



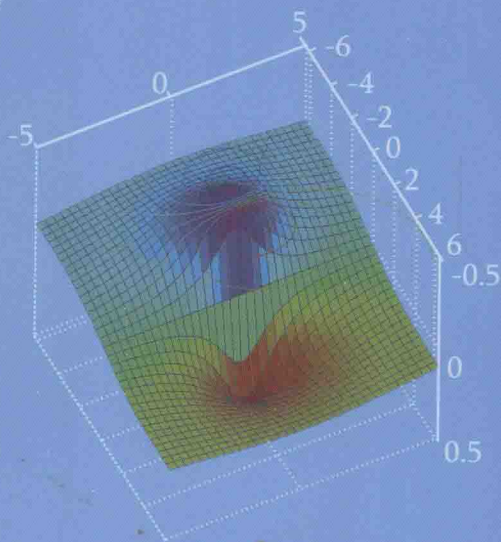
普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书主编：朱长江 彭双阶
执行主编：何 穗

数学模型与竞赛

SHUXUE MOXING YU JINGSAI

赵东方 ©主编



普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

数学模型与竞赛

主 编:赵东方

副主编:阴小波 陈金阳 彭爱民

程铭东 熊 伟

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书共分为 9 章,主要包括:数学建模竞赛简介、Matlab 基础知识介绍、数学建模概论、数学规划模型与 Lingo 软件实现、图论与网络规划模型、统计回归模型、离散模型、数值分析工具、问题与研究性学习。本书针对数学建模竞赛的特点,结合实际问题进行编写,例题讲解详细,图解清晰,计算程序完整,内容通俗易懂,易教易学。

本书可作为高等院校理、工、经、管等专业的数学模型及相关课程教材,亦可供有关人员参考。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

数学模型与竞赛/赵东方主编. —武汉:华中师范大学出版社,2014.8

(普通高等教育“十二五”规划教材/新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材)

ISBN 978-7-5622-6741-6

I. ①数… II. ①赵… III. ①数学模型—高等学校—教材 IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 176016 号

数学模型与竞赛

©赵东方 主编

责任编辑:李晓璐 袁正科

编辑室:第二编辑室

出版发行:华中师范大学出版社

社 址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

销售电话:027-67863426/67863280(发行部) 027-67861321(邮购) 027-67863291(传真)

网 址:<http://www.ccnpublish.com>

印 刷:湖北新华印务有限公司

开 本:787mm×1092mm 1/16

版 次:2014 年 12 月第 1 版

印 数:1—2000

责任校对:刘 峥

电 话:027-67867362

邮 编:430079

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

督 印:章光琼

印 张:14.5

印 次:2014 年 12 月第 1 次印刷

定 价:28.00 元

封面设计:胡 灿

字 数:330 千字

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请拨打举报电话 027-67861321。

普通高等教育“十二五”规划教材
新世纪新理念高等院校数学教学改革与教材建设精品教材

丛书编写委员会

丛书主编:朱长江 彭双阶

执行主编:何 穗

编 委:(以姓氏笔画为序)

王成勇(湖北文理学院)

左可正(湖北师范学院)

刘宏伟(华中师范大学)

朱玉明(荆楚理工学院)

肖建海(湖北工程学院)

陈生安(湖北科技学院)

沈忠环(三峡大学)

张 青(黄冈师范学院)

陈国华(湖南人文科技学院)

邹庭荣(华中农业大学)

赵临龙(安康学院)

梅汇海(湖北第二师范学院)

丛书总序

未来社会是信息化的社会,以多媒体技术和网络技术为核心的信息技术正在飞速发展,信息技术正以惊人的速度渗透到教育领域中,正推动着教育教学的深刻变革。在积极应对信息化社会的过程中,我们的教育思想、教育理念、教学内容、教学方法与手段以及学习方式等方面已不知不觉地发生了深刻的变革。

现代数学不仅是一种精密的思想方法、一种技术手段,更是一个有着丰富内容和不断向前发展的知识体系。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》指明了未来十年高等教育的发展目标:“全面提高高等教育质量”、“提高人才培养质量”、“提升科学研究水平”、“增强社会服务能力”、“优化结构办出特色”。这些目标的实现,有赖于各高校进一步推进数学教学改革步伐,借鉴先进的经验,构建自己的特色。而数学作为一个基础性的专业,承担着培养高素质人才的重要作用。因此,新形势下高等院校数学教学改革的方向、具体实施方案以及与此相关的教材建设等问题,不仅是值得关注的,更是一个具有现实意义和实践价值的课题。

为推进教学改革的进一步深化,加强各高校教学经验的广泛交流,构建高校数学院系的合作平台,华中师范大学数学与统计学学院和华中师范大学出版社充分发挥各自的优势,由华中师范大学数学与统计学学院发起,诚邀华中和周边地区部分颇具影响力的高等院校,面向全国共同开发这套“新世纪新理念高等院校数学系列精品教材”,并委托华中师范大学出版社组织、协调和出版。我们希望,这套教材能够进一步推动全国教育事业和教学改革的蓬勃兴盛,切实体现出教学改革的需要和新理念的贯彻落实。

总体看来,这套教材充分体现了高等学校数学教学改革提出的新理念、新方法、新形式。如目前各高等学校数学教学中普遍推广的研究型教学,要求教师少讲、精讲,重点讲思路、讲方法,鼓励学生的探究式自主学习,教师的角色也从原来完全主导课堂的讲授者转变为学生自主学习的推动者、辅导者,学生转变为教学活动的真正主体等。而传统的教材完全依赖教师课堂讲授、将主要任务交给任课教师完成、学生依靠大量的被动练习应对考试等特点,已不能满足这种新教学改

革的推进。如果再叠加脱离时空限制的网络在线教学等教学方式带来的巨大挑战,传统教材甚至已成为教学改革的严重制约因素。

基于此,我们这套教材在编写的过程中注重突出以下几个方面的特点:

一是以问题为导向、引导研究性学习。教材致力于学生解决实际数学问题、运用所学的数学知识解决实际生活问题为导向,设置大量的研讨性、探索性、应用性问题,鼓励学生在教师的辅导、指导下于课内课外自主学习、探究、应用,以加深对所学数学知识的理解、反思,提高其实际应用能力。

二是精选内容、逻辑清晰。整套教材在各位专家充分研讨的基础上,对课堂教学内容进一步精炼浓缩,以应对课堂教学时间、教师讲授时间压缩等方面的变革;与此同时,教材还在各教学内容的结构安排方面下了很大的功夫,使教材的内容逻辑更清晰,便于教师讲授和学生自主学习。

三是通俗易懂、便于自学。为了满足当前大学生自主学习的要求,我们在教材编写的过程中,要求各教材的语言生动化、案例更切合生活实际且趣味化,如通过借助数表、图形等将抽象的概念用具体、直观的形式表达,用实例和示例加深对概念、方法的理解,尽可能让枯燥、繁琐的数学概念、数理演绎过程通俗化,降低学生自主学习的难度。

当然,教学改革的快速推进不断对教材提出新的要求,同时也受限于我们的水平,这套教材可能离我们理想的目标还有一段距离,敬请各位教师,特别是当前教学改革后已转变为教学活动“主体”的广大学子们提出宝贵的意见!

朱长江

于武昌桂子山

2013年7月

前 言

现代社会的发展,需要一定的数学理论与方法,但更需要熟悉这些理论方法,并能够与物理学家、工程师等合作解决实际问题的专家。新时代的这种需要必然会引起大学数学教学的改革。例如,英国牛津大学就有数学建模方面的博士点,而美国人直接将数学建模课引入理工科大学生的教学中,并设立了一年一次的“大学生数学建模竞赛”,简记为 MCM。这个竞赛吸引了许多国家的大学派队参赛,其国际影响及权威性日益俱增。

我国现在的学校教育模式大致如下:

某种理论→教师讲授→教师讲解例题→学生做习题→学生做提高题,得到的教学结果是:学生理论基础扎实→学生有高超的解题技巧→学生会闭卷考试→学生综合应用能力培养不够。例如,大多数学生对解决一个具体的实际问题办法不多等等。

西方发达国家的教育模式大致如下:

给出某种问题→教师与学生一起调查背景知识→寻找有效的理论工具解决此问题→教师讲授此理论工具的理论与方法、优点和缺点→与学生一起解决此问题→学生分组独立解决实际问题→学生的理论基础与综合应用能力都得到了提高。

在国外的这种教育模式下,学生的下列四种能力得到显著提升:

1. 快速查找资料的能力,包括在图书馆快速查找资料的能力、在 Internet 网上快速查找与下载资料的能力、成功访问专家的能力。
2. 熟练、快速使用计算机的能力。
3. 熟悉多种数学方法及其软件包并灵活应用的能力。
4. 同学之间团结合作的能力。

基于以上现状,并结合前期在多所同类院校的调研情况,华中师范大学数统学院、湖北理工学院数理学院、湖北师范学院数统学院、荆楚理工学院数理学院、湖北第二师范学院数统学院等兄弟院校的专家和老师共同编写了本书,其中,赵东方为主编,副主编按照姓氏笔画排序,依次为:阴小波,陈金阳,彭爱民,程铭东,熊伟。具体执笔情况为:赵东方:第1、2、3、9章,并负责全书的统稿、定稿工作;程铭东:第4章;陈金阳:第5章;熊伟:第6章;彭爱民:第7章;阴小波:第8章。

在本教材的出版过程中,华中师范大学出版社给予了大力支持,李晓璐、袁正科对书稿进行了细致、严谨而有效地加工编辑,在此,对他们一并表示感谢!

尽管在编写过程中我们做出了较大努力,但由于水平有限,书中难免有诸多不足之处,敬请广大读者批评指正!

编者

2014年8月

目 录

第 1 章 数学建模竞赛简介	1
1.1 美国大学生数学建模竞赛简介	1
1.2 中国大学生数学建模竞赛简介	2
第 2 章 Matlab 基础知识介绍	5
2.1 简介	5
2.2 向量与矩阵	7
2.3 Matlab 中的函数与图形	10
2.4 在 Matlab 中求解常微分方程	38
第 3 章 数学建模概论	50
3.1 大众语言与数学语言相互转化的示例	52
3.2 用数学建模方法解决实际问题的示例	53
3.3 数学模型的求解	58
3.4 数学模型中的变量分析	62
第 4 章 数学规划模型与 Lingo 软件实现	67
4.1 数学规划模型概况及 Lingo 软件简介	67
4.1.1 数学规划模型概况	67
4.1.2 Lingo 软件简介	69
4.2 线性规划	73
4.3 整数规划与非线性规划	78
第 5 章 图论与网络规划模型	86
5.1 图的基本概念	86
5.2 最短路问题与最大流问题	90
5.2.1 最短路问题	90
5.2.2 最大流问题	92
5.2.3 最小费用最大流问题	94
5.3 最优连线问题与旅行商问题	96

第 6 章 统计回归模型	101
6.1 统计的基本概念	101
6.1.1 总体与样本	101
6.1.2 统计量	102
6.1.3 数理统计中几个常见分布	103
6.1.4 正态总体统计量的分布	106
6.2 参数估计	107
6.2.1 参数的点估计	107
6.2.2 评价点估计量优劣的标准	110
6.2.3 参数的区间估计	111
6.3 假设检验	114
6.3.1 假设检验的基本概念	114
6.3.2 单个正态总体参数的假设检验	115
6.3.3 两个正态总体均值之差或方差之比的假设检验	117
6.3.4 总体分布的假设检验	119
6.4 一元线性回归	121
6.4.1 数学模型	121
6.4.2 模型参数估计	122
6.4.3 回归方程的显著性检验	123
6.4.4 回归方程的预测与控制	125
6.4.5 可化为一元线性回归的情形	126
6.5 多元线性回归	126
6.5.1 多元线性回归模型	127
6.5.2 回归系数的最小二乘估计	127
6.5.3 回归方程及回归系数的显著性检验	131
6.5.4 逐步回归分析	135
6.6 用 SPSS 软件解回归分析问题	136
6.6.1 数据预处理	136
6.6.2 回归分析	140
6.7 统计回归分析拓展研究	145
6.8 统计回归分析拓展研究参考解答	147

第 7 章 离散模型	155
7.1 TOPSIS 法(逼近理想解排序法)	155
7.2 层次分析法	158
7.3 BP 神经网络	163
7.4 基于 MATLAB 的 BP 神经网络工具箱函数	165
7.4.1 BP 网络创建函数	165
7.4.2 神经元上的传递函数	166
7.4.3 BP 网络学习函数	166
7.4.4 BP 网络训练函数	167
7.4.5 确定 BP 网络的结构	167
7.5 密码的设计与破译	169
第 8 章 数值分析工具	176
8.1 多项式插值	176
8.1.1 整体多项式插值	176
8.1.2 分段多项式插值	177
8.1.3 三次样条插值	178
8.1.4 Matlab 实现	180
8.2 数值微积分	183
8.2.1 Matlab 中求微积分的符号运算方法	183
8.2.2 数值积分	185
8.2.3 数值微分	187
8.3 最小二乘拟合	188
8.3.1 多项式最小二乘法	188
8.3.2 非线性最小二乘法	189
8.3.3 Matlab 实现	189
8.4 非线性方程(组)求根	194
8.4.1 多项式方程求根	194
8.4.2 非线性方程(组)的解析求解(符号运算)	194
8.4.3 非线性方程的数值求解(近似解)	195
8.4.4 非线性方程组的数值求解(近似解)	196
第 9 章 问题与研究性学习	198
附录 常用概率统计表	213
参考文献	219

第 1 章

数学建模竞赛简介

近半个世纪以来,随着计算机技术的迅速发展,数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用,而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透,数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分。数学模型是一种模拟,是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画。不论是用数学方法在科技和生产领域解决哪类实际问题,还是与其他学科相结合形成交叉学科,首要的和关键的一步是建立研究对象的数学模型,并加以计算求解(通常借助计算机)。美国为此有专门的刊物,比如 *Mathematical and Computer Modelling*, 1980 年创刊,开始是季刊,很快改为月刊。1988 年以前刊名叫 *Mathematical Modelling*, 每隔一年出一本《国际数学建模会议纪要》(近 1000 页)作为增刊。

从 1988 年开始,我国各地高校正式对理工科学生讲授“数学模型”课程,受到高校师生的一致欢迎。我国于 1989 年开始举办全国大学生数学建模竞赛,发展到今天,参赛学校之多、参与师生之多,堪称空前。

我国部分高校从 1989 年开始组队参加美国大学生数学建模竞赛,并取得很好的成绩。

1.1 美国大学生数学建模竞赛简介

美国大学生数学建模竞赛(MCM)有如下特点:

(1) 参赛队都必须事先报名注册,每个系至多 2 个队,每队 3 名队员。参赛队员直到比赛前一分钟都可换掉,且不必通知竞赛委员会(COMAP);若某系事先只报名注册一个队,赛前想再增加一个队,则必须先从竞赛委员会取得考号(Control Number)才行。

(2) 每个队都将收到 2 个考题:A、B,由参赛队的 3 名队员任选一题给出解答。一旦选定考题,队员不得与教练或其他无关人员讨论题目的解答等相关事宜。参赛队可使用计算机、软件包等类似工具参加竞赛。参赛题目不一定有答案(如猜想等),若有答案,也不一定是唯一答案。

(3) 每年选定 2 月或 3 月的某个星期五的中午 12:00 开始竞赛,开卷考试三天。

(4) 参赛队主要应注意:审题、分析、自己给出假设,然后在这些假设下给出合理的答案。最后答卷必须用英文打印 2 份上交。各种与现实社会实际情况有明显出入的答案、不完整的答案也应附带一起交审,重在思想与方法。答卷寄出邮戳不得迟于下一个星期一。答卷的英文翻译稿必须在下一个星期三盖邮戳。

(5) 竞赛后用三个星期改卷,其中部分试卷分别给予:一等奖(Outstanding);二等奖(Meritorious);三等奖(Honorable Mention)。

(6) 竞赛结果 2 个月后通知教练与队员及参赛学校,优秀答卷结集出版,新闻媒体予以报道。每名获奖队员都发给一张证书,一等奖队员还将获得青铜制作的荣誉奖章,且他们的答卷也将陆续刊登在 *The UMAP Journal* (*The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications*) 杂志上。

(7) 美国运筹学会(ORSA)将在每个赛题中选一个一等奖队,作为美国运筹学会年度获奖者,全费资助此队参加美国运筹学会全国年会。另外,美国运筹学会还将免费承认所有二等奖以上的队员为其学生会会员,向他们提供会员待遇。美国工业与应用数学学会(SIAM)也将每个赛题中选一个一等奖队,作为美国工业与应用数学学会年度获奖者,发给证书及现金奖励,并部分资助此队参加美国工业与应用数学学会全国年会。

(8) 答卷一式 2 份,并随附:

- ① 首页(Summary Page):考号、题目、主要结果等;
- ② 辅助材料:软盘、图表、广告、录像带等;
- ③ 参赛者签名的控制表(Control Sheet),只要原始表,不能复印;
- ④ 答卷中间任何部位不得出现参赛者校名、队员名,只能注明参赛队的考号;
- ⑤ 答卷中最好随寄一个写好回信地址的明信片,贴上邮票,竞赛委员会收到后将会把明信片寄回,以便参赛者迅速知道答案已寄到。

(9) 答案基本要点:

- ① 需要时,应对所求解的问题给出清晰的阐述或重述;
- ② 对所给出的假设作清晰的、合乎情理的说明;
- ③ 说明你如此建模的依据及分析;
- ④ 构造、建立模型;
- ⑤ 对你的模型给出评价:优点、缺点、稳定性、灵敏度等。

1.2 中国大学生数学建模竞赛简介

中国全国大学生数学建模竞赛,操作程序与美国大学生数学建模竞赛大致相同,一般在每年 9 月初选一个星期五开始比赛,开卷考试 3 天。

1. 全国大学生数学建模竞赛章程

(1) 总则

全国大学生数学建模竞赛(以下简称竞赛)是国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同主办的面向全国大学生的群众性科技活动,目的在于激励学生学习数学的积极性,提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力,鼓励学生踊跃参加课外科技活动,开拓知识面,培养创造精神。这项竞赛也是大学数学教学改革的一个重要方面。

(2) 竞赛内容

竞赛题目一般来源于工程技术和科学管理方面经过适当简化加工的实际问题,不要求参赛者预先掌握深入的专门知识,只需要学过普通高校的数学课程。题目有较大的灵活性供参赛者发挥其创造能力。参赛者应根据题目要求,完成一篇包括模型的假设、建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文(即答卷)。竞赛评委以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表达的清晰程度为主要评卷标准。

(3) 竞赛形式和规则

① 全国统一竞赛题目,采取通讯竞赛方式;

② 竞赛一般在9月初选3天举行;

③ 大学生以队为单位参赛,每队3人,专业不限,研究生不得参加。每队设一名指导教师(或教师组),从事赛前辅导和参赛的组织工作,但在竞赛期间应回避,不得进行指导或参与讨论;

④ 竞赛期间参赛队员可以使用各种图书资料和计算机软件,但不得与队外任何人讨论;

⑤ 工作人员将密封的赛题按时启封发给参赛队员(现在是从网上下载考题与相关数据),参赛队在规定时间内完成答卷,并准时交卷。

(4) 组织形式

① 竞赛由全国竞赛组织委员会主持,负责发起竞赛、拟定赛题、组织全国优秀答卷的复审和评奖、印刷获奖证书、主办全国颁奖仪式等工作。全国竞赛组织委员会每届任期4年,其组成人员由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会负责确定;

② 竞赛分赛区组织进行,原则上一个省(自治区、直辖市)为一个赛区,每个赛区应至少有6所院校的20个队参加(每所院校至多10个队),邻近的省可以合并成为一个赛区。每个赛区建立3人以上的组织委员会,负责本赛区的宣传发动及报名、评阅答卷的组织等工作。组委会成员由各省教委、各省工业与应用数学学会及有关人员组成(没有成立地方学会的,由各省教委与全国竞赛组委会指定的院校协商确定),报全国竞赛组委会备案,并保持相对稳定。未成立赛区的各省院校的参赛队可直接向全国竞赛组委会报名参赛。

(5) 评奖办法

① 各赛区组委会聘请专家组成评阅委员会,评选本赛区的一、二等奖(也可增设三等奖),获奖比例一般不超过三分之一,其余凡完成答卷者均获成功参赛奖;

② 各赛区组委会按规定的比例将本赛区的优秀答卷送至全国竞赛组委会,全国竞赛组委会将聘请专家组成全国评委会,按统一标准从各赛区送交的答卷中评选出全国一、二等奖;

③ 全国与各赛区的一、二等奖均颁发获奖证书,竞赛成绩计入学生档案,对成绩优秀的队给予适当奖励。

2. 阅卷评分大致规则

- | | |
|------------------------|------|
| (1) 首页总结(≠摘要) | 15 分 |
| (2) 总体印象与创新 | 5 分 |
| (3) 模型建立(与题目背景相吻合,有亮点) | 30 分 |
| (4) 模型计算(计算步骤清晰、结果正确) | 30 分 |
| (5) 结果分析(为用户提供可以实行的方案) | 20 分 |

以上评分规则,不是绝对的,仅供参考,尤其是可以作为同学们写论文报告时的参考。

3. 评委的分数

一份论文报告,由 3 个以上的评委评判给分。

假设每个评委评阅 n 份答卷,第 j 个评委的给分是 $\{x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}\}$,最终排序时不是直接用评委的给分排序,而是做了一个变换计算,换算为标准分,第 k 份答卷的第 j 个评委给分是 x_{jk} ,最终获得的排序标准分是

$$x_{jk}^* = (x_{jk} - \bar{X}_j) \frac{\sigma}{\sigma_j} + 60,$$

其中, $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n x_{jp}$ 是第 j 个评委给分的平均分, σ_j 是第 j 个评委给分的标准差, σ 是全体评委给分的标准差。

例如,第 j 个评委给第 k 份答卷的分数 $x_{jk} = 41$,第 j 个评委给分的平均分 $\bar{X}_j = 40$, $\sigma_j = 10$,全体评委的标准差 $\sigma = 30$,则第 k 份答卷的标准分为

$$x_{jk}^* = (41 - 40) \times \frac{30}{10} + 60 = 63,$$

第 k 份答卷的所有评委的分数都换算为标准分,然后求和排序。所以说,同学们的论文报告原始得分是否大于评委给分的平均分很重要,请大家仔细体会。

Matlab 基础知识介绍

Matlab(矩阵实验室)软件包是由美国 MathWorks 公司开发的,主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算的数学软件包。它将数值分析、矩阵计算、科学数据可视化以及非线性动态系统的建模和仿真等诸多强大功能集成在一个易于使用的视窗环境中,为科学研究、工程设计以及必须进行有效数值计算的众多科学领域提供了一种全面的解决方案,代表了当今国际科学计算软件的先进水平。

相对于其他软件包, Matlab 获得的总体评价是:界面不是太友好,但是功能十分强大,是各行各业科学工作者的必备工具。

2.1 简介

Matlab 软件包是 MathWorks 公司于 1989 年推出的一套数值计算软件,它包含总包和若干个工具箱,可以实现数值计算、优化计算、概率统计计算,以及偏微分方程数值解、自动控制、信号处理、图像处理等若干个领域的计算和图形显示功能。

Matlab 提供了两种运行方式: (1) 直接在 Command Window 输入命令, 按 Enter 键执行; 图 2-1 所示画面右边就是 Command Window。

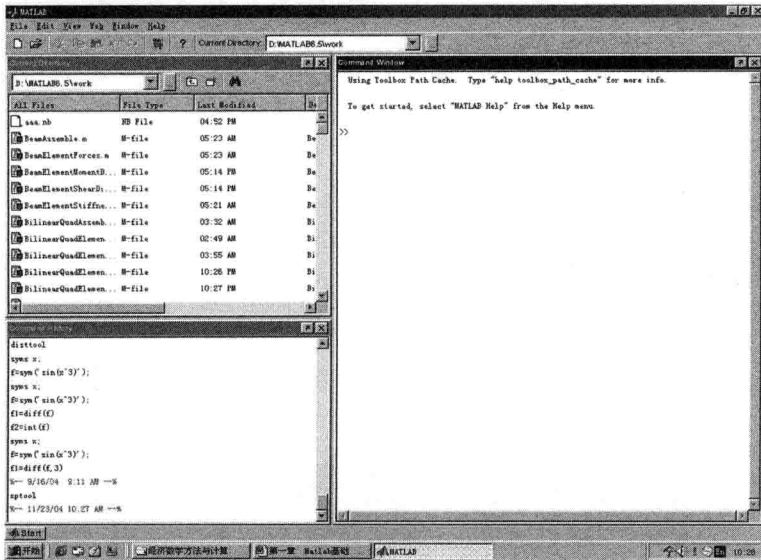


图 2-1

例如,直接输入 $2+3$,按 Enter 键执行(注意,此时若需要换行,按 Shift + Enter 键),得到结果 5(见图 2-2)。

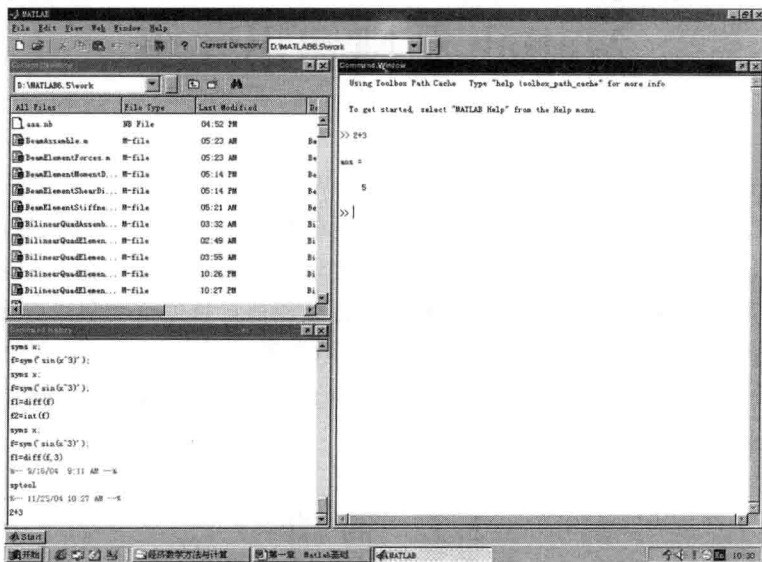


图 2-2

(2) M-文件运行方式

第一步 点击画面左上方、File 下面的白纸形状按键(见图 2-3),新建一个 M-文件(或者依次点击 File → New → M-file)。

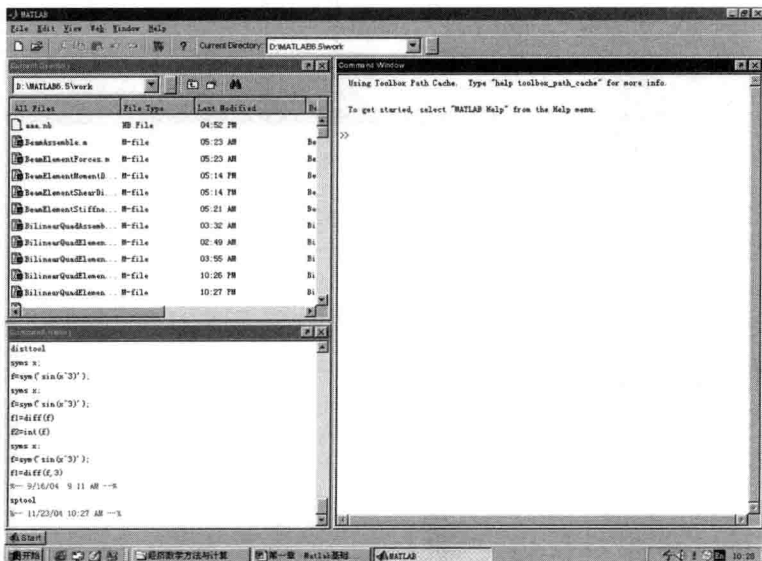


图 2-3

第二步 在这个新建的 M-文件中编辑程序,然后存盘(见图 2-4)。