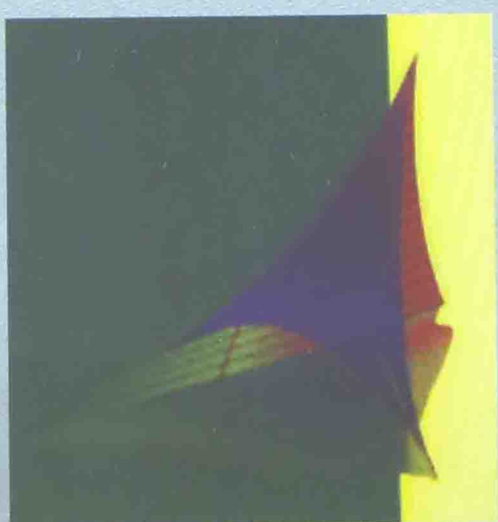
“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

泛函分析

第三版

刘炳初 编著



科学出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

南开大学数学教学丛书

泛函分析

（第三版）

刘炳初　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是作者多年来在南开大学数学系讲授泛函分析课程的基础上写成的. 全书共六章:第一章,距离空间与拓扑空间;第二章,赋范线性空间;第三章,有界线性算子;第四章,Hilbert 空间;第五章,拓扑线性空间;第六章,Banach 代数. 每章末附有一定量的习题,书后有部分习题解答.

本书可作为泛函分析的一本入门教材. 可供高等院校数学系学生用作教材,也可供数学教学和科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析/刘炳初编著. —3 版. —北京:科学出版社,2015.4
(“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材·南开大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-043893-5

Ⅰ.①泛… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 055153 号

责任编辑:林 鹏 李鹏奇 王 静/责任校对:邹慧卿
责任印制:霍 兵/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1998 年 10 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2007 年 7 月第 二 版 印张:14
2015 年 4 月第 三 版 字数:282 000
2015 年 4 月第二十一次印刷
定价:29.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

丛书第三版序

《南开大学数学教学丛书》于 1998 年在科学出版社出版，2007 年出版第二版，整套丛书列入“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”中. 又过去几年了，整套丛书又被列入“‘十二五’普通高等教育本科国家级规划教材”中. 这些都表明本丛书得到了使用者、读者以及南开大学，特别是科学出版社的有效支持与帮助，我们特向他们表示衷心的感谢！

我们曾被问及这套丛书的主编，编委会是哪些人. 这套丛书虽然没有通常意义上的主编和编委会，但是有一位“精神主编”：陈省身先生. 中国改革开放后，年事已高的陈省身先生回到祖国，为将中国建设成数学大国、数学强国奋斗不息. 他这种崇高的精神感召我们在他创建的南开大学数学试点班的教学中尽我们的力量. 这套丛书就是我们努力的记录和见证.

陈省身先生为范曾的《庄子显灵记》写了序. 在这篇序中陈先生说在爱因斯坦书房的书架上有一本德译本老子的《道德经》.《道德经》第一句话说：“道可道，无常道”. 道总是在发展着的. 我们曾说：“更高兴地期待明天它(《南开大学数学教学丛书》) 被更新、被更好的教材取而代之. ”当然这需要进行必要的改革.《道德经》还说：“治大国若烹小鲜. ”就是说要改革，但不能瞎折腾.

我们虽已年过古稀(有一位未到古稀但也逾花甲)，但仍想为建设数学强国出一点力，因此推出这套丛书的第三版. 同时也藉此感谢支持帮助过我们的诸位！陈省身先生离开我们快十周年了，我们也藉此表示对陈省身先生的深切怀念！

全体编著者

2013 年 9 月于南开大学

丛书第一版序

海内外炎黄子孙都盼望中国早日成为数学大国，也就是“实现中国数学的平等和独立”①. 平等和独立是由中国出类拔萃的数学家及其杰出的研究工作来体现的，要有出类拔萃的数学家就要培养一批优秀的研究生、大学生. 这批人不在多，而在精，层次要高. 也就是要求他们热爱数学、基础扎实、知识面广、能力强.

20 世纪 80 年代中期，国家采纳了陈省身先生的几个建议. 建议之一是为培养高质量的数学专业的大学生，需要建立数学专业的试点班. 经过胡国定先生等的努力，1986 年在南开大学建立了数学专业的试点班. 这些做法取得了成功，并在基础学科的教学中有了推广. 1990 年在全国建立“国家理科基础学科研究和教学人才培养基地”. 其后南开大学数学专业成为基地之一. 从 1986 年到现在的 10 余年中，南开大学数学专业是有成绩的. 例如他们 4 次参加全国大学生数学竞赛获 3 次团体第一，1 次团体第三. 在全国和国际大学生数学建模比赛中多次获一等奖. 毕业生中的百分之八十继续攻读研究生，其中许多人取得了很好的成绩.

当然，取得这些成绩是与陈省身先生的指导、帮助分不开的，是与国内外同行们的支持与帮助分不开的. 如杨忠道、王叔平、许以超、虞言林、李克正等或参与教学计划、课程设置、课程内容的制订，或到南开任教等等. 有了这些指导、帮助与支持，南开基础数学专业得以广泛吸收国内外先进的数学教学经验，并以此为基础对数学教学进行了许多改革、创新.

这套丛书是南开大学数学专业的部分教材，诸位编著者长期在南开大学数学专业任教，不断地把自己的心得体会融合到基础知识和基本理论的讲述中去，日积月累地形成了这套教材. 所以可以说这些教材不是“编”出来的，而是在长期教学中“教”出来的，“改”出来的，凝聚了我们的心血. 这些教材的共同点，也是我们教学所遵循的共同点是：首先要加强基础知识、基础理论和基本方法的教学；同时又要适当地开拓知识面，尤其注意反映学科前沿的成就、观点和方法；教学的目的是丰富学生的知识与提高学生的能力，因此配置的习题中多数是为了巩固知识和训练基本方法，也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

---

① 陈省身：在“二十一世纪中国数学展望”学术讨论会开幕式上的讲话.

我们要感谢科学出版社主动提出将这套教材出版. 这对编著者是件大好事. 编著者虽然尽了很大努力,但一则由于编著者的水平所限,二则数学的教育和所有学科的教育一样是在不断发展之中,因此这套教材中缺欠和不足肯定存在. 我们诚挚希望各位同行不吝指正,从而使编著者更明确了解教材及教学中的短长,进而扬长避短,改进我们的教学. 同时通过这套教材也可向同行们介绍南开大学的教学经验以供他们参考,或许有益于他们的工作.

我们再次感谢帮助过南开大学的前辈、同行们,同时也希望能继续得到他们和各位同行的帮助. 办好南开大学的数学专业,办好所有学校的数学专业,把中国数学搞上去,使中国成为数学大国是我们的共同愿望,这个愿望一定能实现!

全体编著者

1998 年 6 月于南开大学

目　　录

第一章　距离空间与拓扑空间

§1.1　距离空间的基本概念

一、定义与例

极限运算是数学分析中最重要的运算之一，我们来回忆分析中的极限概念：$\{x_n\}$是一个实数列，x 是一个实数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-x|<\varepsilon$，我们就说当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 以 x 为极限. 在上面的定义中，$|x_n-x|$表示直线 $\mathbb{R}$ 上的点 x_n 与点 x 之间的"距离"，因此它可以重新叙述为：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，x_n 与 x 之间的"距离"小于 ε. 类似地，平面$\mathbb{R}^2$ 上的点列 $x_n=(\xi_n,\ \eta_n)$，当 $n\to\infty$ 时以点 $x=(\xi,\eta)$为极限可以定义为：对于充分大的自然数 n，点 x_n 与点 x 的"距离"可以任意小，不过这里点 $x_n=(\xi_n,\ \eta_n)$ 与点 $x=(\xi,\eta)$ 之间的距离为 $\sqrt{(\xi_n-\xi)^2+(\eta_n-\eta)^2}$.

从上面的例子中可以看出，不论是 $\mathbb{R}$ 中的点还是$\mathbb{R}^2$ 中的点，甚至任意集合中的点，只要在其中定义了距离，我们就可以用它来衡量两点的接近程度，就可以在其中定义极限. 事实上，在分析中当我们考虑用多项式序列一致逼近区间$[a,b]$上的连续函数时，就曾用$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|p(t)-x(t)|$来表示多项式$p(t)$与函数 $x(t)$之间的"距离". 我们把"距离"最基本的性质抽象化就得到距离空间的概念.

定义 1.1.1　设 X 是任一非空集，对 X 中任意两点 x,y 有一实数 $d(x,y)$与之对应且满足：

1) $d(x,y)\geqslant 0$；且 $d(x,y)=0$，当且仅当 $x=y$；

2) $d(y,x)=d(x,y)$（对称性）；

3) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$（三角形不等式）.

称 $d(x,y)$为 X 中的一个**距离**，定义了距离 d 的集 X 称为一个**距离空间**，记为(X,d)，在不引起混乱的情形下简记为 X.

下面给出距离空间的一些例子，其中有些在分析中起着很重要的作用.

例 1.1.1　设 X 是 n 元实数组全体，定义

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)^2},$$

其中，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

我们证明(X,d)是一个距离空间，为此我们需要验证 d 满足距离的三条公理. 1)，2)显然成立，关键是证明三角形不等式成立. 我们先证明以下 Cauchy 不等式：对任意实数 $a_k,b_k(k=1,\cdots,n)$，我们有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

事实上，任取实数 λ，则

$$\sum_{k=1}^n(a_k+\lambda b_k)^2=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\lambda\sum_{k=1}^n a_kb_k+\lambda^2\sum_{k=1}^n b_k^2\geqslant 0,$$

上面等式左端是 λ 的一个二次三项式，于是它的判别式不大于 0，即 Cauchy 不等式成立.

现在证明三角形不等式成立，由 Cauchy 不等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^2&=\sum_{k=1}^n a_k^2+2\sum_{k=1}^n a_kb_k+\sum_{k=1}^n b_k^2\\&\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2+2\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\right]^{\frac12}+\sum_{k=1}^n b_k^2\\&=\left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{\frac12}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac12}\right]^2.\end{aligned}$$

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$是任意三点，在上面不等式中令 $a_k=(\xi_k-\zeta_k)$，$b_k=(\zeta_k-\eta_k)$，则

$$\left[\sum_{k=1}^n(\xi_k-\eta_k)^2\right]^{\frac12}\leqslant\left[\sum_{k=1}^n(\xi_k-\zeta_k)^2\right]^{\frac12}+\left[\sum_{k=1}^n(\zeta_k-\eta_k)^2\right]^{\frac12},$$

即

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y).$$

所以(X,d)是一个距离空间，以后把这个空间简记为$\mathbb{R}^n$，本节开头提到的$\mathbb{R}^1$，$\mathbb{R}^2$ 都是$\mathbb{R}^n$ 的特殊情形.

例 1.1.2　考虑区间$[a,b]$上所有连续函数集，设 $x(t)$，$y(t)$是$[a,b]$上任意两个连续函数，定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,$$

由于 $x(t)-y(t)$也是$[a,b]$上的连续函数，因此有最大值. 距离公理 1)，2)显然成立. 设 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$是$[a,b]$上任意三个连续函数，则 $\forall\, t\in[a,b]$，

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|$$

$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) - z(t) | + \max_{a\leqslant t\leqslant b} | z(t) - y(t) |$$
$$= d(x,z) + d(z,y),$$

所以

$$d(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} | x(t) - y(t) | \leqslant d(x,z) + d(z,y).$$

$[a,b]$上的连续函数全体赋以上述距离 d 是一个距离空间,记它为 $C[a,b]$.

例 1.1.3 空间 s.

考虑实数列$\{\xi_k\}$的全体. 设 $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}$是两个实数列,定义

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{| \xi_k - \eta_k |}{1+| \xi_k - \eta_k |}.$$

上式右边的$\frac{1}{2^k}$是一个收敛因子,保证级数收敛,距离公理的 1),2)显然成立,为证三角形不等式,考虑$(0,\infty)$上的函数

$$\psi(t) = \frac{t}{1+t},$$

易见 $\psi'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}>0$,所以 $\psi(t)$是单增的. 由此,设 $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_k\}$, $z=\{\zeta_k\}$. 由于

$$| \xi_k - \eta_k | \leqslant | \xi_k - \zeta_k | + | \zeta_k - \eta_k |,$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{| \xi_k - \eta_k |}{1+| \xi_k - \eta_k |} &\leqslant \frac{| \xi_k - \zeta_k | + | \zeta_k - \eta_k |}{1+| \xi_k - \zeta_k | + | \zeta_k - \eta_k |} \\ &= \frac{| \xi_k - \zeta_k |}{1+| \xi_k - \zeta_k | + | \zeta_k - \eta_k |} + \frac{| \zeta_k - \eta_k |}{1+| \xi_k - \zeta_k | + | \zeta_k - \eta_k |} \\ &\leqslant \frac{| \xi_k - \zeta_k |}{1+| \xi_k - \zeta_k |} + \frac{| \zeta_k - \eta_k |}{1+| \zeta_k - \eta_k |}.\end{aligned}$$

在上不等式两边乘$\frac{1}{2^k}$并求和,则得

$$\begin{aligned}d(x,y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{| \xi_k - \eta_k |}{1+| \xi_k - \eta_k |} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{| \xi_k - \zeta_k |}{1+| \xi_k - \zeta_k |} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{| \zeta_k - \eta_k |}{1+| \zeta_k - \eta_k |} \\ &= d(x,z) + d(z,y).\end{aligned}$$

这个距离空间记为 s.

例 1.1.4　空间 S.

与例 1.1.3 类似，设 $E\subset\mathbb{R}$ 是一个 Lebesgue 可测集，$0<m(E)<\infty$，考虑 E 上几乎处处有穷的可测函数全体，其中凡几乎处处相等的函数看成是同一元. 定义

$$d(x,y)=\int_E \frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\mathrm{d}t.$$

与例 1.1.3 的证明类似，这是一个距离空间，把这个空间记为 S.

通过以上几个例子我们看到，为了验证一个赋以函数 d 的非空集是一个距离空间，只需证明 d 满足距离的三条公理，通常比较困难的是证明三角形不等式. 一个距离空间可以是任意一个非空集，只要其中定义了满足距离三条公理的函数 d 即可. 事实上，任意非空集都可以赋以一个距离使其成为一个距离空间.

例 1.1.5　离散空间 D.

设 X 是任一非空集，在 X 中定义 d 如下：

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

不难验证 d 是一个距离，从而 (X,d) 是一个距离空间，称这个空间为离散空间，用 D 表示.

这样看来我们可以随意地定义距离. 特别地，距离不是惟一的，既使同一集也可以引进不同的距离，从而得到不同的距离空间. 例如在 $[a,b]$ 区间上所有连续函数集中，如果我们定义

$$d_1(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t.$$

不难验证 d_1 是一个距离，于是我们得到一个新的距离空间，我们认为这个空间与例 1.1.2 中的空间 $C[a,b]$ 是两个不同的距离空间. 实际上，距离的定义是任意的，但是在每一个具体场合下，选择这样或那样的距离总是依据所研究的极限过程的需要引进的，关于这一点下面我们还要继续讨论.

二、收敛性

在距离空间中，我们可以像在数学分析中一样定义极限的概念.

定义 1.1.2　设 $\{x_n\}$ 是距离空间 (X,d) 中的一个点列，x_0 是 X 中一点，如果当 $n\to\infty$ 时，$d(x_n,x_0)\to 0$，则称当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ 以 x_0 为**极限**，或当 $n\to\infty$ 时，$\{x_n\}$ **收敛**于 x_0. 记为

$$x_n\to x_0 \qquad (n\to\infty),$$

或

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

下面我们证明有关极限的两个简单性质.

定理 1.1.1 设$\{x_n\}$是距离空间 X 中的收敛点列,则:

1) $\{x_n\}$的极限是惟一的;

2) 如果 x_0 是$\{x_n\}$的极限,那么$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$必收敛且以 x_0 为极限.

证 1) 设 $x_n \to x_0$, $x_n \to y_0$ $(n\to\infty)$,则对 $\forall\, \varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,

$$d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2},\qquad d(x_n,y_0)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是由三角形不等式,当 $n>N$ 时

$$d(x_0,y_0)\leqslant d(x_n,x_0)+d(x_n,y_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的,所以 $d(x_0,y_0)=0$, $x_0=y_0$.

2) 设 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,则 $\forall\,\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,$d(x_n,x_0)<\varepsilon$,选取 K,使得当 $k>K$ 时 $n_k>N$,则当 $k>K$ 时,$d(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$,即 $x_{n_k}\to x_0$ $(k\to\infty)$.

定理 1.1.2 设(X,d)是距离空间,则

$$\begin{aligned}&|\, d(x,y)-d(x_1,y_1)\,|\\ &\leqslant d(x,x_1)+d(y,y_1),\qquad (x,y,x_1,y_1,\in X).\end{aligned}$$

证 由三角形不等式

$$\begin{aligned}d(x,y)&\leqslant d(x,x_1)+d(x_1,y)\\ &\leqslant d(x,x_1)+d(x_1,y_1)+d(y_1,y),\end{aligned}$$

由于 x,y 与 x_1,y_1 的地位是对称的,所以

$$|\, d(x,y)-d(x_1,y_1)\,|\leqslant d(x,x_1)+d(y,y_1).$$

由定理 1.1.2 可以看出,在距离空间中,当 $x_n\to x_0$ 及 $y_n\to y_0$ $(n\to\infty)$时,必有 $d(x_n,y_n)\to d(x_0,y_0)$ $(n\to\infty)$.

我们看一看前面列举的几个具体的距离空间中收敛性的涵义.

在空间$\mathbb{R}^n$ 中,易见空间的收敛就是按坐标收敛.

在 $C[a,b]$中,如果 $d(x_n,x_0)\to 0$ $(n\to\infty)$,即

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\, x_n(t)-x_0(t)\,|\to 0\ (n\to\infty),$$

于是对任意的 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,$\forall\, t\in[a,b]$,有

$$|\, x_n(t)-x_0(t)\,|\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|\, x_n(t)-x_0(t)\,|<\varepsilon.$$

即函数列$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于函数$x_0(t)$. 反之,如果$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x_0(t)$,则$d(x_n,x_0)\to 0(n\to\infty)$.

总之,$C[a,b]$的收敛是函数列在$[a,b]$上的一致收敛,大家都知道这种收敛在分析中有重要的作用.

我们证明空间S中的收敛等价于函数列依测度收敛.

设$x_n\to x_0(n\to\infty)$,则对于任意的$\sigma>0$,由于

$$\begin{aligned} d(x_n,x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int\limits_{\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}} \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}m\{t\in E: |x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}. \end{aligned}$$

所以,当$n\to\infty$时,$m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}\to 0$,即$\{x_n\}$在$E$上依测度收敛于$x_0(t)$.

反之,设$\{x_n(t)\}$在E上依测度收敛于$x_0(t)$,则对$\forall\varepsilon>0$及$\forall\sigma>0$,由于

$$\begin{aligned} d(x_n,x_0) &= \int_E \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}mE + \int\limits_{\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}} \frac{|x_n(t)-x_0(t)|}{1+|x_n(t)-x_0(t)|}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\sigma}{1+\sigma}mE + m\{t\in E: |x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}, \end{aligned}$$

先选取σ,使$\frac{\sigma}{1+\sigma}mE<\frac{\varepsilon}{2}$,再对上述$\sigma$选取自然数$N$,使当$n>N$时,$m\{t\in E:|x_n(t)-x_0(t)|\geqslant\sigma\}<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是当$n>N$时,

$$d(x_n,x_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$.

最后,在离散空间D中,$\{x_n\}$收敛于x_0,当且仅当,从某一下标开始$\{x_n\}$为常驻列$\{x_0\}$.

事实上,如果$x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,取$\varepsilon=\frac{1}{2}$,则存在N,当$n\geqslant N$时,$d(x_n,x_0)<\frac{1}{2}$,由此当$n\geqslant N$时,$x_n=x_0$,反之显然.

三、距离空间的连续映射，等距

设(X,d)，(X_1,d_1)是距离空间，$f:X\to X_1$ 是一个映射，$x_0\in X$，如果 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $d(x,x_0)\leqslant\delta$ 的一切 $x\in X$，

$$d_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon,$$

则称**映射 f 在 x_0 点连续**，如果 f 在 X 上的每一点连续，则称 **f 在 X 上连续**.

从以上定义可以看出，距离空间的连续映射是分析中大家熟知的连续函数的推广.

如果对任意 $x,y\in X$，

$$d_1(f(x),f(y))=d(x,y),$$

则称 f 是一个**等距映射**.

一个等距映射一定是一个连续映射，并且是一个一一映射，但不一定是映上的.

对于两个距离空间(X,d)，(X_1,d_1)，如果存在一个映上的等距映射 $f:X\to X_1$，则称(X,d)与(X_1,d_1)**等距**.

从距离空间的观点来看，两个等距的距离空间没有本质的差别，因此，今后我们将把两个等距的距离空间看成是同一空间.

§1.2 距离空间中的点集

一、开集与闭集

设(X,d)是一个距离空间，记

$$S(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\},$$

其中 $r>0$ 是一个实数，称 $S(x_0,r)$为以 x_0 为中心，r 为半径的**开球**.

对于空间$\mathbb{R}$，开球 $S(x_0,r)$是直线上一个以 x_0 为中心，r 为半径的开区间，在空间$\mathbb{R}^2$ 中，$S(x_0,r)$是平面上以 $x_0=(\xi_0,\eta_0)$为中心，r 为半径的开圆盘，而在离散空间 D 中，开球 $S\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)$只是一个点的单点集$\{x_0\}$！

在上述开球的定义中把"$<$"换成"$\leqslant$"，称这个集是以 x_0 为中心，r 为半径的闭球，记为 $\overline{S}(x_0,r)$.

设 A 是距离空间中任一集，如果存在一个开球 $S(x_0,r)$，使得 $A\subset S(x_0,r)$，则称 A 是**有界集**.

设 $G\subset(X,d)$，$x\in G$. 如果存在开球 $S(x,r)\subset G$，则称 x 是 G 的一个**内点**；如果 G 中每一点都是它的内点，则称 G 是一个**开集**. 对于空间的一点 x，

包含 x 的任一开集称为 x 的一个**邻域**，每一个开球 $S(x_0,r)$ 是一个开集.

实际上，$\forall x_1\in S(x_0,r)$，则 $d(x_0,x_1)<r$，于是 $r-d(x_0,x_1)>0$，取 $r_1=r-d(x_0,x_1)$，则因为 $\forall x\in S(x_1,r_1)$，$d(x_1,x)<r_1$，由三角形不等式

$$\begin{aligned} d(x_0,x) &\leqslant d(x_0,x_1)+d(x_1,x) \\ &< d(x_0,x_1)+(r-d(x_0,x_1))=r. \end{aligned}$$

所以 $S(x_1,r_1)\subset S(x_0,r)$，即 $S(x_0,r)$ 是开集.

称开集 $S(x_0,r)$ 为 x_0 的一个**球邻域**.

定理 1.2.1　设 X 是距离空间，则 X 中的开集具有以下基本性质：

1) 全空间 X 与空集 $\varnothing$ 是开集；

2) 任意个开集的并集是开集；

3) 任意有穷多个开集的交集是开集.

证　1) 显然.

设 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$，其中 $\forall\alpha\in I$，G_α 是开集，$\forall x\in G$，则存在 $\alpha_0\in I$，便得 $x\in G_{\alpha_0}$. 由于 G_{α_0} 是开集，存在开球 $S(x,r)\subset G_{\alpha_0}$，从而 $S(x,r)\subset G$，即 G 是开集，2)得证. 以下证明 3).

设 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$，其中每一个 $G_k(k=1,\cdots,n)$ 是开集，$\forall x\in G$，对于每一个 k，存在开球 $S(x,r_k)$，使得

$$S(x,r_k)\subset G_k\qquad(k=1,2,\cdots,n).$$

取

$$r=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{r_k\},$$

则 $S(x,r)\subset S(x,r_k)\subset G_k(k=1,2,\cdots,n)$，即

$$S(x,r)\subset G.$$

设 A 是距离空间中的任一集，用 A^0 表示所有 A 的开子集的并集，称 A^0 为集 A 的**内部**. 由定理 1.2.1，A^0 是开集，并且是包含在 A 中的最大的开集.

设 A 是距离空间 X 中的点集，$x_0\in X$，如果 $\forall\varepsilon>0$，球 $S(x_0,\varepsilon)$ 中都包含 A 的点，即

$$S(x_0,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing.$$

称 x_0 为集 A 的**接触点**，集 A 的接触点的全体称为 A 的**闭包**，A 的闭包记为 $\overline{A}$，显然 $A\subset\overline{A}$. 但是，A 的接触点不必属于 A.

如果 $\forall\varepsilon>0$，球 $S(x_0,\varepsilon)$ 中总包含 A 中不同于 x_0 的点，称 x_0 是 A 的**极限点**. 显然，A 的极限点必是 A 的接触点，反之则不然.

以下是闭包的基本性质.

定理 1.2.2　设 A,B 是距离空间 X 的子集，则：

1) $A\subset\overline{A}$;

2) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$;

3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

4) $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

证 1),4)显然.

由 1),$\overline{A}\subset\overline{\overline{A}}$,所以为证明 2),只需证明 $\overline{\overline{A}}\subset\overline{A}$, $\forall x_0\in\overline{\overline{A}}$,则 $\forall\varepsilon>0$,球 $S(x_0,\varepsilon)$中含有 $\overline{A}$ 中点,设 y_0 是这样的一点,则 $\delta=\varepsilon-d(x_0,y_0)>0$,且 $S(y_0,\delta)$中含 A 中点. 而 $S(y_0,\delta)\subset S(x_0,\varepsilon)$,所以 $S(x_0,\varepsilon)$中含有 A 中点,即 $x_0\in\overline{A}$,所以 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

由于 $A\subset A\cup B$,所以 $\overline{A}\subset\overline{A\cup B}$,同理 $\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$,因此 $\overline{A}\cup\overline{B}\subset\overline{A\cup B}$. 为证明 3)只需证明反向包含关系. $\forall x_0\in\overline{A\cup B}$,则 $\forall\varepsilon>0$,

$$S(x_0,\varepsilon)\cap(A\cup B)\neq\varnothing.$$

我们证明这时或 $x_0\in\overline{A}$ 或 $x_0\in\overline{B}$. 因为如不然,必存在正数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,使得

$$S(x_0,\varepsilon_1)\cap A=\varnothing \text{ 且 } S(x_0,\varepsilon_2)\cap B=\varnothing.$$

取 $\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$,则

$$S(x_0,\varepsilon_0)\cap(A\cup B)=\varnothing,$$

矛盾. 所以$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

设 A 是距离空间 X 中的集,如果 $A=\overline{A}$,则称 A 为**闭集**.

由以上定理,任一集的闭包 $\overline{A}$ 是闭集,它是包含集 A 的最小闭集.

不难证明,在一个距离空间中,任一开集的余集是闭集,任一闭集的余集是开集. 因此,由 de Morgan 公式立刻可得闭集的基本性质.

定理 1.2.3 设 X 是距离空间,则:

1) 全空间 X 及空集$\varnothing$是闭集;

2) 任意个闭集的交集是闭集;

3) 任意有穷个闭集的并集是闭集.

二、稠密子集、可分距离空间

设 A,B 是距离空间 X 中的子集,如果 $\overline{B}\supset A$,称 **B 在 A 中稠密.**

从以上定义可以看出,集 B 在集 A 中稠密是指,$\forall x\in A$ 及 $\forall\varepsilon>0$,存在 $y\in B$,使 $d(x,y)<\varepsilon$,即 A 中的每一点可由 B 中点来逼近.

定义 1.2.1 设 X 是距离空间,如果 X 中存在一个稠密可数子集,则称 **X 是可分的.**

对于子集 $A\subset X$,如果 X 中存在可数子集 B,使得 B 在 A 中稠密,则称集