

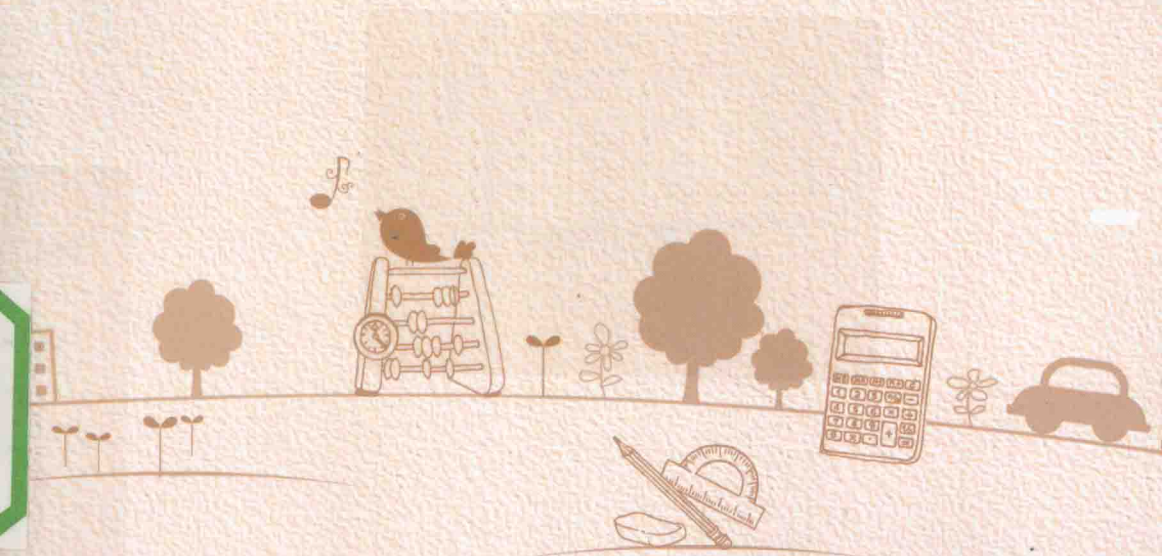


快乐阅读书屋

项昭 分册主编  
严虹 编 著

# 骰子掷出的学问 —— 概率

happy reading 数学知识类



贵州出版集团  
贵州人民出版社

# 骰子掷出的学问

——概 率

严 虹 编著



贵州出版集团  
贵州人民出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

骰子掷出的学问——概率 / 严虹编著. —贵阳:

贵州人民出版社, 2013.9

ISBN 978-7-221-11370-2

I. ①骰… II. ①严… III. ①概率-普及读物

IV. ①O211.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 210699 号

# 骰子掷出的学问——概率

严虹 编著

---

出版发行	贵州出版集团 贵州人民出版社
地 址	贵阳市中华北路 289 号
责任编辑	徐 一
封面设计	熊 锋
印 刷	贵阳经纬印刷厂
规 格	850mm × 1168mm 1/16
字 数	140 千字
印 张	9.5
版 次	2014 年 7 月第 1 版
印 次	2014 年 7 月第 1 次印刷

---

书 号: ISBN 978-7-221-11370-2 定 价: 19.00 元

# 卷首语

“2012年9月25日,天津彩市出现了一条爆炸性新闻,西青区08020体彩网点一举中出了11注七星彩头奖,总奖额高达4755万多元。”看到这则报道,你是否会惊叹——他们的运气真是太好了!那么,中奖者到底有多幸运呢?我们试着用具体的数字来诠释一下。

根据游戏规则,一等奖需要7个投注号码与开奖号码全部相符且排列一致。假设开奖号码是1234567,那么第一个数码从0至9的数字中摇出“1”的机会是 $\frac{1}{10}$ ,第二个数码的机会也是 $\frac{1}{10}$ ,……依此类推,要顺序摇出“1234567”的机会是 $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10000000}$ 。

这个机会到底有多大?我们凭经验来分析一下,当我们抛掷一枚质地均匀的硬币时,正面朝上的机会是 $\frac{1}{2}$ ;连续抛掷两次,都是正面朝上的机会是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ;……请你试着猜想一下, $\frac{1}{10000000}$ 大约相当于连续抛掷几次硬币,都是正面朝上呢?

哈哈,答案是24次!也就是说,买一注七星彩要中一等奖的机会大约等于连续抛掷24次硬币均为正面朝上的机会,这是一

件几乎不可能发生的事情,却恰好发生了!

对于广大的彩民朋友们而言,彩票能否中奖在购买之前是不能确定的。其实,在日常生活中,我们无时无刻不在面对这类不确定的事件,伴随它们的风险也无处不在。在保险、风险投资、管理决策等许多领域,常常会遇到这样的问题——如何在不确定性的情况下做出正确的决策?而对于不确定性现象的量化处理是做出决策的基础,概率就是对此类事件出现的可能性进行度量的有效方法。

本书将带领我们去了解在各个历史时期人们如何用不同的方法来计算此类事件出现的可能性的的大小,一起经历数学家在研究概率时的成功与艰辛!

当然,我们还会告诉你,我国唐朝时期流行的行酒令游戏是不是公平,西方著名的赌金分配风波是怎么回事儿,神奇的圆周率如何通过实验的方法得到近似值,等等许多你所不知道的内容。

那么,亲爱的读者朋友,你准备好了吗?让我们一起进入奇妙的可能性世界中去探险,从许许多多的偶然事件背后去寻找其中隐藏的必然规律吧!

# 目 录

第一章 我们生活在可能性世界中 .....	(001)
第二章 随机性游戏产生的问题 .....	(010)
一、从骰子游戏谈起 .....	(010)
二、如何判断游戏是否公平 .....	(014)
三、赌金分配引起的概率思考 .....	(020)
第三章 探索偶然事件中的必然规律 .....	(035)
一、随机世界中隐藏的规律 .....	(035)
二、从规律中总结的原理 .....	(047)
第四章 逐渐系统化的概率科学 .....	(057)
一、计算概率的基本方法 .....	(057)
二、期望,把握机会的可能性计算 .....	(072)
三、使用概率的法则 .....	(082)
第五章 生活中有趣的概率现象 .....	(090)
一、难以置信的生日问题 .....	(090)

001

骰子掷出的学问——概率





二、为什么赌场总是赢 .....	(095)
三、抽签先后无所谓 .....	(100)
四、有奖游戏中的玄机 .....	(103)
<b>第六章 用概率求圆周率的启示 .....</b>	<b>(106)</b>
一、一起来做个试验吧 .....	(107)
二、这种方法真的可信吗 .....	(110)
三、用概率求圆周率的多种方法 .....	(119)
<b>第七章 概率发展的今天 .....</b>	<b>(123)</b>
一、走向成熟的概率学 .....	(123)
二、现实生活中的概率运用 .....	(134)

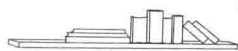
# 第一章

## 我们生活在可能性世界中

大家好，我是本册书的引导员——夕夕，请大家跟我一起准备进入奇妙的可能性世界吧。



如果有人问你明天会不会下雨，你会怎样回答？如果你买了一张彩票，你认为自己中奖的可能性有多大？抛掷一枚6面的骰子，你能提前知道哪一面朝上吗？在生活中我们经常会遇到这样一类问题，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，在事情发生之前不能预知确切的结果，这种现象，我们称之为**偶然现象**或**随机现象**。与之对应的另一种现象是在一定条件下必然出现的现象，称之为**必然现象**或**确定性现象**。例如，太阳一定是从东边升起的；带异性电荷的小球必然相互吸引；平面上矩形的面积必为长乘以宽等等。这些现象有一个共同的特点：它们的变化规律是确定的，一定的条件必然导致某一结果，这种关系可以用公式或者定律来表示。然而对于随机现象，很难用一个确定的公式来描述其变化特征，但是随机性中仍然蕴含着规律性。







在随机现象中,抛掷一枚骰子,骰子的六个面上分别刻有1到6的点数。考虑以下这些问题:

可能出现哪些点数?

出现的点数大于0吗?

出现的点数会是7吗?

我们可以在同样条件下重复进行掷骰子实验。从实验结果可以发现:每次掷骰子的结果不一定相同,从1到6的每一个点数都可能出现,所有可能的点数共有6种,但是事先不能预料掷一次骰子会出现哪一种结果;

出现的点数肯定大于0;

出现的点数绝对不会是7。

在一定的条件下,有些事件必然会发生。例如“出现的点数大于0”,这样的事件称为必然事件。相反的,有些事件必然不会发生,例如“出现的点数是7”,这样的事件称为不可能事件。必然事件和不可能事件都是确定的。

然而,在一定的条件下,有些事件有可能发生,也有可能不发生,事先无法确定。这类可能发生也可能不发生的事件,称为**随机事件**。我们生活的世界,充满了不确定性。例如,任意抛掷一枚硬币,“正面朝上”是随机事件,它可能发生,也可能不发生;拨打查号台,“线路接通”是随机事件,它可能发生,也可能不发生(占线)。人们虽然能够精确地预测尚未发生的确定现象,却难以预测尚未发生的随机现象。我们人类就生活在这种随机事件的海洋里。可以利用图1-1来表示事件发生的可能性:

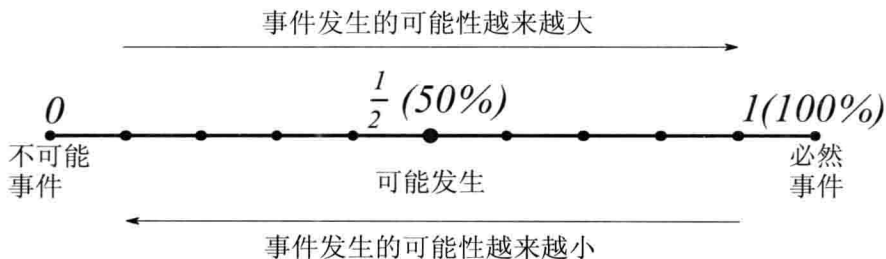


图 1-1

一般地说,随机事件发生的可能性是有大小的,不同的随机事件发生的可能性的 size 有可能不同。



在我们的日常生活中有多种有关可能性大小的说法。你能举出一些例子吗？

例如新生婴儿可能为男孩,也可能为女孩,但生男孩的可能性可以用男孩出生率来度量;购买彩票后可能中奖,可能不中奖,但中奖的可能性大小可以用中奖率来度量;抽取一个产品可能为合格品,也可能为不合格品,但产品质量可以用不合格品率来度量。于是,我们把可能性大小的数量表示叫做**概率**。

003

在我国古代历史故事中,也蕴含了不少的随机现象,闪现出古人智慧的光芒。我们先来看一则寓言故事<sup>①</sup>:



从前,楚国有一个名叫养由基的人,是一个射箭能手,他距离柳树一百步放箭射击,每箭都射中柳叶的中心,百发百中,左右看的人都说射得很

<sup>①</sup> 出自于《战国策·西周策》：“楚有养由基者，善射，去柳叶百步而射之，百发百中。”





好,可是一个过路的人却说:“这个人,可以教他该怎样射了。”养由基听了这话,心里很不舒服,就说:“大家都说我射得好,你竟说可以教我射了,你为什么不来替我射那柳叶呢!”那个人说:“我不能教你怎样伸左臂屈右臂的射箭本领;不过你有没有想过,你射柳叶百发百中,但是却不善于调养气息,等一会疲倦了,一箭射不中,就会前功尽弃。”

寓言故事中养由基“百发百中”的神奇箭术让我们羡慕不已,然而在现实生活中却很难办到。即使对于一个射箭高手来说,“百发百中”的可能性也是微乎其微的,大约只有千万分之一左右。

在这个寓言故事中,“百发百中”的可能性的,也就是前面所说的“概率”,是人们根据经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念。这样给出的概率称为主观概率。

这种利用经验来确定随机事件发生的可能性大小的例子在生活中是很多的,人们也常常依据某些主观概率来行事。



在天气预报中,往往会说:“明天下雨的概率为90%”,这是气象专家根据气象专业知识和最近的气象情况给出的主观概率。听到这一信息的人,大多会出门带伞。

一个外科医生根据自己多年的临床经验和一位患者的病情,认为“此手术成功”的可能性为90%。





一个教师根据自己多年的教学经验和甲、乙两学生的学习情况，认为“甲学生能考上大学”的可能性为95%，“乙学生能考上大学”的可能性为40%。

由此可知，主观概率与主观臆造有着本质的不同，前者要求当事人对所考察的事件有透彻的了解和丰富的经验，甚至是这一行的专家，并能对历史信息 and 当时信息进行仔细分析，如此确定的主观概率是可信的。从某种意义上说，不利用这些丰富的经验也是一种浪费。

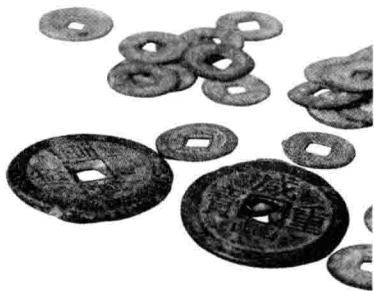
同时，用主观方法得出的随机事件发生的可能性大小，本质上是对随机事件概率的一种推断和估计。虽然结论的精确性有待实践的检验和修正，但结论的可信性在统计意义上是有价值的。

在遇到的随机现象无法大量重复时，用主观方法去做决策和判断是可行的。

005

当然，我们更期待得到的是随机事件发生的可能性的具体量化。下面我们再来看一个历史上真正的“百发百中”的故事。

我们知道，把一枚硬币掷上高空，掉下来的时候是正面朝上还是反面朝上，是一个随机事件，它们出现的可能性均等（将硬币视为质地均匀）。如果现在有人拿了100枚硬币，将它们同时抛向天空，掉下时正面全部朝上的可能性有多大？凭我们的生活经验知道，这几乎是不可能出现的。可是曾经有人利用这一基本不可能出现的事件，赢得了一场战争的胜利。



1053年，北宋大将狄青奉旨征讨侬智高。因为当时南方有崇拜鬼神的风俗，所以大军刚到桂林以南，他便设坛拜神。拿了100枚铜币向神许





愿,说:



如果这次出征能够打败敌人,那么把这些铜币扔到地上,钱面必然会全部朝上。

左右官员都诚惶诚恐,力劝主帅放弃这个念头。因为经验告诉他们,这种尝试注定要失败的。可是,狄青对此全然不理。在千万人的注视下,他突然举手一挥,把铜币全部扔到地上。结果这100枚铜币的正面,竟然鬼使神差般的全部朝上。这时,全军欢呼,声音响彻山村。狄青命令左右取来100枚钉子,按照钱孔落地的位置,用钉子把钱币牢牢钉在地上,并向天祈祷:“等待凯旋归来,定将酬谢神灵,收回铜钱。”

由于士兵个个认为有神灵保佑,战斗中奋勇争先。等到班师回朝的时候,按原先的约定,到祭神的地方收回钱币,这时官兵们才发现,原来那些铜币两面都是正面的图案。聪明的狄青,把人们心目中认为不可能的事件,变成了必然事件,从而赢得了战争的胜利。

在这个案例中,狄青巧妙地改变条件(把钱币的两面都刻上同一图案),将随机现象(或事件)变成了必然现象(或事件),取得了意想不到的成功。在阅读本书时,你可要随时注意问题或试验的条件啊!



在我们的日常生活中有多种有关可能性大小的说法。你能举出一些例子吗?

再说一个有趣的故事:传说古代有一个阴险狡诈的国王。一次,他抓到一个反对者,决意要将他处死。虽说国王心中早已打定主意,然而嘴上

却假惺惺地说：“让上帝的旨意决定这个可怜人的命运吧！我允许他在临刑前说一句话。如果他讲的是真话，那么他将受刀斩；如果他讲的是假话，那么他将被绞死；只有他的话使我缄默不言，才是上帝的旨意让我赦免他。”

在这番冠冕堂皇的话语背后，国王的如意算盘是：尽管话是由你讲，但判定真话、假话的权力在我这里。的确，如果判断的前提只凭国王孤立的一句话，那么这位反对者是必死无疑了。然而，聪明的囚犯说了一句话，国王顿时哑口无言。

你能猜到他说出了什么吗？

犯人所说的话是：“我将被绞死。”对这句话国王能怎么判断呢？



如果这句话是“真话”，那么按规定犯人应当被处斩，然而犯人说的是自己“将被绞死”，因而显然不能算为真话。

如果这句话是“假话”，那么按照假话的规定，犯人将受绞刑，但犯人恰恰就是说自己“将被绞死”。



由于国王无法自圆其说，只好放了犯人。而犯人正是考虑到在一同前提下的必然事件，在另一种前提下变成了不可能事件为自己脱困！

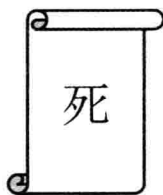
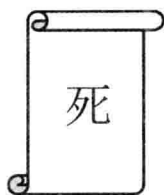
还有一个故事，也是由于主人翁的智慧而将一个不利的必然事件转变成了另一个有利的必然事件：

相传古代有个王国，由于崇尚迷信，世代沿袭着一条奇特的法规：凡是死囚，在临刑前都要抽一次生死签。即在两张小纸片上分别写着“生”和“死”的字样，由法官监督，让犯人当众抽签。如果抽到“死”字的签，则立即处决；如果抽到“活”字的签，则认为是神的旨意，应予当场赦免。





有一次国王决定处死一名大臣。这名大臣因不满国王的残暴统治而替老百姓讲了几句公道话,因此得罪了国王。国王决心不让这名敢于“犯上”的臣下得到半点赦免的机会。于是,他与几名心腹密谋:暗中要求执法官把“生死签”的两张签纸都写成“死”字。这样,不管犯人抽的是哪张,最终都难免一死。



世界上没有不透风的墙,大臣很快知道了国王的诡计。如果你是这名大臣,应该如何解救自己呢?

在抽签当日,我迅速抽出一张签纸吞进肚子里。要求查看剩下的签是什么字。当然写着“死”字!那就意味着我抽到的签应该是“活”字。



就这样,国王和执法官有口难言,由于怕触犯众怒,只好当场赦免了囚臣。

本来这位囚臣抽生死签这件事是一个随机事件,每一种的可能性各占一半。但由于国王机关算尽,想把这种“有一半可能死”的随机事件,变为“一定死”的必然事件,终于搬起石头砸自己的脚,使得囚臣死里逃生了。

由此可见,我们生活的现实世界和社会环境中,无时无刻不面对不确定性,常言道“天有不测风云,人有旦夕祸福”,风险无处不在,无时不有。对不确定性的量化是做出决策的基础,概率论为解决不确定性问题提供了有效的理论和方法。因此,它有着广泛而重要的应用价值,使我们以新的方式来看待和思考世界。



气象学不是一门精确的科学,因此天气预报不得不用缺乏精确性的语言进行播报。下面是气象台关于某地区从2013年9月23日至10月2日的天气预报:

整个这段时间内低气压预期会影响北部和西部地区。整个南部地区在第一个周末有时可能会有阵雨,东部大部分地区可能是晴朗的天气。中部和西部的大部分地区天气多变,时而阵雨冰雹,时而持续下雨,有时还伴有强风。然而,在来自南方的强大气流控制下,天气预计将变得更加炎热,东部地区将持续晴热天气。

你能指出这个报告中所有缺乏确切性的部分吗?

009



你是不是开始感受到,在可能性这个奇妙的世界当中,蕴含了许多智慧的果实呢?下面我们就开始本书的神奇之旅吧!

(本章部分内容改编自张远南《概率和方程的故事》,致以感谢)







## 第二章

# 随机性游戏产生的问题

赌博和运气源于时间之始，那时主神宙斯、海神波赛冬与冥神哈德斯以抽签来分享宇宙。

——希腊史诗作者荷马



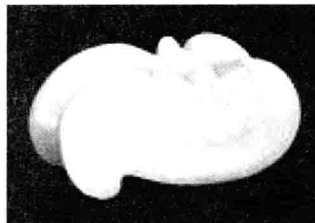
010

### 一、从骰子游戏谈起

骰子，亦作色子，为一正多面体，通常作为桌上游戏的小道具，最常见的骰子是六面骰，它是一颗正立方体，上面分别有一到六个孔（或数字），其相对两面之数字和必为七。



骰子



动物距骨