高等院校教材同步辅导及考研复习用书

燎原教育

丛书主编 马德高

经济应用数学基础（二）

线性代数
辅导及习题精解

（人大 第四版）

本册主编 张天德 姜庆华

$Ax=b$

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

教材习题全解 指导同步学习
考研真题精讲 剖析考研重点

延边大学出版社
Yanbian university press

丛书主编 马德高

经济应用数学基础（二）

线性代数
辅导及习题精解

（人大 第四版）

本册主编 张天德 姜庆华
副 主 编 刘晓红 高夫征
主 审 刘建亚

延边大学出版社
Yanbian university press

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导及习题精解 ：人大四版 / 马德高编著.
－ 延吉 ：延边大学出版社，2012.6(2013.6 重印)
ISBN 978-7-5634-4507-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236774 号

线性代数辅导及习题精解

主编：马德高
责任编辑：林景浩
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**：133002
网址：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433-2732435　　**传真**：0433-2732434
印刷：莒南县汇源印务有限公司
开本：880×1230　1/32
印张：14　**字数**：360 千字
版次：2013 年 6 月第 1 版第 2 次印刷
ISBN 978-7-5634-4507-3

定价：19.80 元

前言

《线性代数》是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程，也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。为了帮助广大高校在校生和正在准备考研的学子学好、复习好《线性代数》这门课程，我们编者编写了这本与中国人民大学赵树嫄编写的《线性代数》(第四版)章节、内容完全同步的《线性代数辅导及习题精解》配套辅导用书，为您系统梳理了知识结构、清晰提炼了重点考点、深入讲解了思路方法、权威提供了课后答案，让您稳步牢固学深、吃透教材知识，融会贯通方法技巧。同时，应广大读者需求，注意紧密联系考研、精讲历年真题，设计同步自测、提供高效练习，让读者在学好教材的同时积极备考硕士研究生入学考试。

全书章节内容设置基本上与教材完全同步，共分五章，每一章又分为若干节，循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解，每一章内容讲完后，再对整章内容重点做一回顾和加深，然后提供该章同步自测题。最后在全书末给出课本所有的习题详细解答。

讲解结构三大部分

一、教材内容讲解　这部分由两块组成：教材知识全解、典型例题解析。

1.教材知识全解　包括两部分：本节知识结构图解、重点及常考点突破

(1)本节知识结构图解　这一部分用直观、形象的图表形式，将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者。便于读者对比各个概念、性质和定理，在比较中加深理解，使知识更加系统化。

(2)重点及常考点突破　这一部分将该节重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来，并用简洁的语言将学习这些重点、考点时需要注意的问题一一点明，让读者抓住重点、有针对性地进行复习。

2.典型例题解析　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题研究的经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

前言

二、每章知识整合 这部分由三块组成：本章知识图解、本章知识总结、本章同步自测。

1. 本章知识图解 用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

2. 本章知识总结 对本章所学的知识进行系统的回顾，帮助读者更好的复习与总结。

3. 本章同步自测 精选部分有代表性、测试价值高的题目（部分题目选自历年全国研究生入学考试试题），以此检测、巩固读者的学习效果，提高应试水平。

三、教材习题详解 该部分放在全书的书末，并对教材中的全部习题作了详细解答，有的习题还给出了一题多解，以提高读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁 直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续 所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研真题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用 本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

教材知识全解+教材习题详解

目录

教材知识全解

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题详解

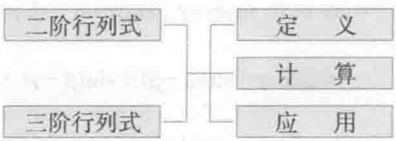
第一章 行列式

行列式是整个线性代数的基础，它要求我们在概念上要清晰，运用时要灵活，对知识的衔接与内在联系要把握好. 在学习时，一方面建议应特别掌握行列式的各种计算方法，熟练进行行列式的计算；另一方面，还应注意它与其他数学知识的结合.

第一节 二阶、三阶行列式

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

2. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$.

3. 本节重点是三阶行列式的计算，在三阶行列式的展开过程中应特别注意各项的正负号.

典型例题解析

基本题型Ⅰ：二阶行列式的计算

【例 1】 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$.

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-(-1)\times2=5$；

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ 1 & x^2-x+1 \end{vmatrix}=(x+1)(x^2-x+1)-x=x^3-x+1$.

方法点击:计算二阶行列式使用其定义即可完成.

基本题型Ⅱ:三阶行列式的计算

【例 2】 计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$.

解:(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=1\times4\times3+2\times(-2)\times0+2\times7\times(-1)-0\times4\times(-1)$

$$-2\times2\times3-7\times(-2)\times1=0;$$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha-\sin\gamma\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$$-\sin\alpha\cos\gamma=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha);$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=0\times0\times0+(-a)\times b\times c+a\times(-b)\times(-c)$

$$-b\times0\times(-b)-a\times(-a)\times0-0\times c\times(-c)=0.$$

方法点击:三阶行列式的计算直接使用对角线规则完成.

基本题型Ⅲ:二阶、三阶行列式的应用

【例 3】 行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,则 a,b 应满足(　　).

(A) $a=b$ 或 $a=-b$　　　　(B) $a=0$ 且 $b=0$

(C) $a=-b$ 且 $a=b$　　　　(D) $a=0$ 或 $b=0$

解:直接把三阶行列式展开计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2-b^2=0$$

则必有 $a=b$ 或 $a=-b$.

故应选(A).

【例 4】 函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________.

解:行列式展开后只有主对角线上三元素的乘积才出现 x^3 项,其系数为

$2\times(-1)\times1=-2$.

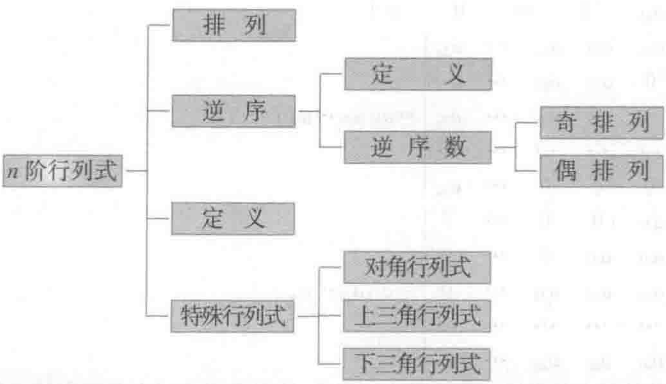
故应填-2.

方法点击:此类型题目不需把行列式的值计算出来,而只考虑行列式的不同行不同列乘积中出现 x^n 的项,然后将它们的系数相加即可.

第二节　n阶行列式

教材知识全解

本节知识结构图解



重点及常考点突破

1. 排列　由 n 个不同数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为**一个 n 级排列**.

2. 逆序与逆序数　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 **i_t 与 i_s 构成一个逆序**. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的**逆序数**,记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 若逆序数为奇数,则称排列为**奇排列**;若逆序数为偶数,则称排列为**偶排列**.

3. 对换　在排列中,将任两元素对调,其余不动,称为**对换**. 对换改变排列的奇偶性. 奇排列变成标准排列的对换次数为**奇数**,偶排列变成标准排列的对换次数为**偶数**.

4. n 阶行列式的定义　　由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,它是 $n!$ 项的代数和,即　$D=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

其中每项是取自 D 中不同行和不同列的 n 个数的乘积，$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，N 是排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

5. 几种特殊行列式的结果

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

(4) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

6. 本节的重点是掌握 n 阶行列式的定义，这是考研中对本节考查的主要目标. 同时，我们还应熟记几种特殊行列式的结果，以备计算行列式时使用.

典型例题解析

基本题型Ⅰ：逆序数的求法

【例 1】 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) $n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1$； (2) $1\ 3\cdots(2n-1)2\ 4\cdots(2n)$；

(3) $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 4\ 2$.

解：(1) $N(n(n-1)\cdots 3\ 2\ 1)=n-1+n-2+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

对 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 奇偶性判断，应分以下情况讨论：

请注意：要分四种情况而不是两种情况讨论

1) 当 $n=4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数；

2)当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数；

3)当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

4)当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数.

(2)排列中前 n 个数 $1,3,5,\cdots,(2n-1)$ 之间不构成逆序，后 n 个数 $2,4,6,\cdots,(2n)$ 之间也不构成逆序，只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序. 因此

$$N(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n))=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

其奇偶性讨论同(1).

(3)因为前 n 个数的逆序数为 0，后 n 个数的逆序数分别为 $0,2,4,\cdots,(2n-2)$. 故

$N(1\ 3\ 5\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots4\ 2)=0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

无论 n 取何值，$n(n-1)$ 一定为偶数，故排列为偶排列.

方法点击：对含字母的排列求逆序数，一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系及其奇偶性.

【例 2】 已知排列 $1r46s97t3$ 为奇排列，则 $r=$_______，$s=$_______，$t=$_______.

解：由于排列为 9 级排列，所以可供 r,s,t 选择的元素有 2,5,8.

不妨令 $r=2,s=5,t=8$，则 $N(124659783)=9$(奇数).

由于对换改变排列的奇偶性，所以有

$r=2,s=5,t=8$ 或 $r=5,s=8,t=2$ 或 $r=8,s=2,t=5$.

故应填 2,5,8 或 5,8,2 或 8,2,5.

【例 3】 设 $N(i_1 i_2\cdots i_{n-1} i_n)=k$，则 $N(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)=$_______.

解：在 n 个元素 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中，任选两个元素 i_s,i_t，则 i_s 与 i_t 必然在排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 和排列 $i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1$ 中的一个排列中构成一个逆序，于是

$$N(i_1 i_2\cdots i_{n-1} i_n)+N(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},$$

由 $N(i_1 i_2\cdots i_{n-1} i_n)=k$ 得 $\quad N(i_n i_{n-1}\cdots i_2 i_1)=\frac{n(n-1)}{2}-k$.

故应填 $\frac{n(n-1)}{2}-k$.

基本题型Ⅱ：利用行列式的定义及对换的性质求行列式中的项

【例 4】 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项，则 i,j 之值应为(　　).

(A) $i=1,j=3$　　(B) $i=2,j=3$　　(C) $i=1,j=2$　　(D) $i=2,j=1$

解：由于五阶行列式的每一项是取自不同行不同列的 5 个元素之积，所以 i,j 只能取 1,2，从而选项(A)、(B)错误. 当 $i=1,j=2$ 时，所讨论项为

$$a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44}=a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$$

其逆序数 $N(13542)=3+1=4$ 为偶数，根据行列式的定义，此时该项带有正号，所

以选项(C)正确.由于对换改变排列的奇偶性,所以选项(D)错误.

故应选(C).

【例5】 写出四阶行列式中所有带负号且包含 a_{23} 的项.

解:把带负号且包含 a_{23} 的项设为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$.要使该项带负号,当且仅当其列标所构成的排列 $i3jk$ 为奇排列.而 i,j,k 只能取1,2,4三个数.不妨设 $i=1,j=2,k=4$,则由 $N(1324)=1$ 知它是一个奇排列.由于对换改变排列的奇偶性,所以可得4312,2341(3在第二个位置不动)也是奇排列.而且,再也没有满足条件的别的奇排列(3在第二个位置不动).因此,所求的项是

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},a_{14}a_{23}a_{31}a_{42},a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}.$$

基本题型Ⅲ:利用定义计算 n 阶行列式

【例6】 用 n 阶行列式的定义直接计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}\text{(其中 }a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n\text{)}.$$

解:由于该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素,由 n 阶行列式定义知,D_n 只含一项 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$,其中元素的下标正好是它们所在行的下标,恰好按自然序排列,而它们所在列的下标构成的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1\ n$,这个排列的逆序数为

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

所以,$D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.

方法点击:本题每行只有一个非零元素,所以只需找出行列式的非零项即可.

【例7】 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}=$______.

解:$D=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{5j_5}$

因为 $a_{11}=a_{14}=a_{15}=0$,所以非零元素中 j_1 只能取2,3;

因为 $a_{41}=a_{44}=a_{45}=0$,所以非零元素中 j_4 只能取2,3;

同样,j_5 也只能取2,3,

又因 j_1,j_4,j_5 各不相同,故 $a_{1j_1},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个要取为零,

于是有 $D=0$.

故应填0.

【例 8】 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}$.

解:设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times4}$,则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=x_1,a_{13}=y_1$,故 $j_1=1,3$;同理由第 2,3,4 行可求得 $j_2=2,4;j_3=1,3;j_4=2,4$. 因此 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成 4 级排列:1234,1432,3214,3412. 从而

$$\begin{aligned} D_4&=x_1x_2x_3x_4-x_1y_2x_3y_4-y_1x_2y_3x_4+y_1y_2y_3y_4\\ &=(x_1x_3-y_1y_3)(x_2x_4-y_2y_4). \end{aligned}$$

方法点击:本题中行列式含零元素较多,所以根据行列式定义找出非零项再求和即可.

【例 9】 证明 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$.

证明:根据行列式的定义,行列式中项的一般形式为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdot\cdots\cdot a_{nj_n},$$

行列式的第 1 行只有 a_{1n} 为非零元素,第 2 行除 $a_{2,n-1}$ 和 a_{2n} 外全为零,…,则行列式只有 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$ 这一项为非零项,而这一项的列标所成的排列的逆序数为

$$N(n,n-1,\cdots,2,1)=\frac{n(n-1)}{2},$$

于是 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdot\cdots\cdot a_{n1}$.

方法点击:本题的证明实际上就是计算等式左边的行列式,而行列式含零较多,从而只需计算非零项即可.

【例 10】 证明 (1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

证明:(1) 由行列式定义知,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4j_5)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$$

假设 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}\neq0$,由题设知 j_3,j_4,j_5 只能等于 4 或 5,从而 j_3,j_4,j_5 中至少有两个相等,这与 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 是1,2,3,4,5 的一个全排列矛盾,

故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=0$,于是 $D=0$.

(2) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

由题设,要使 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}\neq0$,$j_1,j_2$ 必须取1或2,而 $j_1j_2j_3j_4$ 是1,2,3,4 的一个全排列,故 j_3,j_4 取3或4,于是

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ &\quad+(-1)^{N(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+(-1)^{N(2143)}a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}. \end{aligned}$$

而 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})(a_{33}a_{44}-a_{43}a_{34})$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}+a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$$

所以等式成立.

方法点击:利用行列式定义展开后,行列式的项中有一元素为零时,该项值为零,便可简化结果.

第三节 行列式的性质

教材知识全解

本节知识结构图解

行列式的性质 —— 行列式的计算

重点及常考点突破

1. 行列式经转置后其值不变,即 $D^T=D$.

2. 行列式中任意两行(列)互换后,该行列式的值改变符号.

推论 如果行列式中两行(列)的对应元素完全相同,则该行列式的值等于零.

3. 用数 k 乘行列式某一行(列)中所有元素,等于用 k 去乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

推论 1 如果行列式某行(列)的所有元素有公因子,则此公因子可以提到行列式外面.

推论 2 如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式的值等于零.

4. 如果将行列式的某行(列)的每个元素都写成两个数的和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i\text{ 行})$$

则此行列式可以写成两个行列式的和,即

$$D=D_1+D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 如果将行列式某一行(列)的元素都写成 $m(>2)$ 个数的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

5. 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加于另一行(列)对应位置的元素上,则行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{s1} & a_{i2}+ka_{s2} & \cdots & a_{in}+ka_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. 本章的重点是行列式的性质和计算,难点是确定行列式的类型,以便找到对应的计算方法.

典型例题解析

基本题型Ⅰ:直接使用行列式的性质计算

【例 1】 设四阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 4 \\ \frac{2b+c}{3} & \frac{2c+a}{3} & \frac{2a+b}{3} & 2 \end{vmatrix}$,则 $D_4=$______.

解:$D_4 \xlongequal{r_3+2r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ 2b+c & 2c+a & 2a+b & 6 \\ \frac{2b+c}{3} & \frac{2c+a}{3} & \frac{2a+b}{3} & 2 \end{vmatrix}=0$

故应填 0.

【例 2】 行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ p_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=$______.$(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0)$

解:第二列$\times(-\frac{p_1}{a_1})$,第三列$\times(-\frac{p_2}{a_2})$,…,第 n 列$\times(-\frac{p_n}{a_n})$加至第一列得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{s_i p_i}{a_i} & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i p_i}{a_i})a_1 a_2\cdot\cdots\cdot a_n$$

故应填$(a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{s_i p_i}{a_i})a_1 a_2\cdot\cdots\cdot a_n$.

【例 3】 计算 $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ a_3-b_1 & a_3-b_2 & \cdots & a_3-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

解:第一行乘以(-1)加到其他各行上去,并每行提取公因子得