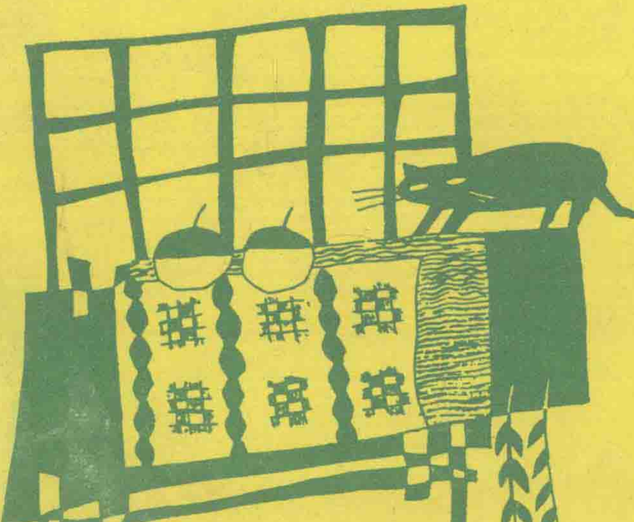
湖南省成人中专统编教材

数学(下)

湖南省教育委员会成人教育处主编

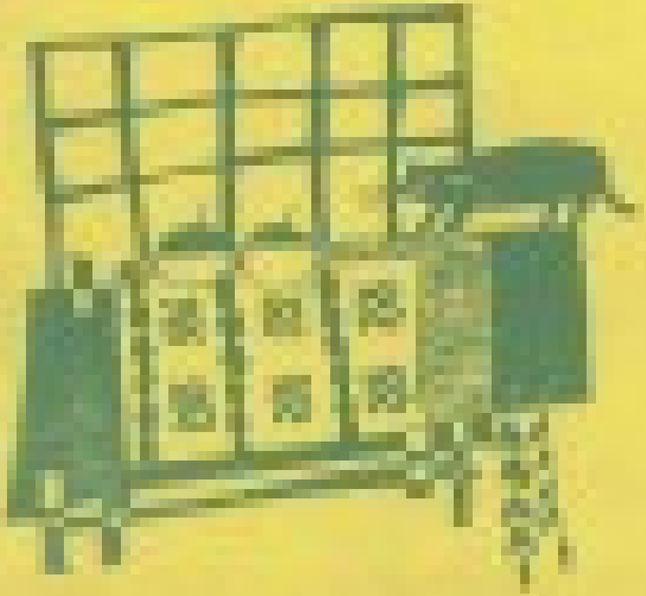


湖南教育出版社

湖南省成人中专统编教材

数　　　学

湖南省教育委员会成人教育处主编



湖南教育出版社

湖南省成人中专财会专业统编教材

数　学 下册

湖南省教育委员会成人教育处主编

湖 南 教 育 出 版 社

湖南省成人中专财会专业统编教材

数　学下册

湖南省教育委员会成人教育处主编

责任编辑：王华玲

湖南教育出版社出版发行

湖南望城湘江印刷厂印刷

787×1092 毫米　32 开　印张：14.5　字数：340,000

1995 年 12 月第 1 版　2000 年 1 月第 6 次印刷

ISBN7—5355—2332—3/G·2327

定　价：12.10 元

主　编　朱天锐

编　者　朱天锐　黄平安　周局荣

朱秀兰　万长根　束强中

主　审　苏衡彦　刘　斌

前　言

为了加强教学管理，提高教育质量，培养适应社会主义建设和市场经济需要的中等专门合格人才，我们组织编写了成人中专财务会计(含计算机财会及各种行业性财会)专业教材，包括《财经应用写作》、《企业管理基础知识》、《会计基础》、《工业企业会计》、《商业企业会计》、《审计基础》、《经济法基础知识》、《财政与金融基础知识》、《税收基础知识》、《统计基础》、《涉外会计》、《企业财务管理》、《会计模拟实习》、《电算会计》、《语文基础知识》、《数学》、《政治》等17门课程，实行全省统一教材、统一教学计划、统一命题考试。财会专业统编教材由具有副高以上职称和教学经验丰富的专家、教授担任主编和主审。教材体现了科学性、先进性、实用性相结合和成人教育的特点。这套教材适用于独立设置的各类成人中专和普通中专、干部中专成人班财会专业的教师和学生使用，还可以作为财会人员中等教育培训的教材和管理人员业务自学参考书。

湖南省教育委员会成人教育处

1994年4月

目　录

第十二章　数列　数学归纳法

第一节　数　　列

一、数列的概念

我们来看下面的例子.

【例 1】(1) 某工厂有一堆钢管（图 12—1），如果从最上面的一排起，各排钢管的根数依次排列起来，就得到一列数：

3，4，5，6，7，8

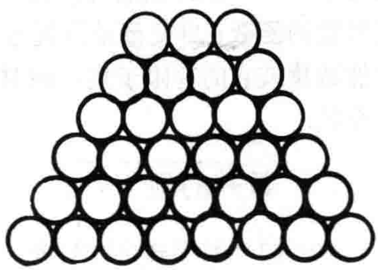


图 12—1

(2)把自然数的倒数，依次排列起来，就得到一列数：

$1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，\frac{1}{4}……\frac{1}{n}$

(3) 100 以内的质数从小到大依次排列成一列数：

2、3、5、7、……97

(4) 零和 -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，…排列成一列数：

0，-1，0，1，0，-1，0，1…

(5) 某厂日产 A 产品 200 台，则从年初起，逐日累计 A 产品的产量数为：

200，400，600，800…

（6）把 $\sqrt{2}$ 的不足近似值，按精确到 0.1，0.01，0.001…的顺序排列，得到一列数：

1.4，141，1.414…

（7）把正偶数减去它前面的奇数的差依次排列起来，得到一列数：

1，1，1，1，…

像上面的例子中，按一定次序排列的一列数叫做数列. 数列中，每一个确定的位置上都有一个确定的数，如上面的数列（5）里第三个位置上的数是 600，数列（6）里第三个位置上的数是 1.414. 因此，我们可以将一个数列里的数看作是它所在位置号数的**函数**；自变量是位置号数（序号），它所取值的集合是自然数集或它的有限子集，而对应的函数的值，就是数列里的各个数.

二、数列的项

数列的一般形式可以写成

$$a_1，a_2，a_3 \cdots a_n \cdots$$

其中 a_n 是数列的第 n 项，a_n 的下标 n 叫做序号. 有时我们把上面的数列简记作 $\{a_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的一个项. 数列的每一项与它的序号有下面的对应关系：

序号 1　2　3　4…n

数列的项 a_1　a_2　a_3　$a_4 \cdots a_n$

如果一个数列的第 n 项 a_n 与项序号 n 之间的关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫这个数列的**通项公式**. 例如数列（1）的通项公式是 $a_n = n + 2$（$n \leqslant 6$）.

知道了一个数列的通项公式，那么只要依次用1，2，3，4…去代替公式里的n，就可以求这个数列的各项. 例如，如果已知一个数列的通项是$a_n=2n$，它的各项依次是$a_1=2\times1=2$，$a_2=2\times2=4$，….

【例 2】写出数列$\{(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\}$的前8项.

解　依次用$n=1$，2，3，4，5，6，7，8代入$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}$得

$$a_1=-\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{5},\ a_3=-\frac{1}{7},\ a_4=\frac{1}{9},\ a_5=-\frac{1}{11},$$

$$a_6=\frac{1}{13},\ a_7=-\frac{1}{15},\ a_8=\frac{1}{17}$$

所以所求数列的前8项为

$$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{11},\ \frac{1}{13},\ -\frac{1}{15},\ \frac{1}{17}.$$

【例 3】函数$f(n)=2^n-1$，求自变量依次为$n=1$，2，3，…所得的函数值所组成的数列.

解　$a_1=f(1)=2^1-1=1$

$a_2=f(2)=2^2-1=3$

$a_3=f(3)=2^3-1=7$

……

所以所求的数列为：

1，3，7，…2^n-1….

由上述例子可以看出：数列可以看作一个定义域为自然数集N（或它的子集$\{1, 2, \cdots n\}$）的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值. 函数可以用图象来表示，数列也可以用图象来表示，由于自变量仅仅取自然数，所以数列的图象是由一群孤立的点表示.

知道了一个数列的前几项，要求它的通项公式，往往是从研究数列的项与项之间，数列的各项与其所对应的项数之间的内在联系中去探求规律，进而写出第 n 项的表达式，也就是数列的通项公式.

【例 4】求数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

（1）1，3，5，7…

（2）1，−2，3，−4，…

（3）$-1\cdot 2$，$2\cdot 3$，$-3\cdot 4$，$4\cdot 5$…

（4）$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$…

（5）$\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$…

解　（1）前几项 1，3，5，7 都是项数的 2 倍减 1，所以通项公式是

$$a_n=2n-1$$

（2）前几项 1，−2，3，−4 每项的绝对值都等于项数，而奇数项为正，偶数项为负，所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot n$$

（3）前几项 $-1\cdot 2$，$2\cdot 3$，$-3\cdot 4$，$4\cdot 5$ 的绝对值都等于项数与项数加 1 的积，而奇数项为负，偶数项为正，所以它的一个通项公式是

$$a_n=(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)$$

（4）前几项 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ 的绝对值都等于项数的倒数，而奇数项为正，偶数项为负. 所以通项公式是

$$a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$$

（5）前几项$\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$的分母都等于项数加1，分子都等于分母的平方减1，所以它的一个通项公式是

$$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}=\frac{n\ (n+2)}{n+1}.$$

应该注意的是，由于一个函数关系并不一定可以用一个公式来表示，所以并不是所有数列都有一个通项公式．另外，有时仅给出数列的前几项，而没有给出其他的规律时，数列是不确定的，因而其通项公式也不是唯一的．

项数有限的数列叫做有穷数列，例1中的（1）、（3）是有穷数列．项数无限的数列叫做无穷数列，例1中的（2）、（4）、（5）、（6）、（7）是无穷数列．

一个数列里，如果第2项起，每一项都大于它的前面的一项，这个数列就叫递增数列，如例4中的（1）、（5）；如果从第2项起，每一项都小于它的前面一项，这个数列就叫做递减数列，如例1中的（2）．

一个数列里，如果第2项起，有些项大于它的前一项，有些项却小于它的前一项，我们把这种数列叫做摆动数列，如例4中的（2）、（3）．

数列的每一项都相等的叫做常数列，如例1中的（7）．

如果数列的任何一项的绝对值都小于某一个正数，即$|a_n|<M,M>0$这个数列就叫有界数列．如果不存在一个正数M使$|a_n|<M$成立，这个数列就叫无界数列．

练 习 题 12—1

1．根据下列通项公式，求出数列的第4项和第8项：

（1）$a_n=3n$；　　（2）$a_n=(-1)^n\frac{n-1}{2n+1}$；

(3) $a_n=2n^2+n+1$；　　　(4) $a_n=\sin\frac{n\pi}{3}$；

(5) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n+1}$；(6) $a_n=\frac{2n}{3^n}$.

2. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 2，4，6，8；　　　(2) -1，3，-5，7；

(3) $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{9}$；　　　(4) 2，$-\frac{3}{2}$，$\frac{4}{3}$，$-\frac{5}{4}$；

(5) $1-\sqrt{3}$，$3-\sqrt{5}$，$5-\sqrt{7}$，$7-\sqrt{9}$.

3. 已知数列 $1\cdot3$，$2\cdot4$，$3\cdot5$，$\cdots n\cdot(n+2)$，$\cdots$

(1) 求这个数列的第 8，16，30 项；

(2) 下列各数是不是这个数列的一项？如果是的话，是第几项？

80，100，120，255，360，575.

第二节　等差数列

一、等差数列的概念

观察下面三个数列：

(1) 2，4，6，8，10…

(2) 4，1，-2，-5，-8…

(3) $\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$…

这三个数列有一个共同的特点：每个数列里，从第二项开始，后面一项减去它前面一项的差是一个常数，这个常数在数列（1）里是 2，在数列（2）里是-3，在数列（3）里是 0.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项

的差都等于一个常数，那么这个数列就叫**等差数列**，这个常数叫做这个等差数列的公差，通常用字母 d 来表示. 例如，上面的等差数列（1）、（2）、（3），分别有 $d=2$，$d=-3$，$d=0$.

在等差数列中，公差大于零的数列是递增数列；公差小于零的数列是递减数列；如果公差等于 0，则是常数列.

二、等差数列的通项公式

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots a_n \cdots$$

是等差数列，它的公差是 d，那么

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

……

由此可见，等差数列从第 2 项起，每一项都等于第 1 项加上公差的若干倍，这个倍数等于这一项的项数减 1，即

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

这个式子就是等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. 有了通项公式，依次用自然数 1，2，3…代换公式里的 n，就可以求出这个数列里的各项.

【例 1】求等差数列 2，5，8，…的第 15 项.

解　因为 $a_1=2$，$d=a_2-a_1=5-2=3$

所以 $a_{15} = a_1 + (n-1)d = a_1 + 14d$

$$= 2 + 14 \times 3 = 44.$$

【例 2】求等差数列 9，4，-1，…的第 9 项.

解　$a_1=9$，$d=a_2-a_1=4-9=-5$

所以　$a_9 = a_1 + (n-1) \cdot d = 9 + (9-1) \times (-5)$