工业和信息化部“十二五”规划教材

声学原理概要

SHENGXUE YUANLI GAIYAO

杨士莪 著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

声学原理概要

杨士莪　著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

书中概要地介绍了声波的基本特性和所遵循的物理规律，以及分析不同环境条件下声场的基本方法。

本书可供从事有关声学领域工作的科技人员，作为建立较系统的声学基本概念或做好深入声学某一领域工作的准备用书；也可作为声学领域研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

声学原理概要/杨士莪著. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2015. 1
ISBN 978 - 7 - 5661 - 0976 - 7

Ⅰ. ①声…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①声学　Ⅳ. ①O42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 026174 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451 - 82519328
传　　真 0451 - 82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm × 1 092mm　1/16
印　　张 4.25
字　　数 112 千字
版　　次 2015 年 1 月第 1 版
印　　次 2015 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 12.00 元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

声学属于物理学的一个分支学科，它研究声波的发生、传播、接收和其他各种物理效应。由于声波作为一种弹性波本质的信息载体，只要有物质存在，就可以进行传播，因而可广泛地应用于各类介质环境。声波在通过各种物质的过程中，将与该种物质发生不同的相互效应，从而携带出该物质的一些相关物理特性，因此声波可作为一种强有力的观测、计量或处理手段，现已广泛应用到许多学科和技术领域；而声波所遵循的一些基本规律，与各学科或技术领域的专门知识相结合，形成了现代声学的不同分支学科。为了介绍有关声学的基本知识，已有不少中文或外文的声学基础和声学原理类书籍出版；但是，迄今为止出版的这一类书籍，或则偏于简单、浅显，不足以用来指导解决有关的声学问题，或则篇幅庞大，未能聚焦于声波基本特性的分析介绍，不便用于建立声学的基本概念，以适应深入声学其他分支学科的研究。

为了节约篇幅，本书侧重于获得最广泛应用的静态介质中小振幅声波的发射、接收、传播和衍射的基本规律，并简单介绍了大振幅声波、运动介质声学的主要内容，以使读者能对声波的基本特性有一个较系统的概念，而不具体地讨论某一声学分支学科的专门问题。若读者需要对声学的哪个领域作深入的了解，可以进一步查找有关方面的专业书籍或文献。

在此，感谢李琪教授、宋扬副教授对本书的仔细校对。

编　者

2014 年 7 月

目 录

第 1 章　静态理想流体介质中的小振幅波动方程式

本章将首先导出声波在静态理想流体介质中的小振幅波动方程式，并讨论由此可得的某些声波的基本特性。

1.1　静态理想流体介质中的三维波动方程式

考虑在无限均匀静态理想流体介质中声波的传播规律。设介质的密度为 ρ，其容积弹性模量为 E，当声压为 p 的声波在介质中传播时，所引起的介质质点振动速度为 $\boldsymbol{v}$，根据 Newton 定律，这时介质中任一质量元的运动加速度，将满足下列方程式

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p \tag{1.1}$$

由于介质中任一点的质点运动速度，将同时是时间 t 和该质点空间坐标 $\boldsymbol{r}$ 的函数，因此式(1.1)中对 $\boldsymbol{v}$ 应取全微分形式。但若将式(1.1)中对 $\boldsymbol{v}$ 的全微分改写为以下的偏微分形式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$$

对静态介质当仅考虑小振幅声波时，可见上式中等号右边第二项系介质质点振速 $\boldsymbol{v}$ 的二阶小量，可以忽略不计，因此式(1.1)可以改写为

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p \tag{1.2}$$

式(1.2)即系静态流体介质中小振幅声波的运动方程式，将仅对静态介质小振幅声波条件下适用，若讨论大振幅声波或运动介质环境条件时，则仍应使用式(1.1)。

为了能找出 $\rho, \boldsymbol{v}, p$ 间的其他关系式，可考虑介质空间中任一空间元。若该空间元内没有其他的源或泄，根据介质的连续性条件，当声波通过时，各瞬时流入该空间元的介质数量应该等于流出的介质数量，因而有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.3}$$

当声波通过时，介质密度将产生疏密变化，对于均匀介质来说，可将介质密度记为 $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$，其中 ρ_0 为常数，并将式(1.3)中第二项写为

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla(\Delta\rho)$$

对小振幅声波来说，上式中最后一项显然为二阶小量，可忽略不计，因而近似有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{1.4}$$

式(1.4)就是均匀介质中小振幅声波的连续性方程式，对于非均匀介质，则仍应使用式(1.3)。

实验研究表明，当声波传播时，若不考虑介质吸收损耗，介质空间各点处声压和介质密度的变化将遵循绝热变化规律。对于液态介质来说，在声场中的应力相当于 p，而体积应变相当于$\frac{\Delta\rho}{\rho}$，根据应力与应变的关系可以有

$$p = E\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad 或 \quad p = c^2\Delta\rho, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1.5}$$

式(1.5)被称为状态方程式，c 为介质中的声速。对于不同的介质形态，也可以有不同形式的状态方程式，例如对气体介质，若气体压力为 P，密度为 ρ，其定压比热与定容比热之比为 γ，则在气体介质中的声速为 $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$。将式(1.5)代入式(1.4)，并考虑到对于均匀介质来说声速 c 为常数，可得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\,\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{1.6}$$

式(1.6)为连续性方程式的另一种写法，由此式及运动方程式(1.2)中消去 ρ 和 $\boldsymbol{v}$，可获得 p 所应满足的微分方程式为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1.7}$$

式(1.7)即为静态理想介质中的小振幅波动方程式。若仅考虑频率为 ω 的单频声波，并取声波的时间因子为 $e^{-i\omega t}$，则式(1.7)可改写为

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \tag{1.8}$$

式中，$k = \frac{\omega}{c}$称为波数。

式(1.7)和式(1.8)均为自由空间的无源波动方程式。若同时考虑声源所产生的声场，则对于介质中有声源的空间元来说，式(1.3)等号右边将不再为零；设单位时间内流入(流出)单位体积空间的介质量为 Q，式(1.3)将改写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = Q(\boldsymbol{r},t) \tag{1.9}$$

仿照前述办法，同时利用运动方程式和状态方程式消去 ρ 和 $\boldsymbol{v}$，所得到的波动方程式等号右边不再为零，式(1.7)将改写为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{1.10}$$

通常利用 δ 函数描述介质空间中位于 $\boldsymbol{r}_s$ 处的单位点声源，若在时间 t_0 时刻发出的声窄脉冲，而将$\frac{\partial Q}{\partial t}$改写为 $4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_s)\delta(t-t_0)$。

声压 p 和质点振速 $\boldsymbol{v}$ 是表征声场中各点处声振动的两个基本物理量，式(1.7)和式(1.8)给出了声压所满足的偏微分方程式，同样方法也可得出质点振速所应满足的偏微分方程式；但更多时候为了数学上的方便，引入声场势函数 φ，并且定义

$$p = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \boldsymbol{v} = \nabla\varphi \tag{1.11}$$

这时声场势函数 φ 所满足的偏微分方程式同样为

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{1.12}$$

只要依式(1.12)求得声场势函数的解，就不难由式(1.11)分别得到声压和质点振速的表达式。

1.2 声场的若干物理特性

在上节中所得到的描述声场的方程式，系二阶偏微分方程，要想依据该方程求得一定环境条件下声场的确定解，还需添加必要的定解条件；这首先最重要的条件就是无穷远辐射条件。例如，对在无限均匀介质中点声源发射的单频声波来说，若声波频率为 ω，取时间因子为 $e^{-i\omega t}$，这时式(1.12)可改写为

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$$

由此方程式可获得两个线性独立的解 $\frac{e^{ikr}}{r}$ 和 $\frac{e^{-ikr}}{r}$，其中前者表示自声源向外传播的波，而后者表示自无穷远向点源处收敛的波。一般来说，若将上面所给的波动方程式与方程式

$$\nabla^2\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) + k^2\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = 0$$

联立，并考虑图1.1所示的空间区域，图中曲面 S 为包围介质空间的大球面，设其半径为 R；曲面 O 为包围声源的小球面，设其半径为 ε；利用 Green 定理可得

$$\iint_{S+\varepsilon}\left\{\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\right\}d\Omega = 0 \tag{1.13}$$

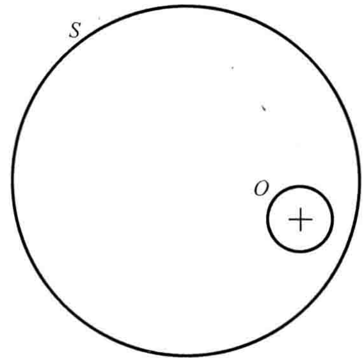

图1.1 包围声源和介质空间的曲面

令 $R\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，注意到对 S 和 O 两曲面来说，其各自的外法线方向相反，则对上式积分将分别等于

$$\lim_{R\to\infty}\iint_S\left(\frac{e^{ikR}}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R} - \varphi\frac{ikR-1}{R^2}e^{ikR}\right)R^2 d\Omega = \lim_{R\to\infty}\iint_S R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - ik\varphi\right)e^{ikR}d\Omega + 4\pi\varphi$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_O\left(-\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \varphi\frac{ik\varepsilon-1}{\varepsilon^2}e^{ik\varepsilon}\right)\varepsilon^2 d\Omega = -4\pi\varphi$$

将以上两式所得结果代入式(1.13)，即可得到三维均匀介质空间声场的解所应满足的无穷远辐射条件为

$$\lim_{R\to\infty}R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - ik\varphi\right) = 0$$

类似的方法可以证明，对二维空间和一维空间声场，也有相似的无穷远辐射条件，因而可以统一地将声场的无穷远辐射条件写为

$$\lim_{R\to\infty} R^n\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - \mathrm{i}k\varphi\right) = 0 \tag{1.14}$$

对于三维、二维和一维空间声场，上式中 n 将分别等于 1，0.5 和 0。

有关的证明，读者可自行参阅 Е. Л. Шендеров：*Волновые Задачи Гидроакустики*，Изд. 'Судостроение' 1972г。应该说明的是，式(1.14)虽然是就均匀介质空间条件所求得的，但即或介质空间为非均匀时，也可求得类似的无穷远辐射条件表达式。

声波是自然界中能量传递方式之一；当声波通过介质时，介质产生振动并发生形变，因而具有一定的动能和势能。对于单位体积的质量元来说，其所具有的动能和势能之和为

$$E = \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2 + \int_{\rho}^{\rho+\Delta\rho} p\,\frac{\mathrm{d}(\Delta\rho)}{\rho} = \frac{1}{2}\rho\boldsymbol{v}^2 + \frac{p^2}{2\rho c^2} \tag{1.15}$$

式中，E 也被称为声能密度。

当声波传播时，声能随之从一地传递到另一地，若定义向量 $\boldsymbol{I}$ 为声能流密度，则对介质中任意单位体积元，根据能量守恒原理应该有

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{I} = \rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{p}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla\cdot(p\boldsymbol{v})$$

因此

$$\boldsymbol{I} = p\boldsymbol{v} \tag{1.16}$$

$\boldsymbol{I}$ 的时间平均值被称为声场强度。

通常所指的介质中的声传播速度，系声波在无限均匀介质中其相位传递的速度，也被称为相速度。但在许多实际介质中，不同频率的声波其传播的相速度也可能不相同。试考虑下面所给出的窄带信号，在频散介质中的能量传递情况。设窄带信号的频谱函数为

$$G(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_0 - \Delta\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0 + \Delta\omega \\ 0, & \omega < \omega_0 - \Delta\omega, \omega_0 + \Delta\omega < \omega \end{cases}$$

为简单起见，考虑声波一维传播的情况；并且为了更符合物理实际，仅取声场势函数的实数部分。利用 Fourier 积分及一维波动方程式的解，可写出此时声场势函数为

$$\varphi(r,t) = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \cos(kr - \omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

虽然上式中 k 也是频率 ω 的函数，但只要 $\Delta\omega$ 足够小，可将 k 在 ω_0 附近展开为 ω 的 Taylor 级数，并且只取一项近似，因而有

$$\begin{aligned}\varphi(r,t) &\approx \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} \cos\left\{\left[k_0 + \left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]r - \omega t\right\}\mathrm{d}\omega \\ &= 2\,\frac{\sin\Delta\omega\left[\left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} r - t\right]}{\left(\frac{\partial k}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} r - t}\cos(k_0 r - \omega_0 t)\end{aligned}$$

可以看出，此时声波在传播时具有一定的波包形式，其填充频率为 ω_0，而相位传递速度为介质声速 c；但波包的传递速度则等于$\frac{\partial\omega}{\partial k}$，实际声能将依波包传递速度传播，根据 c 与$\frac{\partial\omega}{\partial k}$

大小的不同,各波包内部的填充振动,将分别在该波包的前、后端发生或消失。$\frac{\partial \omega}{\partial k}$即为介质中声能传递的群速度。

1.3 介质的声吸收和衰减

由于实际介质中存在黏滞效应、热传导效应和弛豫效应,当声波在介质中传播时,不断有声能被转化为其他的能量形式,从而引起声波的衰减。

1. 介质的黏滞吸收

流体介质的黏滞性表现为:流体中由于质点运动速度的空间梯度而产生的运动阻力,从而使得部分运动的动能转化为热能。取流体介质中任一质量元,其在各界面处所受外力,可依弹性介质中的应力与应变关系相类比写出,只不过将弹性介质条件下的应变量,改换为质点振速的空间变化率而已,因而有

$$T_{xx} = -p + \zeta \nabla \cdot \boldsymbol{v} + 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{1.17a}$$

$$T_{yy} = -p + \zeta \nabla \cdot \boldsymbol{v} + 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{1.17b}$$

$$T_{zz} = -p + \zeta \nabla \cdot \boldsymbol{v} + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.17c}$$

$$T_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{1.17d}$$

$$T_{yz} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{1.17e}$$

$$T_{zx} = \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \tag{1.17f}$$

式中,η 为通常的介质黏滞系数,ζ 称为第二黏滞系数;也有不少书上引入体积黏滞系数 σ,容易知道 σ 与 ζ,η 的关系为

$$\sigma = \zeta + \frac{2}{3}\eta \tag{1.18}$$

根据式(1.17)给出的质量元在声场中的受力关系,组成波动方程式的三个关系式中,运动方程式(1.2)将改写为

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p + \left(\sigma + \frac{4}{3}\eta\right)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) - \eta \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{v} \tag{1.19}$$

同样利用连续性方程式和状态方程式,消去变量 $\boldsymbol{v}$ 后,此时波动方程式将改变为

$$\nabla^2\left\{p + \frac{\sigma'}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial t}\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1.20}$$

式中,$\sigma' = \sigma + \frac{4}{3}\eta$。

为书写简便,令

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho c}\left(\sigma + \frac{4}{3}\eta\right) \tag{1.21}$$

对频率为 ω 的单频声波来说，若 ε 足够小，在一维传播情况下，由式(1.20)可解得

$$p = A\exp\left(\frac{\mathrm{i}kx}{\sqrt{1-\mathrm{i}k\varepsilon}}\right) \approx A\exp\left[\mathrm{i}k\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}k\varepsilon\right)x\right]$$

式中，A 为表示声压幅度的常数。由上式可以看出，声波在传播过程中其幅值将随传播距离依指数率衰减，且其衰减系数和频率的平方成正比。

2. 介质的热传导吸收

当仅考虑介质的热传导效应时，根据热传导定律可知，在单位时间内流入单位质量介质的热量 Q 可由下式给出

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho}\nabla^2 T \tag{1.22}$$

式中，κ 为热传导系数，T 为质量元的绝对温度。若用 S 表示熵值，则有

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho}\nabla^2 T \tag{1.23}$$

但由热力学定律知，对该质量元的内能 U 来说有

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V + p\mathrm{d}V \tag{1.24}$$

又由热力学中介质的等压比热 c_P 和等容比热 c_V 的定义可知

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = (c_P - c_V)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P - p$$

将此结果代入式(1.24)，并利用式(1.23)，考虑到 $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \tau$ 为介质的膨胀系数，再将 V 换算为 $\frac{1}{\rho}$，即可得到

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{\gamma-1}{\rho\tau}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\kappa}{\rho c_V}\nabla^2 T \tag{1.25}$$

式中，γ 为定压比热与定容比热的比值。取 $\beta = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_\rho$ 为定容条件下介质温度的压力系数，利用介质状态函数

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_\rho \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}\rho = \beta\mathrm{d}p - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho\tau}$$

消去式(1.25)中的温度变量 T，即可最后获得在考虑热传导条件下，表示 p 和 ρ 关系的状态方程式，即

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\beta(\gamma-1)}{\rho\beta\tau}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c_V}\nabla^2\left(p - \frac{\Delta\rho}{\rho\beta\tau}\right) \tag{1.26}$$

对仅限于分析小振幅声波的情况，式(1.26)中所有对时间的全微分，可一概改写为对时间的偏微分。对液体介质来说，除液态金属外，一般液体的热传导吸收远小于黏滞吸收，可以忽略不计，因而在此不再做更多的分析，有兴趣的读者不妨自行推导出此时相应的声波表达式。

3. 介质的弛豫吸收

对于许多实际介质来说，弛豫效应往往是引起声吸收的最主要原因。不同的介质，其弛豫效应的机理也各有不同，如热弛豫、结构弛豫、化学弛豫等。对各种不同情况进行认真的热力学分析，将超出本书讨论的范围，因而本书仅以热弛豫为例，依唯象性理论作以下简

要说明。

当介质中有声波通过时,其内部将不断有部分分子受到激发产生能态跃迁,此时介质内自由度能量将偏离其处于平衡状态下的数值,并将逐渐通过内、外自由度间的能量交换,而趋向于恢复平衡态。但这种向平衡态恢复过程的快慢,在小振幅声波条件下,按照一级近似,应正比于非平衡态下内自由度能量 U_t 与平衡态下内自由度能量 U_i 之差,用数学式来表示为

$$\frac{\mathrm{d}U_t}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}(U_t - U_i) \tag{1.27}$$

式中,等号右边的负号,表示内自由度能量向平衡态数值的恢复过程;τ 为弛豫时间,表示恢复过程的快慢。若声波频率为 ω,则平衡态下内自由度能量 U_i 应包括两部分,即

$$U_i = \overline{U}_i + U_i' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

式中,$\overline{U}_i$ 为没有声波通过时,介质的内能;而 $U_i' \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 则系当声波通过时内能的变化值。在小振幅声波条件下,式(1.27)中对时间 t 的全微分可近似为对时间 t 的偏微分,仅考虑内自由度能量由于有声波通过而引起的变化值 U_t',可以得到

$$U_t' = \frac{U_i'}{1 - \mathrm{i}\omega\tau} \tag{1.28}$$

对于气体介质来说,其定容比热 C_V 将为

$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} = \overline{C}_V + \frac{C_{iV}'}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}$$

而介质中声速将为

$$c^2 = \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{P}{\rho}\left(1 + \frac{H}{\overline{C}_V + \dfrac{C_{iV}'}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}}\right),\ H = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \tag{1.29}$$

对于液态介质来说,类似的分析可以得到,在有弛豫效应的情况下,对于频率为 ω 的单频声波来说,介质的压缩系数可改写为

$$\beta = \beta_\infty + \frac{\beta_i}{1 - \mathrm{i}\omega\tau} \tag{1.30}$$

从而介质声速将表现为复值,引起声传播过程中的附加衰减。

第2章 平面波 球面波 柱面波

本章将介绍流体介质中三种最基本形式的波的传播特性，为分析简便起见，除特别提出的情况外，将主要限于单频声波，且省略其时间因子 $e^{-i\omega t}$。

2.1 平面波的传播特性

由波动方程式可以得到，沿空间方向（$\cos\vartheta\cos\alpha$，$\cos\vartheta\sin\alpha$，$\sin\vartheta$）传播的平面波，其势函数的一般形式为

$$\varphi = A\exp[ik(x\cos\vartheta\cos\alpha + y\cos\vartheta\sin\alpha + z\sin\vartheta)] = Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.1}$$

式中，A 为声波的振幅。根据势函数的定义，这时平面波声压和质点振速将分别等于

$$p = i\omega\rho Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{v} = i\boldsymbol{k}Ae^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

即质点振动方向与声波传播方向一致，因而为纵波，这正反映了在流体介质中实际上只可能有纵波传播的事实。由声压和质点振速数值的比可得

$$Z = \frac{p}{v} = \rho c \tag{2.2}$$

式中，Z 被称为波阻抗，因而平面波的波阻抗是常数，并等于介质密度和声速的乘积。

1. 平面波在两种介质平面界面上的反射和折射

考虑如图2.1所示的情况，设上方介质与下方介质的密度和声速分别为 ρ_1，c_1 与 ρ_2，c_2，平面波以入射角 ϑ_1，自上方介质入射到两种不同介质的界面上。取直角坐标系，令 $z=0$ 的平面为两种介质的界面，并记入射声波的势函数为

$$\varphi_i = e^{ik_1(x\sin\vartheta_1 + z\cos\vartheta_1)} \tag{2.3}$$

根据 Snell 定律，若此时声波的折射角为 ϑ_2，则有

$$\frac{\sin\vartheta_1}{c_1} = \frac{\sin\vartheta_2}{c_2} \tag{2.4}$$

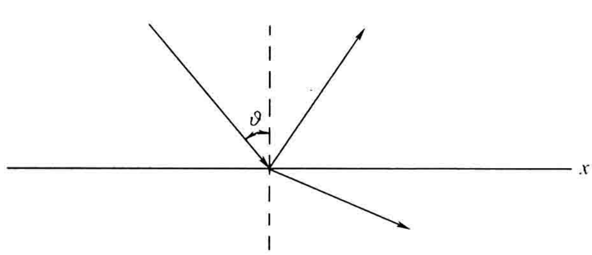

图2.1 平面波在两种介质平面界面上的反射和折射

根据声波在两种不同介质界面上反射时，界面上、下声压相等和质点法向振速相等的边界条件，若记声波的反射系数和折射系数分别为 V 和 W，注意到此时反射波和折射波的

势函数分别为

$$\varphi_r = V\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1(x\sin\vartheta_1 - z\cos\vartheta_1)}$$

$$\varphi_2 = W\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2(x\sin\vartheta_2 + z\cos\vartheta_2)}$$

可以得到在界面处应有以下两个关系式存在，即

$$\rho_1(1+V) = \rho_2 W$$

$$\frac{\cos\vartheta_1}{c_1}(1-V) = \frac{\cos\vartheta_2}{c_2}W$$

解此方程组，并记 $b = \frac{\rho_2}{\rho_1}$，$n = \frac{c_1}{c_2}$，$\cos\vartheta_2 = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}$，可得

$$\begin{cases} V = \dfrac{b\cos\vartheta_1 - \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}{b\cos\vartheta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}} \\ W = \dfrac{2\cos\vartheta_1}{b\cos\vartheta_1 + \sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}} \end{cases} \tag{2.5}$$

由式(2.5)不难看出，平面波在两种介质界面上反射时，其反射系数和折射系数数值不仅和两种介质的性质有关，也和入射角的大小有关；如果入射角为90°，则 $V = -1$，$W = 0$，即不可能存在沿不同介质界面一方单独传播的波。若 $n < 1$，则当 $\sin\vartheta_1 = n$ 时，$\vartheta_2 = 90°$，这时反射系数等于1，即出现全反射，此时的入射角称为全反射临界角，记为 ϑ_c，$\sin\vartheta_c = n$，而折射波将沿两种介质的界面传播。当入射角大于全反射临界角时，反射系数和折射系数都将成为复数，声波在反射和折射时将产生相位变化，此时 $\cos\vartheta_2$ 变成复数，因而在下方介质中，将出现幅度沿 z 方向依指数率衰减的非均匀波，其质点运动轨迹为在垂直方向的椭圆。

2. 平面脉冲波在反射时的变形

从式(2.5)可以看出，平面波在两种不同介质界面上反射时，如果入射角小于全反射临界角，则无论是反射系数还是折射系数都将是实数，这时不产生相位跳变，即使对于脉冲波来说，也不会产生脉冲变形。但如果入射角大于全反射临界角，即 $n^2 - \sin^2\vartheta_1 < 0$，反射系数中根式开方后将等于虚数，取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，这时将有

$$V = \exp\left(-2\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{\sin^2\vartheta_1 - n^2}}{b\cos\vartheta_1}\right) \tag{2.6}$$

即在反射时声波将发生相位跳变，因而此时反射脉冲和折射脉冲的形状就不再与入射脉冲形状相同。

若入射脉冲势函数为 $\varphi_i = f\left(\frac{x\sin\vartheta_1 + z\cos\vartheta_1}{c_1} - t\right)$，其 Fourier 变换为 $F(\omega)$，并设声波入射角大于全反射临界角，记 $\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = \mathrm{i}\xi$，其中 ξ 为正实数，根据式(2.5)这时折射波势函数将可以写为

$$\varphi_2 = Wf\left(\frac{x\sin\vartheta_2 + z\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1}}{c_2} - t\right)$$

为了保证势函数所表示的声波满足无穷远辐射条件，由于时间因子取为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，故应记 $\arctan\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = \mathrm{i}\xi$，这对应于折射波幅值沿 z 方向依指数率衰减(若时间因子取为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则需记 $\arctan\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_1} = -\mathrm{i}\xi$)。注意到，当根据入射声波的谱函数，利用 Fourier 变换计

算反射声脉冲时，对于 ω 在 $(0,\infty)$ 与 $(-\infty,0)$ 区间的积分，将分别相当于时间因子取为 $e^{-i\omega t}$ 和 $e^{i\omega t}$，因而反射声势函数为

$$\begin{aligned}\varphi_r &= \int_0^\infty F(\omega)e^{-2i\xi}e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-\omega t)}d\omega + \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{2i\xi}e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-\omega t)}d\omega \\ &= \cos 2\xi\int_{-\infty}^\infty F(\omega)e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-\omega t)}d\omega - i\sin 2\xi\int_{-\infty}^\infty \frac{|\omega|}{\omega}F(\omega)e^{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1-\omega t)}d\omega \end{aligned} \tag{2.7}$$

式中，$\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 = k_1(x\sin\vartheta_1 + z\cos\vartheta_1)$，式中第一项给出的声波，其脉冲形状与入射声波的脉冲形状相同，但第二项给出的结果，将与入射声波脉冲形状完全不同。同样方法对折射脉冲形状的计算将有

$$\varphi_2 = \frac{2\cos\xi}{b}\left[\int_0^\infty F(\omega)e^{-i\xi}e^{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2-\omega t)}d\omega + \int_{-\infty}^0 F(\omega)e^{i\xi}e^{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2-\omega t)}d\omega\right] \tag{2.8}$$

式中，$\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}_2 = k_2(x\sin\vartheta_2 + z\cos\vartheta_2)$。可知上式所得结果，也会与入射脉冲的形状完全不同。若已知 $F(\omega)$ 的具体表达式，不难利用式(2.7)和式(2.8)计算不同形式脉冲的实际变形情况，在此将不再详细讨论。

3. 有限宽平面波束在界面上的反射和折射

如图 2.2 所示，当入射声波不是具有无限宽波阵面的平面波，而仅为一有限宽度的平面波束时，设有限宽入射波束在 $z=0$ 界面上沿 x 方向的宽度为 $(-a,a)$，可首先利用 Fourier 积分，将其分解为沿空间不同方向入射的无限宽平面波，并分析这些无限宽入射平面波彼此叠加的结果。若有限宽波束入射平面波的势函数为 $\varphi_i(x,z)$，这时

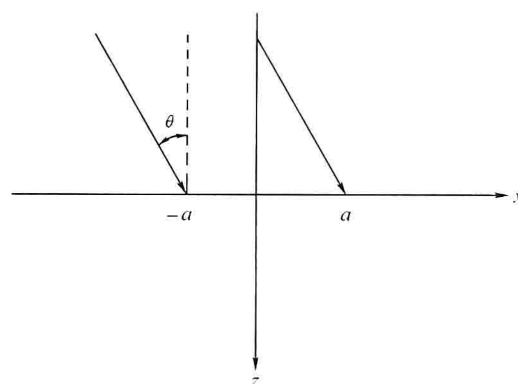

图 2.2　有限宽波束在界面上的反射和折射

$$\varphi_i(x,0) = f(x)e^{ik_1x\sin\vartheta_1},\ f(x) = \begin{cases}1, & |x|\leqslant a\\ 0, & |x|>a\end{cases} \tag{2.9}$$

令

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \varphi_i(x,0)e^{-i\xi x}dx = \frac{\sin[(k_1\sin\vartheta_1-\xi)a]}{\pi(k_1\sin\vartheta_1-\xi)}$$

则有

$$\varphi_i = \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin[(k_1\sin\vartheta_1-\xi)a]}{\pi(k_1\sin\vartheta_1-\xi)}e^{i(\xi x+\sqrt{k_1^2-\xi^2}z)}d\xi \tag{2.10}$$

式中，ξ 相当于各不同入射方向平面波的水平波数，当 $\xi = k_1\sin\vartheta_1$ 时，该方向入射平面波的幅值最大。这时反射波势函数将为

$$\varphi_r = \int_{-\infty}^\infty V(\xi)\frac{\sin[(k_1\sin\vartheta_1-\xi)a]}{\pi(k_1\sin\vartheta_1-\xi)}e^{i(\xi x-\sqrt{k_1^2-\xi^2}z)}d\xi \tag{2.11}$$

由式(2.6)平面波反射系数可表示为

$$V(\xi) = e^{-2i\psi(\xi)},\ \psi(\xi) = \arctan\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\xi^2-k_1^2n^2}{k_1^2-\xi^2}} \tag{2.12}$$

近似计算式(2.11)积分值,将 $\psi(\xi)$ 在入射波最大幅值附近即 $\xi=k_1\sin\vartheta_1$ 处,按 Taylor 级数展开,且仅保留一次项,得

$$\psi(\xi)\approx\psi(k_1\sin\vartheta_1)+\psi'(k_1\sin\vartheta_1)(\xi-k_1\sin\vartheta_1)$$

将此式近似代入式(2.11),完成相应积分运算,可得

$$\varphi_r(x,0)\approx V(k_1\sin\vartheta_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x\sin\vartheta_1}\times\begin{cases}1, & |x-2\psi'(k_1\sin\vartheta_1)|\leqslant a\\0, & |x-2\psi'(k_1\sin\vartheta_1)|>a\end{cases}\tag{2.13}$$

这时反射波束幅度仍基本符合一般反射定律,其在界面上的宽度也仍为 $2a$,但其位置相对于入射波束来说,则沿正 x 方向移动了一个距离 $2\psi'(k_1\sin\vartheta_1)$。此位移量一般和声波频率有关,当入射角很接近全反射临界角时,此位移量可达到较大数值;由式(2.12),仅考虑 $\xi\approx k_1 n$ 的情况,记声波入射角为 ϑ,可得此时位移量 D 的近似表达式为

$$D\approx\frac{\lambda}{\pi b}\frac{\tan\vartheta}{\sqrt{\sin^2\vartheta-n^2}}$$

国内外有不少文章都给出了此现象实验结果的照相,但一般为了实验效果明显,多限于有限宽波束在固体薄片上反射的情况,因而将不在此给出,有兴趣者不妨自行参阅 L. M. Brekhovskikh 所著的 *Waves in Layered Media* 一书中第 109 页内容。

2.2 球面波的基本性质

在三维无限均匀介质中,由波动方程式容易求得向无限远传播的单频点源球面波势函数的解为 $\varphi=A\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$,其中 A 为波幅,r 为接收点与声源的距离。根据势函数的定义,这时声场中各点处声压和质点振速将分别为 $p=\mathrm{i}\omega\rho A\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$ 和 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{i}kr-1}{r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\nabla\boldsymbol{r}$,即声波为纵波,介质质点沿以声源为原点的矢径方向振动,因而球面波波阻抗 Z 将等于 $Z=\dfrac{p}{v}=\dfrac{\rho c}{1-\dfrac{1}{\mathrm{i}kr}}$,这时波阻抗不再是常数,而将随声源的距离变化,只有当距离声源很远时(即 $kr\gg1$ 时),才近似与平面波波阻抗相等。但这时其声场能量流 $\boldsymbol{I}$ 依然为

$$\boldsymbol{I}=\langle p\boldsymbol{v}\rangle=\frac{p^2}{2\rho c}\nabla\boldsymbol{r}$$

因而声波在距声源较近的地区,存在并不向外传播的抗性交变能流。

值得提出的是,若考虑球面脉冲波的传播,将这时声波的势函数写为 $\varphi=\dfrac{1}{r}f(r-ct)$,则相应的声压和质点振速值的表示将分别为

$$p=\frac{\rho c}{r}f'(r-ct)$$

$$v=\frac{1}{r}f'(r-ct)-\frac{1}{r^2}f(r-ct)$$

因而可得 p 与 v 的关系为