线性代数

XIANXING DAISHU

王茂南　曹菊生　方　正　恽平南 ● 主编

苏州大学出版社

线性代数

主　编　王茂南　曹菊生
　　　　方　正　恽平南
副主编　孙曦浩　张建华

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 王茂南等主编. —苏州：苏州大学出版社，2014.11
ISBN 978-7-5672-1158-2

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 272192 号

线性代数
王茂南　曹菊生　方正　恽平南　主编
责任编辑　肖　荣

苏州大学出版社出版发行
（地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006）
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
（地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：215300）

开本 787 mm×960 mm　1/16　印张 10.25　字数 196 千
2014 年 11 月第 1 版　2014 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1158-2　定价：20.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com

前　言

线性代数是理工、经济管理等学科大学生的一门重要的数学基础课程，是学习后续课程的工具，对培养大学生的计算能力和抽象思维能力十分必要. 近年来，随着科学技术突飞猛进的发展，线性代数的应用已广泛渗透到经济、金融、信息、社会等各个领域，人们已越来越深刻地意识到线性代数教材应该充分考虑大学生的特点，在帮助大学生掌握相关代数知识的同时，还要提高其用代数的方法思考、解决实际问题的能力. 为此，我们结合教育部教学指导委员会所制定的新的基本要求，在保持传统教材优点的基础上，对原体系进行了调整与优化，以便于组织教学.

本教材在内容的处理上，注重理论联系实际，加强概念与理论的背景及应用的介绍，通过对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，使教材内容更突出主题，更适合学生的思维特点. 例如，利用归纳法定义行列式，避开了逆序的概念；矩阵的各种运算自成章节，从而更突出了本课程的主旨. 再如，向量组的线性相关性历来是学生学习本课程的难点，有别于传统的处理方式，本书先讨论矩阵的秩，再利用矩阵的秩研究向量组的线性相关性. 本教材淡化了线性空间的处理方式，简要介绍了线性空间的特殊情况"向量空间"，通过向量空间统一了线性方程组的解的讨论与求解，将传统教材中过于分散的方程组进行了统一. 教材内容由易而难地展开，既有利于学生的理解，也有利于教师组织课堂教学. 另外，本教材重视例题和习题的设计、选配，例题概括面广，习题区分有层次，且书末附有习题的答案. 教材中选学部分内容采用五号仿宋字体，可供有兴趣的读者参考.

本书可作为高等院校相关专业的教材或教学参考书，也适用于自学，使用比较灵活. 32～36 学时可讲授 1～5 章，42～54 学时可授完全书.

本书由王茂南、曹菊生、方正、恽平南主编，孙曦浩、张建华、刘维龙、金锡嘉、刘琪、庄桂芬、张筛艳、秦云、沈莞蕾、袁玩贵等参与了编写，全书由曹菊生统稿和审阅. 本书在编写过程中得到了编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢.

由于编者水平所限，书中缺陷和错误在所难免，诚请广大读者批评指正.

编　者

2014 年 10 月

目 录

第一章　行 列 式

行列式是线性代数中的一个重要概念，它广泛应用于数学、工程技术及经济等众多领域. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

§1　n 阶行列式的定义

一、二阶行列式

考虑如下二元线性方程组的求解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1.1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (1.2)\end{cases}$$

将方程(1.1)乘以 a_{22} 减去方程(1.2)乘以 a_{12} 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

将方程(1.2)乘以 a_{11} 减去方程(1.1)乘以 a_{21} 得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为方便，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$，称其为二阶行列式，并规定其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆. 图 1-1 中实线称为主对角线,虚线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

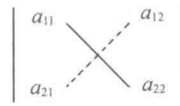

图 1-1

利用二阶行列式的定义,上述二元线性方程组的解可表述为

若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

引进二阶行列式的定义后,二元线性方程组的解具有非常简洁的形式:分母 D 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称系数行列式);x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式;x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式. 尤为重要的是,该形式可推广到 n 元线性方程组,即后面将介绍的 Cramer 法则.

例 1 求二元线性方程组$\begin{cases} 2x_1+3x_2=5, \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$的解.

解 因为$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-8\neq 0$,所以

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-8}{-8}=1.$$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.3}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \tag{1.4}$$

称(1.4)式为数表(1.3)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积,其规律满足如下的对角线法则(图 1-2):实线(平行于主对角线)相连的三个元素的乘积前是正号,虚线(平行于副对角线)相连的三个元素的乘积前是负号.

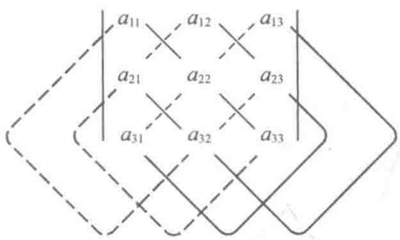

图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times9+1\times3\times1+1\times1\times4-1\times3\times4-1\times1\times9-1\times2\times1 \\ &= 18+3+4-12-9-2=2. \end{aligned}$$

例 3 设有三维空间中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)$,定义它们的向量积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 为向量

$$(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k},$$

由三阶行列式的定义,有

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标轴上的单位坐标向量.

对(1.4)式恒等变形,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

上式表明,有了二阶行列式的定义,就可以按(1.5)式定义三阶行列式.

三、n 阶行列式

将记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,记作 D, D_n 或 $\det(a_{ij})$,其中 a_{ij} 为行列式 D 的第 i 行第 j 列位置上的元素.

利用类似三阶行列式(1.5)式的归纳法定义可得行列式 D 是一个数.为此先定义行列式 D 中元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的余子式与代数余子式.

定义 1.2 将 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列删去后,剩下的$n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的**代数余子式**.

例 4 在三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中,元素 2 的余子式为 $M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -6$,代数余子式为 $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 6$.元素 7 的余子式与代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{vmatrix}=-3,\ A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=-3.$$

于是三阶行列式 D_3 写成(1.5)式的形式为

$$D_3=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

按此可归纳定义 n 阶行列式.

定义 1.3　n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}. \tag{1.6}$$

例 5　证明下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证　由行列式的定义(1.6)式,得

$$D_n=a_{11}A_{11}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & 0 & \cdots & 0\\a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & 0 & \cdots & 0\\a_{43} & a_{44} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}.$$

依此类推,可得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 6　证明上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 用数学归纳法.因为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22},$$

所以当 $n=2$ 时等式成立.假设对一切 $n-1$ 阶上三角行列式结论均成立,则由行列式的定义得

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

注意到 $M_{1j}(j=2,3,\cdots,n)$ 为 $n-1$ 阶上三角行列式,且对角线上有元素为 0,由假设可知 $M_{1j}=0$,即 $A_{1j}=0(j=2,3,\cdots,n)$.再由假设知

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

由此便得 $D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

特别地,n 阶主对角行列式(非主对角线上元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

§2 行列式的性质

利用行列式的定义,可以计算低阶或一些特殊行列式,但对一般 n 阶行列式的计算就不适用.因此,需要讨论行列式的性质.

定理 1.1 行列式可以按它的第一列展开,即有

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}. \tag{2.1}$$

证 对行列式的阶数 n 使用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$ 成立.

假设对所有 $n-1$ 阶行列式命题均成立，由 n 阶行列式的定义

$$D_n = a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} M_{1j}.$$

M_{1j} 是 $n-1$ 阶行列式，由归纳假设，M_{1j} 可以按第一列展开，注意到 M_{1j} 去掉第 $i-1$ 行第 1 列后所得余子式恰是余子式 M_{i1} 中去掉第 1 行第 $j-1$ 列后所得的余子式，因此，M_{1j} 中元素 a_{i1} 的代数余子式为

$$(-1)^{(i-1)+1} M_{1j,i1} \quad (i=2,3,\cdots,n),$$

而 M_{i1} 中元素 a_{1j} 的代数余子式为

$$(-1)^{1+(j-1)} M_{1j,i1} \quad (j=2,3,\cdots,n).$$

因此

$$\begin{aligned} D_n &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{(i-1)+1} M_{1j,i1} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{n} a_{1j}a_{i1}(-1)^{i+j+1} M_{1j,i1} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{i+1} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^{(j-1)+1} M_{1j,i1} \\ &= a_{11}A_{11} + \sum_{i=2}^{n} a_{i1}A_{i1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}. \end{aligned}$$

定理证毕.

定义 1.4 行列式 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的转置行列式.

由定理 1.1 即得下面的性质.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由此性质可知,行列式的对行成立的性质,对列也同样成立,反之亦然. 以下证明只对列进行验证.

性质 1.2 互换行列式的两列(或行),行列式变号.

证 对行列式的阶数 n 使用数学归纳法,且对列的交换进行证明.

当 $n=2$ 时,$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

假设对任意 $n-1$ 阶行列式结论均成立,下面证明对 n 阶行列式结论也成立.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 D 的第 k 列与第 $k+1$ 列交换后得行列式

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

于是

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}+\cdots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}, \tag{2.2}$$

$$\overline{D}=(-1)^{1+1}b_{11}N_{11}+\cdots+(-1)^{1+i}b_{1i}N_{1i}+\cdots+(-1)^{1+n}b_{1n}N_{1n}, \tag{2.3}$$

其中 M_{1i} 与 N_{1i} 分别是 D 与 $\overline{D}$ 中元素 a_{1i} 与 b_{1i} 的余子式.

当 $i\neq k,k+1$ 时,$b_{1i}=a_{1i}$,由归纳假设,$N_{1i}=-M_{1i}$,因此

$$(-1)^{1+i}a_{1i}M_{1i}=-(-1)^{1+i}b_{1i}N_{1i}.$$

当 $i=k$ 或 $k+1$ 时,$a_{1k}=b_{1,k+1}$,$a_{1,k+1}=b_{1k}$,且有 $M_{1k}=N_{1,k+1}$,$M_{1,k+1}=N_{1k}$,于是

$$(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k}=(-1)^{1+k}b_{1,k+1}N_{1,k+1}=-(-1)^{1+(k+1)}b_{1,k+1}N_{1,k+1},$$

$$(-1)^{1+(k+1)}a_{1,k+1}M_{1,k+1}=(-1)^{1+(k+1)}b_{1k}N_{1k}=-(-1)^{1+k}b_{1k}N_{1k}.$$

因而(2.2)式与(2.3)式相差一个因子(-1),故 $\overline{D}=-D$.

其次证明,交换行列式的任意两列,行列式变号.

设 $j=i+r>i$,如果要交换第 i 列与第 $i+r$ 列,可以逐步把第 i 列和它右边相邻的列交换,最后换到第 $i+r$ 列的右边,然后再把 $j-1$ 列和它左边相邻的列交换,最后换到第 $i+1$ 列的左边.注意到,一共交换了 $2r-1$ 次相邻列,由上述讨论便得

$$\overline{D}=(-1)^{2r-1}D=-D.$$

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_j 表示行列式的第 j 列,交换 i,j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$,交 i,j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1.1 如果行列式 D 的两列(或行)完全相同,那么此行列式为零.

证 交换这相同的两列,有 $D=-D$,故 $D=0$.

定理 1.2 行列式可以按它的任一行(或列)展开,即有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{2.4}$$

或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{2.5}$$

证 下面仅证(2.4)式,(2.5)式由读者完成.

将 D 的第 i 行与它前面的行逐行交换,使它成为第 1 行,同时其余各行的顺序保持不变,这样做了 $i-1$ 次相邻行的交换,由性质 1.2 知所得行列式是 D 的 $(-1)^{i-1}$ 倍.然后将所得行列式按第 1 行展开,即有

$$(-1)^{i-1}D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{1+k}M_{ik},$$

因而

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i-1}(-1)^{1+k}M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

由定理 1.2 及推论 1.1,立即得下面的推论.

推论 1.2 行列式的某行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \tag{2.6}$$

或
$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j). \tag{2.7}$$

综合定理 1.2 与推论 1.2 可得

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

由定理 1.2 立即得下面的性质:

性质 1.3 行列式的某一行(或列)的所有元素都乘以 k 所得的新行列式等于原行列式乘以 k.

第 i 行(或列)乘以 k,记作 $r_i \times k$(或 $c_i \times k$).

推论 1.3 行列式的某一行(或列)中所有元素的公因子可以提到行列式记号外面.

第 i 行(或列)提出公因子 k,记作 $r_i \div k$(或 $c_i \div k$).

推论 1.4 若行列式中有两行(或列)元素成比例,则该行列式为零.

性质 1.4 若行列式的某一列(或行)都是两数之和,如第 j 列的元素都是两数之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+b_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+b_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+b_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

利用性质 1.4 及推论 1.4 可得如下性质.

性质 1.5 将行列式的某一列(或行)的各元素乘以同一个数后加到另一列(或行)的对应元素上去,行列式不变.

以数 k 乘以第 j 列加到第 i 列上,记作 $c_i + kc_j$,以数 k 乘以第 j 行加到第 i

行上，记作 r_i+kr_j. 例如，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_i+kc_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

§3　行列式的计算

性质 1.2、性质 1.3 及性质 1.5 介绍了行列式关于行或列的三种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j, r_i\times k, r_i+kr_j$ 和 $c_i\leftrightarrow c_j, c_i\times k, c_i+kc_j$，利用这些运算可简化行列式的计算. 计算行列式常用的一种方法是利用性质 1.5 化行列式为上三角行列式，从而得到行列式的值.

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解

$$D \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_2]{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$