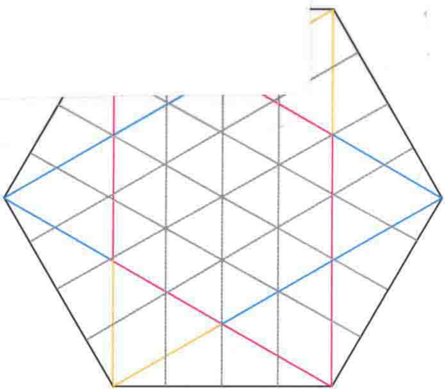
WANGGETU ZHONG DE JIHE JISUAN

网格图中的

几何计算

王印增 ◎ 著



科学出版社

网格图中的几何计算

王印增　著

科学出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

网格图中的几何计算/王印增著. —北京：科学出版社，2014

ISBN 978-7-03-041795-4

Ⅰ. ①网… Ⅱ.①王… Ⅲ. ①网格-计算方法 Ⅳ. ①O243②TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 196731 号

责任编辑：李振格/责任校对：柏连海

责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/32

2014 年 6 月第一次印刷 印张：5.375

字数：100 千字

定价：13.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62138017

序　言

王印增先生是我中学时的数学教师．上个世纪七十年代末，为准备参加省级和全国的数学竞赛，当时已任县教育局副局长的王印增先生曾精心辅导过我们．在我印象之中，那时课外的辅导材料还是很少的，我们很难找到一些合适而又有趣的问题去做．每次王先生却总能拿出一些奇妙的题目让我们做，这使我们大开眼界．至今他那精辟的讲解，巧妙的启发，循循善诱的神态我还历历在目．

回想起来，当初那些有趣而又独特的问题应该是他平时教学研究的积累，正是那些引人入胜的问题使我对数学产生了深厚兴趣，如今我能在数学领域立足奋进，与那时王先生的言传身教、悉心辅导密切相关．半个世纪以来，王先生呕心沥血攻学问，尽智竭忠育栋梁，在当地中学教育界颇有名望，给一批批莘莘学子留下了美好回忆．

《网格图中的几何计算》一书就是他多年潜心研究精心积累的结果．王先生能够把这些素材加工提炼，整理成册，应是对中学数学教学工作的重要贡献，同时也为后生学子启迪智慧，深造成材起着积极作用．

华罗庚先生曾说过“新的数学方法和概念，常常比解决数学问题本身更重要．”该书中网格图的相关内容凝聚了王印增先生半生的心血和智慧．正如他自己所说网格浩如烟海，千变万化，譬如与函数数列有密切关系的多参量网格图往往由一个网格图中多边形个数的求总数公式可以推导出无数个数列求和公式，堪称数列求和之工具．该书中定理公式的推

导是他多年教学辅导、独立钻研的结晶．可贵之处还在于书中的重点不是这些定理公式本身，而是教人解决数学问题的基本思路，尤其是解决数学问题的归纳思维、逆向思维对读者数学理念的确立、独立思考能力的培养、创造能力的发挥大有裨益．

德国数学家克莱因说："音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧……但数学能给予以上的一切．"我们期盼着众多的读者研读此书之后，立志于步入数学的殿堂从事研究工作．

中国数学学会秘书长

中国科学院数学与系统科学研究院研究员

张立群

2013年3月

前　　言

我是一名退休的教育工作者，现已是耄耋之年．

在职时，多年从事数学教学工作．在辅导学生课外研究活动时，偶尔接触到网格图这种几何图形．当时，只是指导学生计数网格图中各种多边形的个数，觉得它对于培养学生观察能力和分析解决问题的能力有帮助．不过，那时认为这类问题是数学中的“杂项”，不宜涉猎过多．后来，通过较深入地研究，发现网格图中有很多有规律性的东西，而且与函数、数列有密切的联系．拿它作为研究对象，会发现许多有趣的现象．

本文是我多年来有关研究和教学网格图问题的心得，仅供数学爱好者及师生参考，不妥之处，敬请批评指正．

王印增

2013 年 1 月

目 录

一、计数网格图中多边形数目的几种方法

(一) 网格图概念

一个多边形，用若干条线段，将边与边、或者边与角顶、或者角顶与角顶连接起来，形成网格状的图形，我们叫它网格图．网格图中线段与线段之间的交点，称之为网格点．如下图．

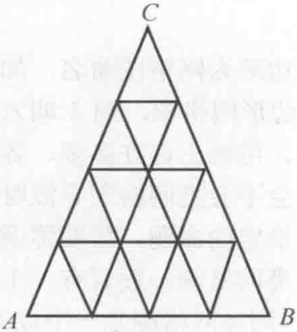


图 1

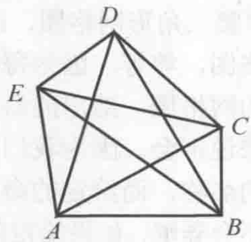


图 2

在网格图中，如果多边形各边上的网格点的分布有一定规律，各网格点之间的连接也有规律，我们称之为规矩网格图，否则叫普通网格图．如图 1 是将等腰三角形各边分成四等分，然后过每个分点引相邻两边的平行线，形成网格图，是规矩网格图．图 2，五边形各边虽然未被网格点分割，但角顶与角顶之间的连线有规律，那就是每个角顶与不相邻的角顶，全连接起来，所以也叫规矩网格图．图 3 则是普通网格图，因为网格点在六边形各边上的分布无规律，网格点之

间的连接也无规律.

本文将重点讨论规矩网格图. 探讨图中规律性的命题.

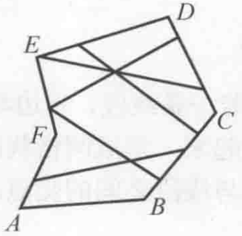


图 3

我们将按形成网格图的原始多边形为网格图命名. 如图 1 叫等腰三角形网格图, 图 2 叫五边形网格图, 图 3 叫六边形网格图, 等等. 因为每种多边形, 可画出许许多多、各式各样的网格图, 给出的命名方法, 会不会把网格图弄混呀? 一般来说不会. 因为我们只是研究给定的命题, 需要称谓网格图的名称. 而给定的命题中, 同类网格图一般只有一个, 当然不会弄混. 如果给定的命题中, 同类网格图是一个以上, 可以将它们编成号, 这样就不会弄混了.

如果两个网格图, 多边形各边上的网格点分布规律相同, 各网格点之间的连接规律也相同, 只是多边形各边上的网格点数目不同, 我们称两个网格图为同一系列网格图, 如下面两个正方形网格图, 就是同一系列网格图. 图 4 是将正方形各边分成 5 等分, 过各分点引对边的垂线而成. 图 5 是将正方形各边分成 4 等分, 过各分点引对边的垂线而成. 两个网格图, 网格点在正方形各边的分布规律相同, 都是将正方形各边分成若干相同等分; 网格点之间的连接规律也相同, 都是过各分点引对边的垂线, 与对边网格点连接. 因此, 它们

是同一正方形网格图系列.

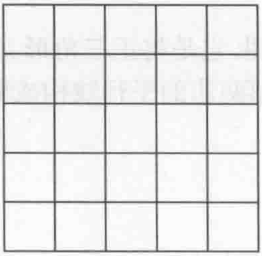


图 4

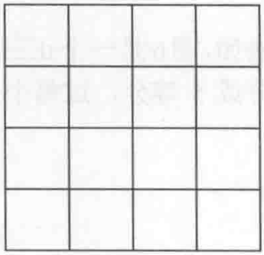


图 5

在网格图中，含有各种不同的多边形. 如图 1 中，含有三角形、平行四边形、菱形、六边形、梯形；图 4、图 5 中含有正方形、长方形等.

我们感兴趣的是网格图中各种多边形的数目. 本文要介绍计数网格图中多边形个数的各种方法，并在以后的各章中推导出一些计算公式，建立起网格图与数列之间的联系.

(二) 按网格点计数网格图中多边形的数目

给定一个网格图，要计数图中某种多边形的数目. 基本要求有两个：一是要准确，既不能漏数，也不能数重；二是要快些，尽量少用些时间. 按网格点计数就是达到这一目的的最基本的计数方法.

所谓按点计数，就是一个网格点、一个网格点地去计数，数出每个网格点可作为多少个要计数的多边形的顶点，把计数的结果加在一起，去掉重复，就是要计数的多边形的数目.

这种计数方法，表面上看很简单，似乎谁都会做. 但要保证不漏数、重数，却比较困难，为此，需要注意以下事项:

(1) 要把网格图中的网格点编成号，一个号一个号地去计数.

例如，图 6 是一个正三角形网格图. 它是将正三角形 ABC 各边分成 5 等分，过每个分点引相邻两边的平行线构成的网格图.

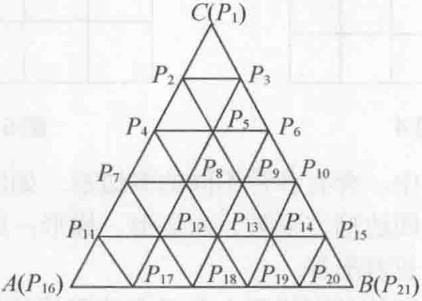
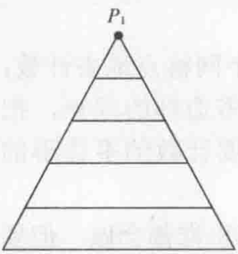


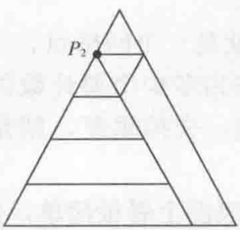
图 6

我们要计数这个网格图含有多少个不同的三角形.

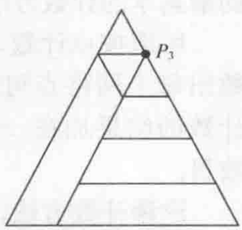
该网格图共有 21 个网格点. 为防止漏数、重数，我们将这 21 个网格点编成号：$P_1, P_2, \cdots, P_{21}$，一个点、一个点地去计数. 下面各图是各网格点的计数情况，图形下面是以该网格点为三角形一顶点的不同三角形个数.



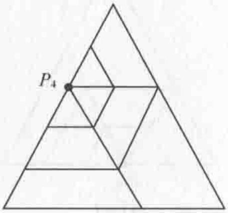
(5个)



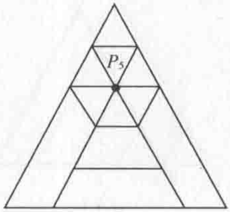
(6个)



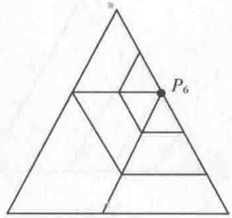
(6个)



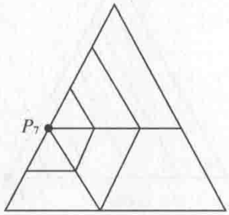
(7个)



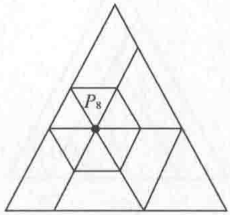
(8个)



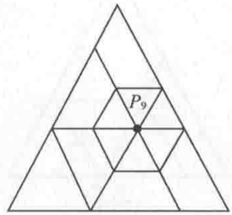
(7个)



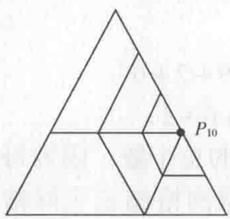
(7个)



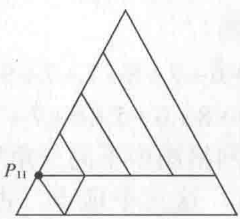
(9个)



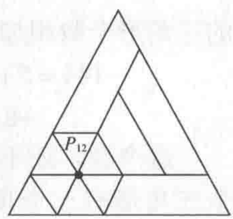
(9个)



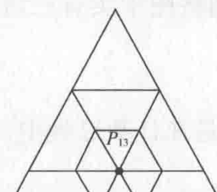
(7个)



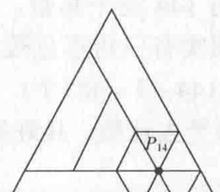
(6个)



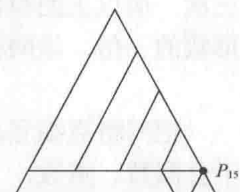
(8个)



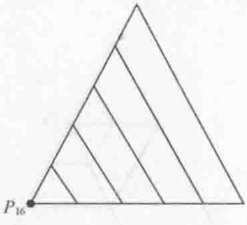
(9个)



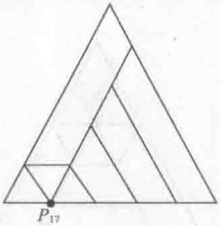
(8个)



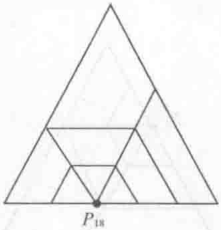
(6个)



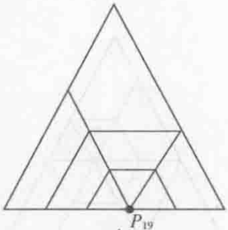
(5个)



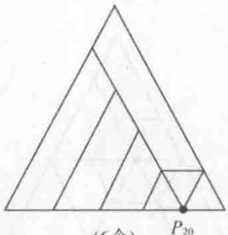
(6个)



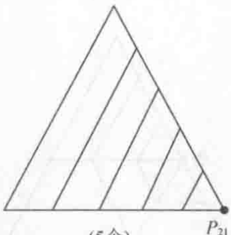
(7个)



(7个)



(6个)



(5个)

将数出来的以网格点 P_1 至 P_{21} 各点作为三角形一个顶点的三角形个数相加，得

$$144 = 5+6+6+7+8+7+7+9+9+7+6 \\ +8+9+8+6+5+6+7+7+6+5 .$$

这个数，还不是网格图中不同三角形的总个数．因为每个三角形有三个顶点，这三个顶点，占据网格图三个网格点．我们在计数时，每个网格点都计数了一次，即重复数了三次．所以上面得出的 144 这个总数，是网格图中实有三角形数的三倍．该网格图实有三角形总数为

$$144 \div 3 = 48\,(\text{个}).$$

把网格点编号，按号去计数，其好处就是在计数过程中，不会漏数、重数．

(2) 要弄清楚每个网格点是多少个角的角顶？其中哪些角可作为要计数的多边形的顶角？能作为要计数的多边形顶

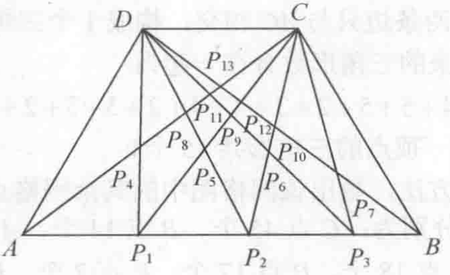
角的角，每个角可作为多少个多边形的顶角？

不要认为这是一件很简单的事情，有些网格图中的网格点，是很多角的顶点，必须仔细观察分析，稍一马虎，就可能漏掉或数重.

例如，下面的网格图是一个梯形网格图. 它是将下底分成四等分，然后将每个分点与上底两个端点连接起来，并将上、下底的对顶角连接起来，形成的网格图. 我们要计数该图中三角形的个数.

除四个梯形角顶之外，我们将其余的 13 个网格点编了号，以 P_i 记之.

这个网格图，最不好计数三角形个数的是上底两个角顶 D 与 C，因为以它们为角顶的角各为 15 个之多. 拿 D 点来说，以它为角顶的角有：$\angle ADP_1$，$\angle P_1DP_2$，$\angle P_2DP_3$，$\angle P_3DB$，$\angle BDC$，$\angle ADP_2$，$\angle P_1DP_3$，$\angle P_2DB$，$\angle P_3DC$，$\angle ADP_3$，$\angle P_1DB$，$\angle P_2DC$，$\angle ADB$，$\angle P_1DC$，$\angle ADC$. 这些角每个都有从 D 点起始的两条边，当这两条边与第 3 条直线相交时，就构成三角形.



$\angle ADP_1$ 两条边与 AC，AB 相交，构成 2 个三角形；

$\angle P_1DP_2$ 两条边与 AC，P_1C，AB 相交，构成 3 个三角形；

$\angle P_2DP_3$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C，AB 相交，构成 4 个三角形；

$\angle P_3DB$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C，P_3C，AB 相交，构成 5 个三角形；

$\angle BDC$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C，P_3C，BC 相交，构成 5 个三角形；

$\angle ADP_2$ 两条边与 AC，AB 相交，构成 2 个三角形；

$\angle P_1DP_3$ 两条边与 AC，P_1C，AB 相交，构成 3 个三角形；

$\angle P_2DB$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C，AB 相交，构成 4 个三角形；

$\angle P_3DC$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C，P_3C 相交，构成 4 个三角形；

$\angle ADP_3$ 两条边与 AC，AB 相交，构成 2 个三角形；

$\angle P_1DB$ 两条边与 AC，P_1C，AB 相交，构成 3 个三角形；

$\angle P_2DC$ 两条边与 AC，P_1C，P_2C 相交，构成 3 个三角形；

$\angle ADB$ 两条边与 AC，AB 相交，构成 2 个三角形；

$\angle P_1DC$ 两条边与 AC，P_1C 相交，构成 2 个三角形；

$\angle ADC$ 两条边只与 AC 相交，构成 1 个三角形.

将数出来的三角形数合在一起为

$$2+3+4+5+5+2+3+4+4+2+3+3+2+2+1=45,$$

即以 D 点为一顶点的三角形共 45 个！

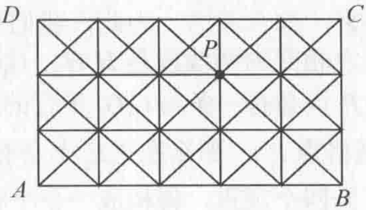
用上述方法，数出该网格图中的其余网格点为一顶点的三角形数，分别为：C 点 45 个、B 点 14 个、A 点 14 个、P_1 点 17 个、P_2 点 18 个、P_3 点 17 个、P_4 点 7 个、P_5 点 7 个、P_6 点 7 个、P_7 点 7 个、P_8 点 8 个、P_9 点 8 个、P_{10} 点 8 个、P_{11} 点 9 个、P_{12} 点 9 个、P_{13} 点 10 个.

将这些网格点数出来的三角形合起来，去掉重复，就是该网格图所含三角形总个数．为

$$[45+45+14+14+17+18+17+7+7+7+7+8$$
$$+8+8+9+9+10]\div 3=246\div 3=82,$$

即该网格图共含不同三角形 82 个．

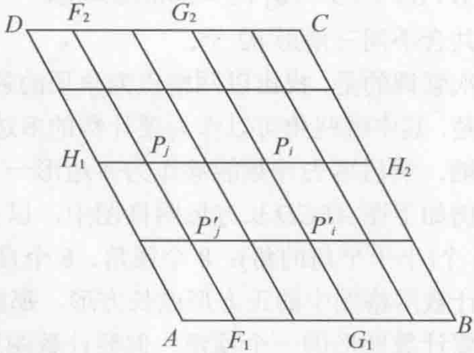
应该再次强调的是，找出以网格点为角顶的各个角之后，一定要弄清楚，其中哪些角可以作为要计数的多边形的顶角，哪些角却不能．然后再去计数能够作为多边形一顶角的多边形的个数．例如下图 $ABCD$ 长方形网格图中，以 P 点为角顶的角多达 24 个(小于平角的角)：8 个锐角、8 个直角、8 个钝角．如果要计数网格图中的正方形或长方形，那就只有 8 个直角可作为要计数图形的一个顶角．但要计数图形中的平行四边形，24 个角中有 22 个角可以作为计数图形的顶角．



(3) 在计数每个网格点作为多边形顶点的多边形数时，如遇数量较多、构成也较复杂，最好与在该网格点相交的线段结合起来，综合考虑．这样可使眉目清楚，少出错误．

例如，下图是平行四边 $ABCD$ 网格图．它是将一组对边 AB，CD 平均分成五等分，将另一组对边 BC, AD 平均分成四等分，然后过每个分点引相邻边的平行线构成的网格图．我们要计数网格图中平行四边形的个数．

这个网格图中，平行四边形比较多，而且任意两个网格点都可以作为一个平行四边形的两个顶点．一个一个地去计数，比较麻烦，很容易数漏．



为克服这些困难，我们要把网格点与在该网格点相交的两条线段结合起来，综合考虑．为此，我们从网格图中任取一网格点 P_i．在 P_i 相交的两线段是 H_1H_2，G_1G_2．在 H_1H_2 上再取一点 P_j，过 P_j 点必有一条与 G_1G_2 平行的线段 F_1F_2．如果在 G_1G_2 再取一网格点 P'_i，那么在 F_1F_2 上必有一网格点 P'_j，以 P_i，P'_i，P_j，P'_j 为四个顶点，将构成一个平行四边形．因 P_i 是从 G_1G_2 上任取的，而 G_1G_2 上可以这样任取的点有 4 个．即以 P_iP_j 为一条边的平行四边形，在该网格图中有 4 个．在 H_1H_2 上 P_j 点是除 P_i 点之外，任取的一个网格点，而在 H_1H_2 上，可以这样任取的点共有 5 个．这就是说，以 P_i 为一顶点的平行四边形共有 $4\times5=20$（个）．

因为 P_i 点是我们从平行四边网格图 $ABCD$ 中任取的，而在该网格图中这样的网格点共有 $5\times6=30$（个）．