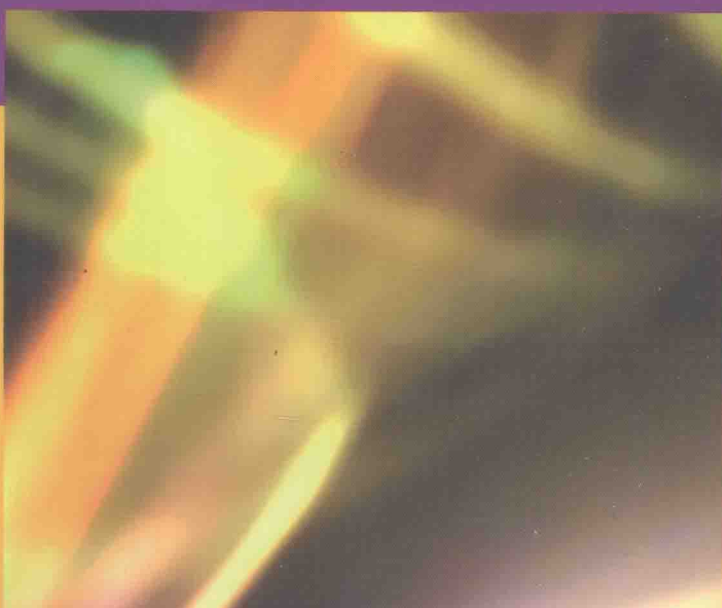
清华大学名优教材立项资助

清华大学公共基础平台课教材

■ 刘智新　闫浩　章纪民　编著

高等微积分教程(上)

一元函数微积分与常微分方程



清华大学出版社

清华大学公共基础平台课教材

高等微积分教程(上)

一元函数微积分与常微分方程

■ 刘智新 闫浩 章纪民 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本教材是编者在多年的教学经验与教学研究的基础上编写而成的.教材中适当加强了微积分的基本理论,同时并重微积分的应用,使之有助于培养学生分析问题和解决问题的能力.书中还给出了习题答案或提示,以方便教师教学与学生自学.

教材分为上、下两册,此书是上册,内容包括实数与实数列的极限、一元函数极限与连续、一元函数导数与导数应用、一元函数积分与广义积分、常微分方程.

本书可作为大学理工科非数学专业微积分课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等微积分教程.上,一元函数微积分与常微分方程/刘智新,闫浩,章纪民编著.--北京:清华大学出版社,2014

清华大学公共基础平台课教材

ISBN 978-7-302-38101-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①刘…②闫…③章…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教材　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 220498 号

责任编辑:石　磊　赵从棉
封面设计:傅瑞学
责任校对:刘玉霞
责任印制:杨　艳

出版发行:清华大学出版社
　网　址:http://www.tup.com.cn,http://www.wqbook.com
　地　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**:100084
　社总机:010-62770175　　**邮　购**:010-62786544
　投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:三河市中晟雅豪印务有限公司
经　销:全国新华书店
开　本:170mm×230mm　**印　张**:17.75　**字　数**:334 千字
版　次:2014 年 9 月第 1 版　**印　次**:2014 年 9 月第 1 次印刷
印　数:1～2500
定　价:32.00 元

产品编号:052091-01

前言

微积分是现代大学生(包括理工科学生以及部分文科学生)大学入学后的第一门课程,也是大学数学教育的一门重要的基础课程,其重要性已为大家所认可.但学生对这门课仍有恐惧感.对学生来说如何学好这门课,对教师来说如何教好这门课,都是广大师生关注的事情.众多微积分教材的出版,都是为了帮助学生更好地理解、学习这门课程,也为了教师更容易地教授这门课.本书的编写就是这么一次尝试.

一、微积分的发展史

以英国科学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼茨(Leibniz)在17世纪下半叶独立研究和完成的,现在被称为微积分基本定理的牛顿-莱布尼茨公式为标志,微积分的创立和发展已经历了三百多年的时间.但是微积分的思想可以追溯到公元前3世纪古希腊的阿基米德(Archimedes).他在研究一些关于面积、体积的几何问题时,所用的方法就隐含着近代积分学的思想.而微分学的基础——极限理论也早在公元前3世纪左右我国的庄周所著的《庄子》一书的"天下篇"中就有记载,"一尺之棰,日取其半,万世不竭";在魏晋时期我国伟大的数学家刘徽在他的割圆术中提到的"割之弥细,所失弥小,割之又割,以至于不可割,则与圆周和体而无所失矣",都是朴素的、也是很典型的极限概念.利用割圆术,刘徽求出了圆周率$\pi=3.1416\cdots$的结果.

牛顿和莱布尼茨的伟大工作是把微分学的中心问题——切线问题和积分学的中心问题——求积问题联系起来.用这种划时代的联系所创立的微积分方法和手段,使得一些原本被认为是很难的天文学问题、物理学问题得到解决,展现了微积分的威力,推动了当时科学的发展.

尽管牛顿和莱布尼茨的理论在现在看来是正确的,但他们当时的工作是不完善的,尤其缺失数学分析的严密性.在一些基本概念上,例如"无穷"和"无穷小量"这些概念,他们的叙述十分含糊."无穷小量"有时是以零的形式,有时又以非零而是有限的小量出现在牛顿的著作中.同样,在莱布尼茨的著作中也有类似的混淆.这些缺陷,导致了越来越多的悖论和谬论的出现,引发了微积分的危机.

在随后的几百年中，许多数学家为微积分理论做出了奠基性的工作，其中有：

捷克的数学家和哲学家波尔查诺(Bolzano)(1781—1848 年)，著有《无穷的悖论》，提出了级数收敛的概念，并对极限、连续和变量有了较深入的了解.

法国数学家柯西(Cauchy)(1789—1857 年)，著有《分析教程》、《无穷小分析教程概论》和《微积分在几何上的应用》，"柯西极限存在准则"给微积分奠定了严密的基础，创立极限理论.

德国数学家维尔斯特拉斯(Weierstrass)(1815—1897 年)，引进"ε-δ"、"ε-N"语言，在数学上"严格"定义了"极限"和"连续"，逻辑地构造了实数理论，系统建立了数学分析的基础.

在微积分理论的发展之路上，还有一些数学家必须提到，他们是黎曼(Riemann)、欧拉(Euler)、拉格朗日(Lagrange)、阿贝尔(Abel)、戴德金(Dedekind)、康托尔(Cantor)，等等，他们的名字将在我们的教材中一次又一次地被提到.

我们将在教材中呈现的是经过许多数学家不断完善、发展的微积分体系.

二、我们的教材

教材的编写与教学目的是紧密相关的. 微积分的教学目的主要为：

工具与方法 微积分是近代自然科学与工程技术的基础，其工具与方法属性是毋庸置疑的. 物理、化学、生物、力学等，很少有学科不用到微积分的概念、思想方法与手段. 即便是在许多人文社会科学中，也会用到微积分知识.

语言功能 "数学教学也就是数学语言的教学."这是俄罗斯学者斯托利亚尔说过的. 其实这里说的数学语言，不仅仅指的是数学上用到的语言，还指科学上用到的语言. 科学知识的获取、发展及表述都需要一套语言，而数学语言是应用最广的一种科学语言. 微积分中所用到的语言，包括"ε-δ"、"ε-N"语言，是最重要的数学语言之一. 因此数学语言的学习也是微积分课程的教学内容.

培养理性思维 理性思维方法是处理科学问题所必需的一种思维方法. 微积分理论中处处闪耀着历史上一代又一代数学大师们理性思维的光芒，我们力图在教材中向学生展现这些理性思维的光芒，以激发学生理性思维的潜能. 同时注重理性思维训练，使学生在微积分的学习过程中有机会逐步理解、掌握解决数学以及相关科学问题的逻辑思维方法.

实践过程 从微积分的发展历史可以发现，从阿基米德、刘徽的朴素微积分思想，到牛顿和莱布尼茨的微积分基本定理，再到"实数系—极限论—微积分"体系的建立，正好是一门学科从萌芽到初步建立再到完善的过程. 任何一门科学的产生都沿袭这个过程. 微积分是学生第一次完整地经历这一过程，而这种经历对

每个学生来说也是难得的.微积分的学习就是一次实践过程,让学生体会、学习如何建立一门科学,在创建的过程中会遇到什么问题,如何去解决那些乍一看似乎解决不了的问题(例如"柯西极限存在准则"成功解决了数列或函数极限不存在的问题,而这个问题用极限的定义是无法解决的;实数理论解决了实数在实数轴上的完备性问题).尽管微积分是一门已经成熟的课程,我们几乎不可能有创新的机会,但是通过建立微积分理论体系的实践,可以培养学生创新的能力.一旦有机会,他们会在各自的工作中提出自己的理论,并会完善自己的理论.就像儿时的搭积木对培养建筑师的重要性一样.

随着计算机和软件技术的日益发展,微积分中的一些计算工作,例如求导数、求积分等的重要性日渐减弱,而微积分的语言功能和实践过程却越来越重要.对于非数学专业的理工科学生来说,原来的微积分教材太注重微积分的工具功能,而数学专业的数学分析教材又太注重细节,学时太长,因此我们编写了现在的教材.

在本教材中,我们在不影响总学时的情况下,适当加强了极限理论的内容和训练,使学生为进一步学好微积分理论打下坚实的基础.同时,将确界原理作为平台(基本假设),给出了关于实数完备性的几个基本定理,使之满足微积分体系的需要.而对于初学学生不容易理解和掌握的内容,如有限覆盖定理等,则不作过多的论述与要求,从而避免冗长的论证和过于学究化的深究.我们比较详细地介绍了积分理论,证明了一元函数可积的等价定理以及二重积分的可积性定理,得到了只要函数"比较好"(函数的间断点为零长度集(一元函数定积分)或零面积集(二元函数的二重积分)),积分区域边界也"比较好"(积分区域边界为零面积集(二元函数的二重积分)),一元函数定积分(二元函数的二重积分)一定存在.至于三重积分和曲线、曲面积分,我们采取了简化的方法,没有探究细节.

我们将常微分方程的内容放到上册,以便于其他学科(比如物理学)的学习.而级数则放到本书的最后.作为函数项级数的应用,我们在本书的最后证明了常微分方程初值问题解的存在唯一性定理.

微积分教材的理性与直观的关系一直是比较难处理的问题.过多地强调理性,可能会失去微积分本来的意图;而过多地强调直观,又会使这么优秀的大学生失去了一次难得的理性思维训练,这种训练是高层次人才所必须经历的,而且我们的学生也非常愿意接受这种训练.与国外的微积分教材比较强调直观相比,我们兼顾了数学的理性思维训练.与国内的微积分教材相比,我们结合了学生的实际情况(学习能力强,学习热情高),适当地加强了教材与习题的难度,并考虑到理工科学生的背景,加强了应用.

本教材作为讲义已经在清华大学的很多院系使用过数次.上册与下册的基本内容分别使用 75 学时讲授,各辅以 20～25 学时的习题课.

本书是根据编者在清华大学微积分课程的讲义整理而成的. 上册主要由刘智新编写，下册主要由章纪民编写，教材中的习题主要由北京邮电大学闫浩编写. 在编写的过程中，得到了“清华大学‘985 工程’三期人才培养项目”的资助和清华大学数学科学系领导的关心与帮助. 编者的同事苏宁、姚家燕、郭玉霞、扈志明、杨利军、崔建莲、梁恒等老师在本书的编写过程中也给予了很多帮助和关心，借此机会，向他们一一致谢.

三、关于微积分的学习

我们的学生经过小学、中学的数学学习，已经有一定的数学基础和技能，但是面对微积分这门严谨和理性的课程，多少都会有一些不适应. 对学生而言，毅力和坚持是唯一的途径. 对教师而言，耐心和细致也是必要的前提. 任何教材都只是知识的载体，缺少了学生的毅力和教师的耐心，学好微积分是不可能的.

祝同学们学习进步！

编　者

2014 年 7 月于清华园

目录

第 1 章　实数系与实数列的极限

微积分是在 17 世纪后半叶由科学家牛顿(Newton)和哲学家莱布尼茨(Leibniz)在前人成果的基础上创立的. 在此后的近两个世纪中,微积分经历了一个飞速发展的时期,在许多科学领域里得到了广泛的应用,解决了许多过去认为是高不可攀的困难问题. 然而这个时期的微积分却未能为自己的方法提供逻辑上坚实的基础,而只是借助于直观的"无穷小"来表述他们的卓越思想. 这种逻辑上的缺陷招致了很多怀疑与批评,引起人们长达一个多世纪的误解与争论. 直到 19 世纪上半叶,柯西(Cauchy)与维尔斯特拉斯(Weierstrass)等人建立了极限理论,为建立微积分坚实的理论基础向前迈进了一大步. 又过了几十年时间,在 19 世纪下半叶,康托尔(Cantor)与戴德金(Dedekind)等人经过缜密的考察才发现,极限理论的一些基本原理,本质上依赖于实数系的一个非常关键的性质——实数的连续性. 进而建立了实数理论,这样才使得微积分有了坚实的逻辑基础. 为了方便读者的学习,在本章中我们主要指出关于实数系的一些基本事实与性质,进而给出实数列的极限理论.

1.1　实数系

微积分的主要研究对象是以实数为自变量的函数. 本节先来介绍实数系的相关知识.

在中学数学中,我们已经熟知,实数可以用数轴表示,且这种表示方法使得各实数之间的一些关系及运算具有几何直观性(图 1.1.1).

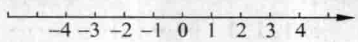


图 1.1.1

任何两个实数间可以进行加、减、乘、除(分母不为零)运算且运算结果仍为实数.

实数集还具有序关系: 对任意两个实数 a,b,下列三种关系

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b$$

有且只有一个成立. 对任何三个实数 a,b,c,若 $a\leqslant b$,则 $a+c\leqslant b+c$,且当 $c\geqslant 0$ 时,$ac\leqslant bc$.

从数轴上还可以看到，任何两个实数之间既有有理数，又有无理数，这称为有理数和无理数在实数系中的稠密性.

实数集的子集称为数集. 为方便起见，记实数集为$\mathbb{R}$，空集为$\varnothing$，几个常用的数集分别记为：

自然数集——$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

正整数集——$\mathbb{N}^*=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

整数集——$\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$；

有理数集——$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0\right\}$.

为叙述方便，我们引入两个常用的数学符号：

“$\exists$”表示“存在”；

“$\forall$”表示“对于任意的”.

例如，“$\exists M\in\mathbb{R}$”表示“存在实数 M”；“$\forall x\in\mathbb{Q}$”表示“对于任意的有理数 x”.

下面考虑数集的有界性.

定义 1.1.1 ……………………………………………………………………

设 A 为非空数集，若$\exists M\in\mathbb{R}$，使得$\forall x\in A$，有 $x\leqslant M$，则称数集 A 有上界，并且称 M 为 A 的一个上界；若$\exists m\in\mathbb{R}$，使得$\forall x\in A$，有 $x\geqslant m$，则称数集 A 有下界，并且称 m 为 A 的一个下界. 既有上界又有下界的数集 A 称为有界的；否则称 A 为无界的.

例如，闭区间$[0,1]$，开区间$(-1,1)$为有界的；自然数集$\mathbb{N}$有下界 0，但无上界；有理数集既无上界又无下界.

显然，若数集 A 有上界(下界)，则 A 有无穷多个上界(下界).

定义 1.1.2 ……………………………………………………………………

(1)设 A 是有上界的非空数集，称 A 的最小上界 ξ 为 A 的**上确界**，记为 $\xi=\sup A$；(2)设 A 是有下界的非空数集，称 A 的最大下界 η 为 A 的**下确界**，记为 $\eta=\inf A$.

▶ **例 1.1.1** ……………………………………………………………………

(1) 闭区间$[0,3]$的上，下确界分别是 3 和 0；

(2) 开区间$(-1,1)$的上，下确界分别是 1 和 -1；

(3) 无穷区间$(0,+\infty)$无上界，下确界是 0；

(4) 数集$\left\{0,1-\dfrac{1}{2},1-\dfrac{1}{3},\cdots,1-\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$的上，下确界分别是 1 和 0；

(5) 开区间$(0,1)$内的无理数之集 E 的上，下确界分别是 1 和 0.

易见，A 的上确界 $\xi=\sup A$ 可以在 A 中(如闭区间$[0,3]$)，也可以不在 A 中(如开区间$(-1,1)$)，如果 ξ 在 A 中，又称 ξ 为 A 的最大值，记为 $\xi=\max A$. 此时，$\max A=\sup A$. 开区间$(-1,1)$则没有最大值.

类似地，如果 A 的下确界 $\eta=\inf A$ 在 A 中，又称 η 为 A 的最小值，记为 $\eta=\min A$.

作为本节结尾，我们给出下列关于实数系的基本性质. 它本质上揭示了实数的连续性.

定理 1.1.1(确界原理) ……………………………………………………

有上界的非空数集必有上确界.

这个结果直观上是非常显然的，但是其严格证明已超出本课程的要求.

若 A 为有下界的非空数集，则数集 $-A=\{-x\mid x\in A\}$ 非空且有上界，由定理 1.1.1，$-A$ 存在上确界 ξ，不难看出，$\eta=-\xi$ 即为 A 的下确界. 由此得

定理 1.1.2 ……………………………………………………………

有下界的非空数集必有下确界.

习题 1.1

1. 用数学归纳法证明：

(1) $1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$；

(2) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

(3) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2\ (n+1)^2$.

2. 求下列数集的上、下确界.

(1) 有限个实数构成的集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；

(2) $\{x\mid x\in\mathbb{Q},x^2<2\}$；

(3) $\{x\mid x\in\mathbb{R},x^2-2x-3<0\}$；

(4) $\left\{x_n\mid x_n=[1+(-1)^n]\dfrac{n+1}{n},n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

3. 集合 $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},x^2<2\}$，证明：$\sup A=\sqrt{2}$.

4. 设函数 $f(x)$在数集 D 上有定义，证明：

(1) $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$；　(2) $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$.

5. 对于非空实数集 A，$\sup A(\inf A)$与 $\max A(\min A)$有什么联系与区别？

6. 设 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明：$\max\{a,b\}=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$；$\min\{a,b\}=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

7. 设 A,B 均为非空有界数集，且 $A\cap B$ 非空，证明：

(1) $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$； (2) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$；

(3) $\inf(A\cap B)\geqslant\max\{\inf A,\inf B\}$； (4) $\sup(A\cap B)\leqslant\min\{\sup A,\sup B\}$.

8. 设 A,B 均为非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$，$AB=\{xy\mid x\in A,y\in B\}$. 证明：(1) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；(2) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$；(3) 当 $A,B\subseteq\{x\mid x\geqslant 0\}$时，有 $\inf AB=\inf A\inf B$，$\sup AB=\sup A\sup B$.

9. 证明下列命题：(1) 设 A 为有上界的非空数集，则 $\xi=\sup A$ 的充分必要条件是：ξ 为 A 的上界，并且 $\forall\varepsilon>0$，存在 $x\in A$，使得 $x>\xi-\varepsilon$.

(2) 设 A 为有下界的非空数集，则 $\eta=\inf A$ 的充分必要条件是：η 为 A 的下界，并且 $\forall\varepsilon>0$，存在 $x\in A$，使得 $x<\eta+\varepsilon$.

1.2　数列极限的基本概念

以正整数 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 为下标的一列实数按照下标的大小顺序排成一列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

称为一个(实)**数列**，也可以记为 $\{a_n\}$. a_n 称为数列的第 n 项或通项. 例如，

(1) $\{2n-1\}$；(2) $\{(-1)^n\}$；(3) $\{2+2^{-n}\}$；(4) $\left\{\dfrac{2-(-1)^n}{n}\right\}$.

考察上面几个数列的例子可以发现，当项数 n 由小变大时，数列$\{2+2^{-n}\}$的项 $2+2^{-n}$越来越接近实数 2，即数列$\{2+2^{-n}\}$的项越来越靠后时，这些项会朝着固定值 2 变化并无限接近 2，我们称数列$\{2+2^{-n}\}$有“极限”2. 同样地，数列$\left\{\dfrac{2-(-1)^n}{n}\right\}$的项越来越靠后时，这些项会朝着固定值 0 变化并无限接近 0，即数列$\left\{\dfrac{2-(-1)^n}{n}\right\}$有极限 0. 但是$\{2n-1\}$与$\{(-1)^n\}$则没有这样的性质.

我们需要把这种关于**数列极限**的直观描述用符合逻辑的语言表达出来.

定义 1.2.1

对于数列$\{a_n\}$及常数 A，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，使得当 $n>N$ 时，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$. 则称数列$\{a_n\}$有极限 A，也称$\{a_n\}$收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 或 $a_n\to A(n\to\infty)$.

若数列$\{a_n\}$没有极限，则称$\{a_n\}$发散.

上述定义精确地表达了当数列$\{a_n\}$的项越来越靠后时，这些项会朝着 A 变化并“无限接近”A，因为无论对于多么小的正数 ε，都可以找到相应(依赖于 ε)的自然数 $N=N(\varepsilon)$，使得数列$\{a_n\}$中第 N 项后面的每一项与 A 的距离

都小于 ε.

▶ **例 1.2.1** ……

设 $0<|q|<1$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

证明 对任意正数 ε,为了使 $|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$,只要 $n>\log_{|q|}\varepsilon$ 就可以了.于是可取自然数 $N\geqslant\log_{|q|}\varepsilon$.当 $n>N$ 时,就有 $n>\log_{|q|}\varepsilon$,从而有

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon.$$

由极限定义便知 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$

▶ **例 1.2.2** ……

设 $a_n=\dfrac{2n^2+n+2}{n^2-3}$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

证明 当 $n\geqslant8$ 时,有

$$|a_n-2|=\frac{n+8}{n^2-3}\leqslant\frac{2n}{\frac{1}{2}n^2}=\frac{4}{n}.$$

由此知,$\forall\varepsilon>0$,可取自然数 $N\geqslant\max\left\{8,\dfrac{4}{\varepsilon}\right\}$,当 $n>N$ 时,

$$|a_n-2|\leqslant\frac{4}{n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

▶ **例 1.2.3** ……

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明 记 $a_n=\sqrt[n]{n}-1$,则当 $n\geqslant2$ 时,

$$n=(1+a_n)^n\geqslant\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2\geqslant\frac{1}{4}n^2a_n^2,$$

从而 $0<a_n\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.所以 $\forall\varepsilon>0$,取自然数 $N\geqslant\max\left\{2,\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$0<a_n\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

由极限定义得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

▶ **例 1.2.4** ……

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.求证:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^A$;

(2) 如果 $A>0,a_n>0,n=1,2,\cdots$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln A$;