■ 大学公共数学系列教材

线性代数

Linear Algebra

王海敏　主编

浙江工商大學出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

大学公共数学系列教材

线性代数

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 王海敏主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2014.9

ISBN 978-7-5178-0631-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196329 号

线性代数

王海敏 主编

责任编辑 刘 韵

封面设计 王妤驰

责任校对 傅 恒

责任印制 包建辉

出版发行 浙江工商大学出版社

(杭州市教工路 198 号 邮政编码 310012)

(E-mail：zjgsupress@163.com)

(网址：http://www.zjgsupress.com)

电话：0571-88904980，88831806(传真)

排　　版 杭州朝曦图文设计有限公司

印　　刷 杭州恒力通印务有限公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 17.75

字　　数 367 千

版 印 次 2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-5178-0631-8

定　　价 39.80 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江工商大学出版社营销部邮购电话 0571-88904970

前　言

线性代数是高等学校各专业的一门重要基础课程，它在自然科学、社会科学和工程科学中的很多领域具有广泛的应用。线性代数课程的学习，不仅为学生后继专业课的学习打下必要的数学基础，而且还能促进学生的抽象思维和提高学生的推理能力。

本教材是建立在多年教学实践的基础上参照教育部关于非数学专业硕士研究生考试对线性代数部分的基本内容和要求编写的。全书共分5章，第1章介绍了行列式的概念、性质、特殊的解法和简单的应用；第2章介绍了矩阵的概念、特殊矩阵、逆阵、矩阵的秩和分块矩阵；第3章介绍了向量、相关性和线性方程组解的结构；第4章介绍了特征值和特征向量、矩阵的对角化；第5章介绍了二次型、标准化和正定型。本书以矩阵为工具，彻底地解决了线性方程组解的问题，再利用行列式和解方程组的知识解决了矩阵对角化和二次型标准化的问题。

在内容编写上，我们力求做到科学性和通俗性相结合，由浅入深，循序渐进。读者只要有高中数学的基础知识就能顺利阅读本书。根据我们的教学经验，讲完本教材大约需50课时，如果课时少，可由实际情况和要求取舍内容。

本书的大纲和体系由集体讨论而定。第1章由袁中扬执笔；第2、5章由王海敏执笔；第3章由裘渔洋执笔；第4章由韩兆秀执笔；附录由韩兆秀、袁中扬执笔；全书最后由王海敏统稿定稿。

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是刘韵老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2014年6月于浙江工商大学

目　录
Contents

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章 行列式

解线性方程组是代数中一个基本的问题，行列式正是在对线性方程组的研究中建立起来的，并成为研究线性方程组的重要工具.

本章首先引入二阶和三阶行列式的概念，进而讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，最后介绍用行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

§1.1 n 阶行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1-1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

如果记

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1-3}$$

则(1-2)式可以表示成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

把(1-3)式中由四个数 a,b,c,d 排成的两行两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**，它是一个数，由(1-3)式确定.

由 9 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行三列的式子定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1-4}$$

称它为**三阶行列式**. 行列式中横排、纵排分别称为它的**行和列**,数 a_{ij} 称为它的**元素**,而 i 和 j 表示元素 a_{ij} 的**行标和列标**. 行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**,主对角线上的元素称为**主对角元**,相应地,从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**,其上元素称为**副对角元**.

三阶行列式的计算可以用图 1-1 来记忆,这一计算方法称为**对角线法则**.

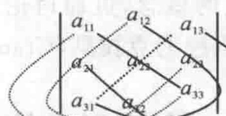

图 1-1　对角线法则

例 1　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　$D=2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5$
$-(-3)\times4\times3-2\times(-2)\times1=75.$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

有与二元线性方程组相仿的结论,即当三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,上述三元方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

把这个结果推广到 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的情形.为此,我们首先要给出 n 阶行列式的定义,并讨论它的性质.

1.1.2 排列及逆序数

作为定义 n 阶行列式的准备,我们先来讨论一下排列.

定义 1.1 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$,称为一个 n **级排列**.

例如,4213 是一个四级排列;35241 是一个五级排列.

例 2 由自然数 1,2,3 可组成的三级排列共有 $3!=6$ 个,它们是

123; 132; 213; 231; 312; 321.

一般地,n 级排列的总数有 $n!$ 个.

显然,$12\cdots n$ 也是一个 n 级排列,这一排列称为 n 元**自然序排列**.这个排列具有自然顺序,就是按递增的顺序排起来的,其他的排列都或多或少地破坏自然顺序.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中,如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面,即 $i_s > i_t$ 时,称这一对数 i_s, i_t 构成一个**逆序**.一个排列中逆序的总数称为它的**逆序数**,记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如,排列 4213 中,42,41,43,21 是逆序,$\tau(4213)=4$,它是偶排列;而排列 35241 中,32,31,52,54,51,21,41 是逆序,$\tau(35241)=7$,它是奇排列.

例 3 求 n 级排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

定义 1.3 把一个排列中某两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列.这样一个变换称为一个**对换**.

例如,在五级排列 35241 中,经过 2,4 对换得到一个新的排列 35421,此时 $\tau(35421)=8$,即 35241 是奇排列,35421 是偶排列.

关于排列的奇偶性,我们有下面的基本事实.

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证 先看一个特殊的情形,即对换的两个数在排列中是相邻的情形.设排列

$$\cdots j\, k \cdots, \tag{1-5}$$

经过 j, k 对换变为

$$\cdots k\ j \cdots, \tag{1-6}$$

这里"…"表示那些不动的数. 显然,在排列(1-5)中如果 j,k 与其他的数构成逆序,则在排列(1-6)中仍然构成逆序;如不构成逆序,则在(1-6)中也不构成逆序;不同的只是 j,k 次序. 如果原来 j,k 构成逆序,那么经过对换,逆序数就减少 1. 如果原来 j,k 不构成逆序,那么经过对换,逆序数就增加 1. 总之,排列的逆序数的奇偶性是变化的. 因此,对于这种特殊的情形,定理是正确的.

再看一般的情形. 设排列为

$$\cdots j\ i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots, \tag{1-7}$$

经过 j,k 对换变为

$$\cdots k\ i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots. \tag{1-8}$$

不难看出,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现. 从(1-7)出发,依次把 k 与 $i_s, i_{s-1}, \cdots, i_1, j$ 对换. 经过 $s+1$ 次相邻位置的对换,排列(1-7)变成

$$\cdots k\ j\ i_1 i_2 \cdots i_s \cdots. \tag{1-9}$$

从(1-9)出发,再把 j 一位一位地向右移动,经过 s 次相邻位置的对换,即成为排列(1-8). 因此,j,k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现,奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性.

推论 在全部 n 级排列中 $(n \geqslant 2)$,奇偶排列各占一半.

证 假设在全部 $n(n \geqslant 2)$ 级排列中奇排列有 s 个,偶排列有 t 个. 将每个奇排列中的前两个数字对换,得到 s 个不同的偶排列,因此 $s \leqslant t$. 同样可证 $t \leqslant s$. 于是 $s = t$,奇、偶排列的总数相等,各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

1.1.3 n 阶行列式

考察三阶行列式的定义式(1-4)的结构

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned}$$

可以看出:

(1)该式右边是一些乘积的代数和,恰有 3! 项,每一项乘积都是由行列式中位于不同行、不同列的元素构成,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.

(2)项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $j_1 j_2 j_3$ 是 1,2,3 的一个排列. 当 $j_1 j_2 j_3$ 是偶排列时,对应的项符号为正;当 $j_1 j_2 j_3$ 是奇排列时,对应的项符号为负.

因此三阶行列式也可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有三级排列求和.

对于二阶行列式,也具有相同的规律.自然地,我们把这种概念推广到 n 阶行列式.

定义 1.4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-10}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列.当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,项(1-10)取正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,项(1-10)取负号.即 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{1-11}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的**元素**.

由定义式(1-11)可知,n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的.特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|=a$,注意不要与绝对值符号混淆.

例 4 计算下三角形行列式(当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$,即主对角线以上元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 我们先来考虑行列式的定义式(1-11)中,哪些项不为零,然后再来判断它们的符号.项的一般形式为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

行列式中,第一行的元素除去 a_{11} 外全为零,因此,展开式中可能不为零的项中必有 a_{1j_1} 只能取 a_{11};第二行中,除去 a_{21},a_{22} 外,其余的全为零,同时注意到 a_{21} 与 a_{11} 位于同一列,故 a_{2j_2} 只能取 a_{22};…,这样逐步推下去,只有项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 才可能不为零,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此可知,下三角形行列式的值等于主对角元素的乘积.

同理可得,**上三角形行列式**(当 $i > j$ 时,$a_{ij} = 0$,即主对角线以下元素都为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为下三角形行列式(或上三角形行列式)的特殊情形,**对角形行列式**(当 $i \neq j$ 时,$a_{ij} = 0$,即主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 3x & -1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ -x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 项的系数.

解 由行列式的定义知,要出现 x^4 的项,则 a_{ij_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ 均需取到含 x 的元素,因此含 x^4 的项为

$$(-1)^{\tau(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 6x^4,$$

该项的系数为 6.

类似地,含 x^3 的项为

$$(-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = 2x^3 \text{ 和} (-1)^{\tau(4231)} a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} = 2x^3,$$

于是 D 中含 x^3 的项的系数为 $2 + 2 = 4$.

在行列式的定义中，为了决定每一项的正负号，我们把 n 个元素按行指标排起来. 事实上，数的乘法是可交换的，因而这 n 个元素的顺序也可以任意交换. 一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n},$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$，$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列. 利用排列的性质，我们可以证明，各项的符号规则还可以由下面的结论来代替.

定理 1.2 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \tag{1-12}$$

其中，$i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 级排列.

例如，已知 $a_{31}a_{24}a_{42}a_{13}$ 是四阶行列式中的一项，该项的符号为

$$(-1)^{\tau(3241)+\tau(1423)} = (-1)^{4+2} = 1.$$

特别地，当式(1-12)的列标按自然序排列时，这一项就是

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(12\cdots n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

由此可得，

推论 n 阶行列式

$$D = \det(a_{ij}) = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{1-13}$$

其中，$\sum\limits_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

§1.2 行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式一般较烦琐. 下面介绍行列式的基本性质，运用这些性质，不仅可以简化行列式的计算，而且对行列式的理论研究也很重要.

1.2.1 行列式的性质

设 n 阶行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 中的行与列对应互换，得到新的行列式记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列互换,行列式的值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D=\det(a_{ij})$,又设 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$,其中 $b_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,由行列式的定义式(1-11)及式(1-13),有

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}=D.$$

性质 1 表明,在行列式中行和列的地位是相同的. 也就是说,对于"行"成立的性质,对于"列"也成立. 下面行列式的其他性质都具有这个特点,因此一般仅对行给出证明.

性质 2 对换行列式中两行(列)的位置,行列式只改变符号,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{第 } s \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \text{第 } t \text{ 行}\rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 设上式行列式左边为 D,右边为 D_1,且 D_1 的第 i 行第 j 列元素为 b_{ij},则 D 的第 s 行,第 t 行与 D_1 的第 t 行,第 s 行的元素之间有关系:

$$a_{sj}=b_{tj},\quad a_{tj}=b_{sj}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

此外,

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i\neq s,\ t;\ j=1,2,\cdots,n).$$

注意到对换改变排列的奇偶性,由行列式的定义,得

$$\begin{aligned} D&=\sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{tj_t}\cdots a_{nj_n} \\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{tj_s}\cdots b_{sj_t}\cdots b_{nj_n} \\ &=\sum_{j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{sj_t}\cdots b_{tj_s}\cdots b_{nj_n} \\ &=-\sum_{j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{sj_t}\cdots b_{tj_s}\cdots b_{nj_n}=-D_1. \end{aligned}$$

推论 如果行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

证 设行列式为 D，交换相同两行元素的位置，仍得原来的行列式，由性质2有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质3 如果行列式中某一行(列)每个元素都有公因子 k，则 k 可提到行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}. \end{aligned}$$

推论1 如果行列式中有一行(列)元素全为零，则行列式的值为零.

推论2 如果行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式的值为零.

性质4 如果行列式的某一行(列)的每个元素都是两个数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别为对应的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端}. \end{aligned}$$

性质5 行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数 k 然后加到另一行(列)上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & a_{j2}+ka_{i2} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 右端 $$\xlongequal{\text{性质 4}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 3 推论 2}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \text{左端}.$$

1.2.2 利用行列式的性质计算行列式

为了使行列式计算过程中的表达式简明，引进下面一些记号：

(1) $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示将行列式第 i 行(列)与第 j 行(列)互换；

(2) $r_i \times \frac{1}{k}\left(c_i \times \frac{1}{k}\right)$ 表示将行列式第 i 行(列)的所有元素提取公因子 $\frac{1}{k}$；

(3) $r_i + kr_j (c_i + kc_j)$ 表示将行列式第 j 行(列)所有元素的 k 倍加到第 i 行(列)对应元素上[第 j 行(列)元素不变].

例 1 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 302 \\ -4 & 3 & 297 \\ 2 & 2 & 203 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix}1&3&300+2\\-4&3&300-3\\2&2&200+3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{性质 4}}\begin{vmatrix}1&3&300\\-4&3&300\\2&2&200\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&3&2\\-4&3&-3\\2&2&3\end{vmatrix}=0+5=5.$

例 2 证明：$\begin{vmatrix}by+az&bz+ax&bx+ay\\bx+ay&by+az&bz+ax\\bz+ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}.$

证 左端$\xlongequal{\text{性质 4}}\begin{vmatrix}by&bz+ax&bx+ay\\bx&by+az&bz+ax\\bz&bx+ay&by+az\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}az&bz+ax&bx+ay\\ay&by+az&bz+ax\\ax&bx+ay&by+az\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[\text{性质 5}]{\text{性质 3}}b\begin{vmatrix}y&bz+ax&bx\\x&by+az&bz\\z&bx+ay&by\end{vmatrix}+a\begin{vmatrix}z&ax&bx+ay\\y&az&bz+ax\\x&ay&by+az\end{vmatrix}$$

$$=b^2\begin{vmatrix}y&bz+ax&x\\x&by+az&z\\z&bx+ay&y\end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix}z&x&bx+ay\\y&z&bz+ax\\x&y&by+az\end{vmatrix}$$

$$=b^3\begin{vmatrix}y&z&x\\x&y&z\\z&x&y\end{vmatrix}+a^3\begin{vmatrix}z&x&y\\y&z&x\\x&y&z\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{性质 2}}a^3(-1)^2\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}+b^3(-1)^2\begin{vmatrix}x&y&z\\z&x&y\\y&z&x\end{vmatrix}=\text{右端}.$$

例 3 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}.$

解 $D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com