 $F^{m\times n}$，它对于矩阵加法、数乘运算构成数域 F 上的线性空间.

例 1.6 定义在$[a,b]$上的实函数全体的集合 V，对于函数加法、数乘运算构成实数域$\mathbb{R}$上的线性空间.

例 1.7 常系数二阶齐次线性微分方程

$$y''-3y'+2y=0$$

的解的集合 D，对于函数加法及数与函数乘法有：若 $y_1,y_2\in D$，则 $y_1+y_2\in D$；当 $k\in\mathbb{R}$ 时，则 $ky_1\in D$，即 D 关于这两种运算是封闭的，且满足定义 1.1 中的八条性质，故 D 构成了$\mathbb{R}$上的线性空间.

定理 1.1 设 V 是数域 F 上的线性空间，则

(1) V 中零元素唯一；

(2) V 中任一元素的负元素唯一，$\forall\alpha\in V$，用$-\alpha$ 表示 α 的负元素；

(3) $k0=0$，特别有 $0\alpha=0,(-1)\alpha=-\alpha$；

(4) 如果 $k\alpha=0$，那么 $k=0$ 或 $\alpha=0$.

证 这里仅证明(2)，其余的证明留给读者完成.

假设 α 有两个负元素 β 与 γ，则 $\alpha+\beta=0,\alpha+\gamma=0$，从而

$$\beta=\beta+0=\beta+(\alpha+\gamma)=(\beta+\alpha)+\gamma=0+\gamma=\gamma.$$

1.1.2 向量的线性相关性

在线性代数中已讨论了 n 维数组向量的性质，包括线性表示、等价性、线性相关性等，对于一般的数域 F 上的线性空间 V 也有类似结果.

定义 1.2 设 V 是数域 F 上的线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant1)$是 V 中一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域 F 中的数，如果 V 中向量 α 可以表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

则称 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性表示**,或称 α 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合.

定义 1.3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是线性空间 V 中两个向量组,如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中每个向量都可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可以由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示.如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可以互相线性表示,则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是**等价**的.

容易证明向量组之间的等价具有如下性质:

(1) 自反性 每一个向量组都与它自身等价;

(2) 对称性 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价,那么向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价;

(3) 传递性 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价,而且向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 等价,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_t$ 等价.

定义 1.4 设 V 为数域 F 上的线性空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 1)$ 是 V 中一组向量,如果存在 r 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in F$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ **线性相关**;如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 不线性相关,就称其**线性无关**.

由定义 1.4 可得向量组线性相关定义的另一说法.

定理 1.2 设 V 为数域 F 上的线性空间,V 中一个向量 α 线性相关的充分必要条件是 $\alpha=0$;V 中一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(r\geqslant 2)$ 线性相关的充分必要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合.

证 如果一个向量 α 线性相关,由定义 1.4 可知,存在 $k\neq 0$,使

$$k\alpha = 0,$$

由定理 1.1 的(4)知 $\alpha=0$.

反之,若 $\alpha=0$,则对任意数 $k\neq 0$ 都有 $k\alpha=0$.由定义 1.4 知,向量 α 线性相关.

如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关,则存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$,使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r = 0,$$

因为 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零,不妨设 $k_r\neq 0$,于是上式可改写为

$$\alpha_r = -\frac{k_1}{k_r}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_r}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{r-1}}{k_r}\alpha_{r-1},$$

即向量 α_r 是其余向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$ 的线性组合.

反过来,如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中有一个向量是其余向量的线性组合,譬如说

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1},$$

那么上式可写为

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_{r-1}\alpha_{r-1} + (-1)\alpha_r = 0,$$

因为 $l_1,l_2,\cdots,l_{r-1},-1$ 不全为零,由定义 1.4 知,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关.

例 1.8 实数域$\mathbb{R}$上线性空间$\mathbb{R}^{2\times 2}$的一组向量(矩阵)

$$\boldsymbol{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

是线性无关的.

事实上，如果

$$k_1\boldsymbol{E}_{11}+k_2\boldsymbol{E}_{12}+k_3\boldsymbol{E}_{21}+k_4\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{0},$$

即

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

则 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$. 因此，满足 $k_1\boldsymbol{E}_{11}+k_2\boldsymbol{E}_{12}+k_3\boldsymbol{E}_{21}+k_4\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{0}$ 的 k_1,k_2,k_3,k_4 只能全为零，于是 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 线性无关.

定理 1.3 设 V 为数域 F 上的线性空间，如果 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，并且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则 $r\leqslant s$.

证 采用反证法. 假设 $r>s$，因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，即

$$\alpha_i=\sum_{j=1}^{s}a_{ji}\beta_j,\quad i=1,2,\cdots,r,$$

做线性组合

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=\sum_{i=1}^{r}x_i\sum_{j=1}^{s}a_{ji}\beta_j=\sum_{j=1}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{r}a_{ji}x_i\Big)\beta_j.$$

考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=0, \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sr}x_r=0. \end{cases} \tag{1.1}$$

因为方程组(1.1)中未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 的个数 r 大于方程的个数 s，从而有非零解 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，即可找到不全为零的数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_r\alpha_r=0.$$

因此，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，这与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关矛盾，于是 $r\leqslant s$.

推论 1 两个等价的线性无关向量组必含有相同个数的向量.

定理 1.4 设线性空间 V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，并且表示法是唯一的.

证 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关，故存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r,k_{r+1}$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r+k_{r+1}\beta=0,$$

并且 $k_{r+1}\neq0$；否则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关，这与条件矛盾. 从而

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{r+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\alpha_r,$$

即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示.

假设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示为

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_r\alpha_r,$$

则

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_r-l_r)\alpha_r=0.$$

因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，从而 $k_i-l_i=0(i=1,2,\cdots,r)$. 因此，$\beta$ 可唯一地表示为

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合.

定义 1.5　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是线性空间 V 中一组向量，如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在 r 个线性无关的向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ $(1\leqslant i_j\leqslant s, j=1,2,\cdots,r)$，并且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任一向量都可由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表示，则称向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个**极大线性无关组**，数 r 称为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的**秩**，记为 $\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$.

一般来说，向量组的极大线性无关组不唯一，但是每一个极大线性无关组都与向量组本身等价. 由等价的传递性可知，一个向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的，并且任意两个等价向量组的极大线性无关组也等价. 由定理 1.3 推论 1 知，一个向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量，即向量组的秩是唯一的，并且等价的向量组具有相同的秩.

1.1.3　基与维数

现在引入线性空间的基与维数的概念，它们是线性空间的重要属性.

定义 1.6　设 V 是数域 F 上的线性空间，如果 V 中存在 n 个向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，满足

(1) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关；

(2) V 中任何向量 α 均可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示. 即存在 $k_1,k_2,\cdots,k_n\in F$，使得

$$\alpha = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + \cdots + k_n\varepsilon_n,$$

则称 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组**基**(或**基底**)，基中向量的个数 n 称为线性空间 V 的**维数**，记为维 V 或 $\dim V$. 若 $\dim V<+\infty$，称 V 为**有限维线性空间**；否则，称 V 为**无限维线性空间**，本书主要讨论有限维线性空间.

关于线性空间的基与维数，有以下结论：

(1) n 维线性空间中任一向量 α 必可由 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示，并且表示法唯一.

(2) 线性空间的基(只要存在)必不唯一.

(3) 有限维线性空间的维数是唯一确定的.

定理 1.5　n 维线性空间中任意 n 个线性无关的向量均可构成一组基.

证　设 V 是 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 中一个线性无关的向量组. 为证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是基，只需证明 V 中任一向量 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示. 此时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 中每个向量都可由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表示. 这是 $n+1$ 个向量被 n 个向量线性表示的情况，即知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha$ 线性相关. 再由定理 1.4，便知 α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，定理得证.

例 1.9　求实数域 $\mathbb{R}$ 上线性空间 $\mathbb{R}^3$ 的维数和一组基.

解　考虑 $\mathbb{R}^3$ 中向量组

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},$$

显然满足

(1) $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 线性无关；

(2) 对于 $\mathbb{R}^3$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，有 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{E}_1+a_2\boldsymbol{E}_2+a_3\boldsymbol{E}_3$. 于是由定义 1.6 知 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基，从而 $\mathbb{R}^3$ 的维数为 3.

例 1.10　求数域 F 上线性空间 $F^{2\times 3}$ 的维数和一组基.

解 $F^{2\times 3}$中的向量组

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{13}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{23}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

显然满足

(1) $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$线性无关,

(2) 对于 $F^{2\times 3}$中任一元素

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix},$$

有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{13}\boldsymbol{E}_{13}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22}+a_{23}\boldsymbol{E}_{23},$$

于是知 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{13},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$为 $F^{2\times 3}$的一组基,从而 $\dim F^{2\times 3}=6$.

类似可知,线性空间 $F^{m\times n}$的维数为mn,其一组基为

$$\boldsymbol{E}_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n,$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ij}$是$m\times n$矩阵,它的(i,j)位置元素为1,其余元素全为0.

例 1.11 设V是二阶实对称矩阵全体的集合,对于通常的矩阵加法、矩阵数乘两种运算构成了实数域$\mathbb{R}$上的线性空间,求V的维数和一组基.

解 V中一般元素可表示为$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$,$a,b,c\in\mathbb{R}$,$a,b,c$所在位置各体现一个自由度.

考虑V中向量组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

满足

(1) $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$ 线性无关;

(2) 对V中任一矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}$,有$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}_1+b\boldsymbol{A}_2+c\boldsymbol{A}_3$,可见$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3$为$V$的一组基,$\dim V=3$.

1.1.4 坐标与坐标变换

定义 1.7 设V是数域F上的n维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基,对于$V$中任一向量$\alpha$,有数域$F$中唯一的一组数$a_1,a_2,\cdots,a_n$,使

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$

称有序数组$a_1,a_2,\cdots,a_n$为向量α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的**坐标**,记为$\hat{\boldsymbol{\alpha}}$. 如果借用矩阵乘法的形式,记

$$a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},$$

则 α 的坐标可以方便地用一个 n 维列(数组)向量表示出来,即

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

例 1.12　$F[x]_n$ 中向量 $f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ 在基 $1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}$下的坐标为$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})^{\mathrm{T}}$.

例 1.13　设 V 是二阶实对称矩阵全体的集合,对于矩阵加法与矩阵数乘运算构成实数域$\mathbb{R}$ 上的线性空间,求 V 中向量$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$在基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

下的坐标.

解　因为 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3$,所以 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标为$\left(\frac{1}{2},3,2\right)^{\mathrm{T}}$.

引理 1.1　在 n 维线性空间中,向量 α 为零向量的充分必要条件是对于任一组基,α 的坐标为$(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$.

引理 1.2　设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间,在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下,如果 α 的坐标记为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$,$\beta$ 的坐标记为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$,则

(1) $\alpha+\beta$ 的坐标为 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}+\hat{\boldsymbol{\beta}}$;

(2) $k\alpha$ 的坐标为 $k\hat{\boldsymbol{\alpha}}(k\in F)$.

证　设 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$,便有

$$\alpha = a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n,$$
$$\beta = b_1\varepsilon_1+b_2\varepsilon_2+\cdots+b_n\varepsilon_n.$$

于是 $\alpha+\beta=(a_1+b_1)\varepsilon_1+(a_2+b_2)\varepsilon_2+\cdots+(a_n+b_n)\varepsilon_n$,可见 $\alpha+\beta$ 的坐标为

$$\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}=\hat{\boldsymbol{\alpha}}+\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

对任意 $k\in F$,有 $k\alpha=ka_1\varepsilon_1+ka_2\varepsilon_2+\cdots+ka_n\varepsilon_n$,故 $k\alpha$ 的坐标为 $k\hat{\boldsymbol{\alpha}}$.

定理 1.6　设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间,在 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 之下,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是它们的坐标 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_s$(作为数域 F 上的 n 维数组向量)线性相关.

证　利用引理 1.1 和引理 1.2,便知以下四种说法等价:

(1) V 中向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关.

(2) 有数域 F 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0.$$

(3)有数域 F 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使

$$k_1\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1+k_2\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2+\cdots+k_s\hat{\boldsymbol{\alpha}}_s=\boldsymbol{0},\text{这里 }\boldsymbol{0}=(0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}.$$

(4) 数域 F 上的 n 维数组向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_1,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\hat{\boldsymbol{\alpha}}_s$ 线性相关.

设 V 是数域 F 上的 n 维线性空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 是 V 的两组基,并设

$$\begin{cases}\varepsilon'_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n, \\ \varepsilon'_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n, \\ \qquad\vdots \\ \varepsilon'_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n.\end{cases} \tag{1.2}$$

若令

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 列恰是向量 ε'_i 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是唯一确定的,并且是可逆的,把(1.2)式形式地表达为

$$(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\boldsymbol{A} \tag{1.3}$$

把(1.3)式称为**基变换公式**,其中的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的**过渡矩阵**(或称**变换矩阵**).

在(1.3)式两端同时右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,便得

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n) = (\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)\boldsymbol{A}^{-1}.$$

这说明由基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵恰是由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵的逆矩阵.

下面研究同一向量在两组基下的坐标间的关系.

设基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 之间的关系如(1.3)式,向量 α 在这两组基下的坐标分别为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix},$$

于是

$$\alpha = (\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n)\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}.$$

根据向量在取定基下坐标的唯一性,得

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

或写成

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

(1.4)式或(1.5)式叫做**坐标变换公式**.

定理 1.7　在 n 维线性空间 V 中，设向量 α 在两组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 及 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 之下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 及 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')^{\mathrm{T}}$，如果两组基向量的变换公式由(1.3)式给出，则坐标变换公式为(1.4)式或(1.5)式.

例 1.14　在线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中，求出由基

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

到基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的变换公式，并求向量 $\boldsymbol{\xi}=(4,12,6)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标 $(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$.

解　首先容易得到由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的变换公式为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，可求得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -7 & 4 & -6 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. 于是，由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 的变换公式为

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}.$$

又因为向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的坐标显然为 $(4,12,6)^{\mathrm{T}}$，依坐标变换公式便有

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

例 1.15　对于数域 F 上的线性空间 $F^{2\times 2}$，证明

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

是一组基，并求 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 在该基下的坐标.

解 取基

$$\varepsilon_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \varepsilon_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{cases}A_1=\varepsilon_1,\\A_2=\varepsilon_4,\\A_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\A_4=\varepsilon_2-\varepsilon_3.\end{cases}$$

即

$$(A_1,A_2,A_3,A_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

过渡矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

因 $|B|=-2\neq0$,故 A_1,A_2,A_3,A_4 是一组基.

因为 A 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}$,则 A 在 A_1,A_2,A_3,A_4 下的坐标为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\a_{21}\\a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{22}\\\frac{1}{2}(a_{12}+a_{21})\\\frac{1}{2}(a_{12}-a_{21})\end{bmatrix}.$$

例 1.16 已知矩阵空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的两组基

(Ⅰ) $A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},A_4=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$;

(Ⅱ) $B_1=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},B_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},B_4=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$,

求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵.

解 为了计算简单,采用中介基方法.引进 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的简单基

(Ⅲ) $E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,

直接写出由基(Ⅲ)到基(Ⅰ)的过渡矩阵

$$C_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{bmatrix},$$