普通高等教育“十二五”规划教材

随机过程习题解答（第3版）

李裕奇 刘 赪 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

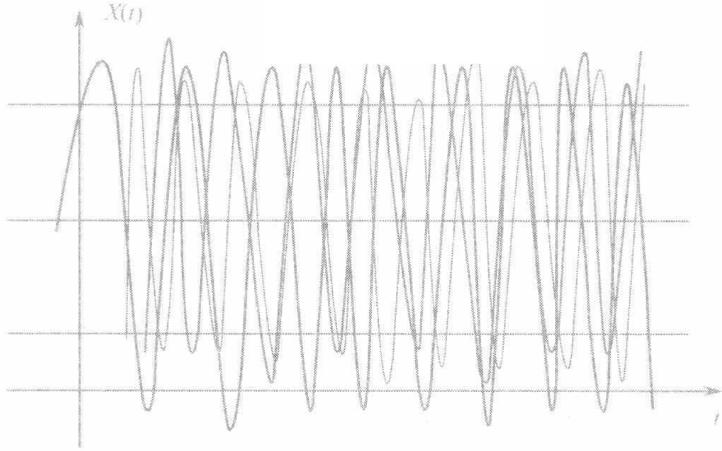
普通高等教育“十二五”规划教材

随机过程

（第3版）

习题解答

李裕奇　刘赪　编著



国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书是国防工业出版社出版、李裕奇等编写的《随机过程》(第3版)一书的配套教材,书中的习题大部分出自该书。习题亦按教材内容分为每小节的基本练习、每章综合练习与每章自测题三个部分。本书内容包括概率论基础知识、随机过程的基本概念、均方微积分、泊松过程、平稳过程、马尔可夫过程、时间序列分析的概念、平稳时间序列的模型拟合等随机过程与时间序列分析的基本理论与简单应用的习题解答,简明易懂,步骤详细,思路清晰,推导严谨。

读者只需具备概率论、微积分与线性代数知识,即可顺利阅读全书。

本书可作为高等学校本科生、研究生的教学辅导书或参考书,也可作为相关工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程(第3版)习题解答/李裕奇,刘赪编著.—北京:国防工业出版社,2014.9

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-09610-1

Ⅰ.①随... Ⅱ.①李...②刘... Ⅲ.①随机过程—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 249945 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 **印张** 15½ **字数** 281 千字

2014年9月第3版第1次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 32.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

随机过程理论是现代随机数学的一个重要分支，它研究的是动态随机现象的统计规律性，探索的是大千世界中动态数据的奥秘。无论在通信技术、电子科学、物流运输还是在金融经济等各个领域、各个专业方面都已无可争议地呈现出其强大的理论技术的支撑能力。因此对于现代科学技术人才而言，随机过程理论是一门重要的基础理论课程，也是一种重要的应用技术手段。

由于近年来时间序列分析理论的迅猛发展与广泛应用，大多高校均开设了“随机过程与时间序列分析”课程，因此在第3版教材中，增加了时间序列分析的概念与平稳时间序列的模型拟合等内容。为了使读者能更好地学习和掌握随机过程与时间序列分析的基本理论与基本方法，最直接的方法是做练习，通过练习加深对基本概念的理解，学会定理的应用，触发衍生问题的思考。由于随机过程理论与时间序列分析的学习有相当的难度，我们根据多年的教学经验，编写了这本习题解答，试图通过我们的努力，能帮助初学者尽快掌握研究、分析与应用随机过程与时间序列分析的理论与方法。

本书作为国防工业出版社出版、李裕奇等编写的《随机过程（第3版）》一书的配套教材，书中的习题大部分出自该书。习题亦按教材内容分为每小节的基本练习、每章综合练习与每章自测题三个部分，尽量按照循序渐进、由浅入深的方式安排，以便于各个层次的学习者把握学习要点和基本内容。在第3版中增加了两章时间序列分析内容，本书配有相应习题解答，简明易懂，适于操作。

本书的出版得益于国防工业出版社、西南交通大学教务处教材科、数学学院统计系的鼎力支持与帮助，统计系与统计咨询中心全体同仁的热情参与和支持，编者谨此一并表示由衷的感谢。

由于编者水平有限，书中难免会有错误与不妥之处，敬请同行与读者批评、指正。

李裕奇

2014年9月于成都

目　录

第 1 章　概率论基础

1.1 基本内容

1. 随机试验、随机事件与概率定义

(1) 随机试验：概率论中的试验是指对自然的观察或为某种目的进行的科学实验。如果此试验能在相同条件下重复进行，且每次试验的可能结果不止一个，能够事先明确试验所有可能结果，而每一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。这样的试验就是随机试验。

(2) 样本空间：随机试验的全部可能结果的集合称为样本空间，记作 S。随机试验的每一个可能结果，即组成样本空间的元素称为样本点，又称基本事件，记作 e。

(3) 随机事件：S 的子集，即部分样本点的集合称为随机事件。通常用大写字母 A、B、C 等表示。若事件中至少一个样本点发生时，称这一事件发生或出现。

(4) 概率的公理化定义：设 E 为随机试验，S 为其样本空间，对于 E 的每一事件 A，赋予一实数 $P(A)$，若集函数 $P(\cdot)$满足

1° 非负性：$\forall A\subset S, P(A)\geqslant 0$

2° 规范性：$P(S)=1$

3° 可列可加性：若 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互不相容的随机事件列，即 $\forall i\neq j, A_i A_j=\phi$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$为随机事件 A 的概率。

(5) 概率的基本性质：

性质 1　不可能事件发生的概率为零，即 $P(\phi)=0$

性质 2　(有限可加性)：若随机事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

性质 3　若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$，且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

性质 4　$\forall A\subset S, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$

性质 5　$\forall A \subset S$，有 $P(A)+P(\bar{A})=1$

性质 6　$\forall A \subset S, B \subset S, P(A \cup B) \leqslant P(A)+P(B)$，且

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

2. 古典概型概率计算方法

若随机试验的样本空间中的元素个数只有有限个，记为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，且每个基本事件 e_i 出现的可能性相等，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$$

则称此试验为古典概型。对于古典概型，任意一个随机事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{S\text{ 中基本事件总数}}$$

3. 条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式

(1) 条件概率定义：设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

(2) 乘法公式：设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B \mid A)$$

对于任意的 $n \geqslant 2$，设 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$$
$$P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

(3) 全概率公式与贝叶斯公式：设随机试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，若 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个完备事件组(或称为 S 的一个划分)，即满足条件

1° $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，即 $B_i B_j=\phi, i \neq j, i, j=1,2,\cdots,n$

2° $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n=S$

且有 $P(B_i)>0, i=1,2,\cdots,n$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$$

称为全概率公式。

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i) P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(A \mid B_j)}, i=1,2,\cdots,n$$

称为贝叶斯公式。

4. 独立性

(1) 两个事件的相互独立性：设 A,B 是两事件，如果

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称 A,B 为相互独立事件。

(2) 多个事件的相互独立性：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对于任意 k，$2\leqslant k\leqslant n$个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k},1\leqslant i_j\leqslant n,j=1,2,\cdots,k$，均有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为相互独立的事件。

(3) 试验的独立性定义：对于任意的随机试验，若每个试验的结果都不依赖于其它试验的结果，则称试验之间是相互独立的。

5. 随机变量及其分布函数

(1) 随机变量定义：设 E 为随机试验，其样本空间 $S=\{e\}$，若对于每一个 $e\in S$，均有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样一个定义在样本空间 S 上的单值实函数

$$X=X(e)$$

称为随机变量，其值域 $R_X\subset(-\infty,+\infty)$。

(2) 分布函数的定义：设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\forall x\in R$$

称为 X 的分布函数。

随机变量的分布函数具有以下重要性质：

1° $F(x)$ 是一个不减函数：即 $\forall x_1\leqslant x_2,F(x_1)\leqslant F(x_2)$

2° $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且 $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

3° $F(x)$ 是右连续函数：即 $F(x+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}F(x+\varepsilon)=F(x)$

4° $\forall x_1\leqslant x_2,P(x_1<x\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)$

(3) 离散型随机变量：若随机变量 X 的可能取值仅有有限个或可列多个，则称此随机变量为离散型随机变量。离散型随机变量 X 的概率分布(概率函数)或分布律(列)为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

p_k 满足条件

$$1^\circ\ p_k\geqslant 0,k=1,2,\cdots$$

$$2^\circ\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$$

其中 x_k 为 X 的可能取值。

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\}$$

(4) 常见的离散型分布如下：

分布类型	分布律	参数
(0－1)分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},k=0,1$	$0<p<1$
二项分布 $B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$	$0<p<1$
几何分布	$P\{X=k\}=P(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots$	$0<p<1$
超几何分布	$P\{X=k\}=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},k=0,1,2,\cdots,r$	$r=\min\{n,M\}$
负二项分布	$P\{X=k\}=C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r},k=r,r+1,\cdots$	$r\geqslant1$, $0\leqslant p<1$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$	$\lambda>0$
等可能分布	$P\{X=x_k\}=\dfrac{1}{n},k=1,2,\cdots,n$	

(5) 连续型随机变量：如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$，存在非负函数 $f(x)$，使得 $\forall x\in R$，均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

则称 X 为连续型随机变量，其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数，简称概率密度。

随机变量 X 的概率密度具有以下性质：

1° $f(x)\geqslant0,x\in(-\infty,+\infty)$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$

3° $\forall x_1\leqslant x_2,P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x$

4° 若 $f(x)$ 在 x 处连续，则 $F'(x)=f(x)$

(6) 常见的连续型分布如下：

分布类型	概率密度	参数
均匀分布 $U(a,b)$	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a) & a<x<b \\ 0 & \text{其它}\end{cases}$	$a<b$
指数分布 $Z(\alpha)$	$f(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$	$\alpha>0$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ,σ^2
伽玛分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$	$\alpha>0$ $\beta>0$
瑞利分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2} & x>0 \\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$	$\sigma>0$
柯西分布	$f(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$	$\lambda>0$ μ

6. 随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量函数的分布：若已知离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$$

$g(\cdot)$为连续函数，则 X 的函数 $Y=g(X)$亦为离散型随机变量，其可能取值为

$$y_k=g(x_k),k=1,2,\cdots$$

情况 1：若 $y_k=g(x_k),k=1,2,\cdots$中任何两个值都有不相等，即当$x_i\neq x_j$ 时，$g(x_i)\neq g(x_j),i,j=1,2,\cdots$，则

$$P\{Y=y_k\}=P\{g(X)=y_k\}=P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$$

情况 2：若 $y_k=g(x_k),k=1,2,\cdots$中存在两个或两个以上的值相等，如存在 $x_i\neq x_j$ 但 $g(x_i)=g(x_j)=y_i$，则

$$P\{Y=y_i\}=P\{X=x_i\cup X=x_j\}= P\{X=x_i\}+P\{X=x_j\}=p_i+p_j$$

(2) 连续型随机变量函数的分布：

① $g'(x)$恒大于 0(或恒小于 0)的情形：已知 X 的概率密度

$$f_X(x)\begin{cases}>0 & a<x<b \\ =0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 a 可为 $-\infty$，b 可为 $+\infty$，且 $y=g(x)$ 在 (a,b) 处处可导，恒有 $g'(x)>0$（或 $g'(x)<0$），则 $Y=g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\mid h'(y)\mid & c<y<d\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $x=h(y)$ 为 $y=g(x)$ 的反函数，$c=\min\{g(a),g(b)\}$，$d=\max\{g(a),g(b)\}$。

② $g'(x)$ 不恒大于 0，或不恒小于 0 情形：

1° 先将 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 用 X 的分布函数表示，即

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x$$

（注意将区域 $\{X\mid g(x)\leqslant y\}$ 分成关于 y 的单值区间）

2° 对 $F_Y(y)$ 求导即得 Y 的概率密度，即

$$f_Y(y)=F'_Y(y)$$

7. 二维随机变量的定义与分布函数

(1) 二维随机变量：设 E 为一个随机试验，样本空间 $S=\{e\}$，$X=X(e)$ 及 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量，由它们构成的联合变量 (X,Y) 称为二维随机变量或二维随机向量。

(2) 二维随机变量 (X,Y) 的分布函数定义：设 (X,Y) 是定义在 S 上的二维随机变量，对于任意实数 x,y，二元函数

$$F(x,y)=P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数，或随机变量 X 与 Y 的联合分布函数。

(3) 二维随机变量的分布函数具有以下性质：

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数，即

$$\forall x_1\leqslant x_2,F(x_1,y)\leqslant F(x_2,y);\quad \forall y_1\leqslant y_2,F(x,y_1)\leqslant F(x,y_2)$$

2° $0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$，且 $F(x,-\infty)=0$，$F(-\infty,y)=0$，$F(-\infty,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$

3° $F(x,y)$ 关于变量 x 和 y 均是右连续的，即

$$\forall x,y\in R,F(x+0,y)=F(x,y)=F(x,y+0)$$

4° 对于任意的 $x_1\leqslant x_2$，$y_1\leqslant y_2$，下述不等式成立：

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geqslant 0$$

(4) 二维离散型随机变量：若二维随机变量 (X,Y) 的所有可能取值是有限对或可列多对，则称 (X,Y) 为二维离散型随机变量。

二维离散型随机变量的概率分布为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\},i,j=1,2,\cdots$$

满足性质

1° $p_{ij} \geqslant 0, i, j=1,2,\cdots$

2° $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

其分布函数为

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = \sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} p_{ij}$$

关于 X 与 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leqslant x} P\{X = x_i\},$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \leqslant y} P\{Y = y_i\}$$

关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为

$$p_{i\cdot} \triangleq P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1,2,\cdots,$$

$$p_{\cdot j} \triangleq P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1,2,\cdots$$

(5) 二维连续型随机变量:设二维随机变量(X,Y)的分布函数为 $F(x,y)$,若存在一个非负可积的二元函数 $f(x,y)$,使得 $\forall x,y \in R$,都有

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

则称(X,Y)是二维连续型随机变量,函数 $f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度,或随机变量 X 与 Y 的联合概率密度。概率密度 $f(x,y)$具有以下性质:

1° $f(x,y) \geqslant 0, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1$

3° 若 $f(x,y)$在点(x, y)处连续,则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

4° 随机点(X ,Y)落在平面区域 D 内的概率

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

关于 X 与 Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \mathrm{d}t, F_y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t) \mathrm{d}t$$

关于 X 与 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

(6) 多维正态分布：二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$的概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp$$

$$\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

n 维正态分布的概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\mid C\mid^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\mu)'\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\mu)\right\}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$为 n 维实向量，$\boldsymbol{\mu}=(E(X_1),E(X_2),\cdots,E(X_n))'$为随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的均值向量，$\boldsymbol{C}=(C_{ij})_{n\times n}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的协方差阵，即

$$C_{ij}=\mathrm{Cov}(X_i,X_j),i,j=1,2,\cdots,n$$

n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意线性组合 $l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$服从一维正态分布。

8. 相互独立的随机变量

(1) 相互独立性：设 $F(x,y)$及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数，若$\forall x,y\in R$，有

$$P\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant y\}=F_X(x)F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的。

(2) 离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是它们的联合分布律等于两个边缘分布律的乘积

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$$

即

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},i,j=1,2,\cdots$$

(3) 连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是它们的联合概率密度 $f(x,y)$等于边缘概率密度 $f_X(x)$和 $f_Y(y)$的乘积，即

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

9. 两个随机变量的函数分布

(1) 设随机变量(X,Y)的概率分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

则离散型随机变量和 $Z=X+Y$ 的分布律公式为

$$P\{Z=z_k\}=\sum_i P\{X=x_i,Y=z_k-x_i\}=$$
$$\sum_j P\{Y=y_j,X=z_k-y_j\}$$

其中 i,j 均为自然数，$\sum\limits_i$，$\sum\limits_j$ 是对所有满足等式 $z_k=x_i+y_j$ 的有序自然数对 (i,j) 求和。特别地，当 X 与 Y 相互独立时

$$P\{Z=z_k\}=\sum_i P\{X=x_i\}P\{Y=z_k-x_i\}=$$
$$\sum_j P\{Y=y_j\}P\{X=z_k-y_j\}$$

(2) 两随机变量之和 $Z=X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x$$
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

特别地，当 X 与 Y 相互独立时

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x$$
$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y$$

(3) 两随机变量之商 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度函数为

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y|f(yz,y)\mathrm{d}y$$

(4) 随机变量极值的分布：设 X,Y 是两个相互独立的随机变量，称 $M=\max\{X,Y\}$ 为最大值变量，$N=\min\{X,Y\}$ 为最小值变量，统称为极值随机变量，其分布函数分别为

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z),F_N(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

它们的概率密度函数分别为

$$f_M(z)=f_X(z)F_Y(z)+f_Y(z)F_X(z)$$
$$f_N(z)=f_X(z)(1-F_Y(z))+f_Y(z)(1-F_X(z))$$

10. 数学期望

(1) 离散型随机变量的数学期望：设 X 的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$，若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_kp_k$ 绝对收敛，则称

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$$

为 X 的数学期望，亦称为概率均值，简称均值或期望。

(2) 连续型随机变量的数学期望：设 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则称

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

为连续型随机变量 X 的数学期望，简称期望或均值。

(3) 随机变量函数的数学期望：

$Y=g(X)$ 为离散型： $E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(x_k)p_k$

$Y=g(X)$ 为连续型： $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$

(4) 数学期望的基本性质：

性质 1 (线性法则)设 X 为随机变量，其期望为 $E(X)$，对任意常数 a,b，有

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

性质 2 (加法法则)设 X,Y 为同类型随机变量，则

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

性质 3 (乘法法则)设 X,Y 为同类型随机变量，且相互独立，则

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

性质 4 (柯西—许互兹不等式)设 X,Y 是两个随机变量，则

$$|E(XY)|^2\leqslant E(X^2)E(Y^2)$$

11. 方差

(1) 方差的定义：设 X 是一个随机变量，若 $E[(X-E(X))^2]$存在，则称其为 X 的方差，记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$ 或 σ_X^2

即

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E[(X-E(X))^2]$$

显然 $D(X)\geqslant 0$，称 $\sigma_X=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差或均方差。

由方差的定义易得

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$$

(2) 离散型随机变量的方差：

$$D(X)=\sum_{K=1}^{\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k$$

$$D(X)=\sum_{K=1}^{\infty}x_k^2p_k-\left(\sum_{k=1}^{\infty}x_kp_k\right)^2$$

(3) 连续型随机变量的方差：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2f(x)\mathrm{d}x$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

(4) 方差的基本性质：

性质 1　对于任意实常数 a，b,则

$$D(aX+b)=a^2D(X)$$

性质 2　设 X,Y 为两个相互独立的随机变量,则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

性质 3　(切比雪夫不等式)设 X 的均值 $E(X)=\mu$,方差 $D(X)=\sigma^2$,则

$$\forall\varepsilon>0,P\{|X-\mu|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

性质 4　$D(X)=0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 $\mu=E(X)$,即 $P\{X=\mu\}=1$

12. 协方差、相关系数、矩

(1) X 与 Y 的协方差为

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$$

根据方差及协方差的定义可知

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

(2) 随机变量 X 与 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

(3) 矩：

X 的 k 阶原点矩：$\mu_k=E(X^k)$

X 的 k 阶中心矩：$\sigma_k=E[(X-E(X))^k]$

X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩：$\mu_{kl}=E(X^kY^l)$

X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩：$\sigma_{kl}=E[(X-E(X))^k(X-E(X))^l]$

13. 条件分布

(1) 条件分布律：设 (X,Y) 是离散型随机变量,可能取值为 (x_i,y_j),$i,j=1,2,\cdots$,其分布律及边缘分布律分别为