



非保守系统的拟变分 原理及其应用

Quasi-variational Principles of
Non-conservative System and Their Applications

梁立孚 宋海燕 著
樊涛 刘宗民

$$\delta \Pi_{22} + \delta Q + \delta P = 0$$

$$\Pi_{22} = \iiint_V \left[\frac{\partial A(E_{JK})}{\partial E_{JK}} \left(\frac{1}{2} U_{J,K} + \frac{1}{2} U_{K,J} + \frac{1}{2} U_{I,J} U_{I,K} \right) - E_{JK} \frac{\partial A(E_{JK})}{\partial E_{JK}} + A(E_{JK}) - \bar{F}_I U_I \right] dV$$

$$- \iint_{S_a} \bar{P}_I U_I dS - \iint_{S_u} (U_I - \bar{U}_I) (\bar{G}_{I,J} + U_{I,J}) \frac{\partial A(E_{JK})}{\partial E_{JK}} N_K dS$$

$$\delta Q = \iiint_V U_I \delta \bar{F}_I dV, \quad \delta P = \iint_{S_a} U_I \delta \bar{P}_I dS$$



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

非保守系统的拟变分 原理及其应用

**Quasi-variational Principles of Non-conservative
System and Their Applications**

梁立孚 宋海燕 樊 涛 刘宗民 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书共三编。第一编主要研究变分和变积方法,将作者首创的变积方法推广应用于非保守系统;研究质点、刚体非保守分析动力学的拟变分原理,引入拟驻值条件的概念。第二编研究非保守线性弹性静力学和动力学的拟变分原理及其应用;研究非保守塑性增量理论的拟变分原理及其应用;论述非保守系统拟变分原理的各类条件的完备性。第三编主要研究非保守非线性(包括几何非线性和物理非线性)弹性静力学和动力学的拟变分原理及其应用;研究基于基面力理论的非保守非线性弹性动力学初值问题的拟变分原理及其应用。

本书适合航天、航空、航海、建筑、机械等领域的工程技术人员和科学研究人员参考,也可供相关领域的教师、研究生和本科高年级学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非保守系统的拟变分原理及其应用/梁立孚等著. —北京:科学出版社, 2015
ISBN 978-7-03-043407-4

I. ①非… II. ①梁… III. ①保守系统—研究 IV. ①O32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 033361 号

责任编辑:刘信力/责任校对:钟 洋
责任印制:肖 兴/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 (1/16)

2015 年 3 月第一次印刷 印张: 23 3/4

字数: 460 000

定价: 148.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

变分原理作为有限元素法和其他近似计算方法的理论基础,随着高速电子计算机的广泛应用,越来越受到学术界的重视.在变分原理这个重要的研究领域中,国内外著名变分原理学家,曾经撰写过多部优秀的变分原理专著,科学地总结了这些变分原理研究的先驱者们对变分原理及其应用方面做出的重要贡献.

为了反映这个学科领域的新发展,作者撰写了专著《变分原理及其应用》,于2005年由哈尔滨工程大学出版社、北京航空航天大学出版社、北京理工大学出版社、西北工业大学出版社和哈尔滨工业大学出版社联合出版.对于这部专著,中国科学院院士刘高联教授曾给出如下评价:

各种自然现象和过程(特别是力学现象)通常由一组数理方程(偏微分方程、积分-微分方程或积分方程)及初边值条件来描述,但人们通过长期的探索研究,发现这些现象和过程常常使系统的某一整体量(泛函)取驻值或极值,因而又可以用相应的变分原理来描述.后一描述法的突出优点是:①数学形式简单紧凑,但内涵却甚丰富(包含了全部数理方程及初边值条件组).②是整体性描述,包括各种物理间断面上的相容条件.③有“变域变分”“自然边界条件”等特殊工具,能够自动捕获各种未知边(分)界面.④是各种变分直接解法和有限元法的理论基础.可见,变分原理既体现了数学形式上的简洁优美,又体现了物理内容上的丰富深刻,更具有工程应用上的价值,确是代表了数学与物理的交融与贯通以及理论与实用的结合与统一.特别是自20世纪60年代起,有限元法的兴起与蓬勃发展,使作为其主要理论基础的变分原理又重新焕发了青春,取得了长足的发展.

梁立孚教授潜心从事力学及电磁学变分原理的研究20余年,卓有成效,现将其研究心得写成该书,我有幸得以先睹为快.该书对一般力学、线性弹性静力学与动力学、线性电磁场理论及压电材料力学的变分原理及其应用(包括有限元法及各种变分直接方法、离散分析等)作了相当系统和深入的研究,系统总结了作者本人长期从事这方面研究的创新成果.就个人体会,主要体现在下列五个方面:

(1) 首创变积法:通过定义一个“变积”作为传统“变分”的逆运算,首创了变积法,是求解变分学反命题的一个适用性较广的新方法,是贯穿全书的理论基石.

(2) 广泛、详细地同时应用变积法和乘子法推导了上述力学等问题的各种变分原理及广义变分原理,使读者可以从这两种方法的对比中全面、深入地体会它们的实质、异同和优缺点.

(3) 灵巧地应用乘子法,成功地消除了变分临界状态(乘子恒为零).

(4) 把变积同拉氏变换结合起来,成功地导得了更简单(只含单重卷积)的 Gurtin 型初值问题变分原理,可以简化其数值求解.

(5) 详细论述了变分原理各类条件的完备性及其应用.

该书既是一本力学变分原理方面的创新性专著,同时又因推导过程及文字解说详尽,因此不但值得向有关科研人员推荐,而且也很适合作大学有关专业的教师、研究生及本科高年级学生的教材或参考书.

专著《变分原理及其应用》内容的特点是研究保守系统和线性系统的变分原理及其应用,作为该书的继续和发展,本书主要研究非保守系统和非线性系统的变分原理及其应用.非保守系统的拟变分原理和广义拟变分原理的研究涵盖了许多学科,是一个相当重要的研究领域,这就是撰写本书的主要原因.

在撰写这部专著的过程中,得到刘殿魁教授、何钟怡教授、盖秉政教授、李基辉研究员等专家的大力支持与帮助,作者对他们表示衷心感谢.作者还感谢国家自然科学基金、博士点基金、国家科学技术学术著作出版基金的资助.

由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,诚恳希望各位专家和广大读者给予指导和帮助.

作 者

2013 年 8 月

目 录

绪论	1
----	---

第一编 基础理论

第 1 章 变分与变积	7
1.1 变分方法	7
1.1.1 变分法的基本概念	7
1.1.2 自由的变分问题	11
1.1.3 有附加条件的变分问题	15
1.2 变积方法	18
1.2.1 变积的基本概念	18
1.2.2 Poisson 方程对应的泛函	19
1.2.3 波动方程对应的泛函	20
1.2.4 输运方程对应的泛函	24
1.3 变积方法应用于非保守系统	27
1.3.1 Poisson 方程对应的拟变分原理	27
1.3.2 波动方程对应的拟变分原理	28
1.3.3 波动方程初值问题对应的拟变分原理	29
1.3.4 输运方程边值问题对应的拟变分原理	32
1.3.5 输运方程初值问题对应的拟变分原理	33
第 2 章 非保守分析力学的拟变分原理	36
2.1 基本方程	37
2.2 拟 Hamilton 原理	37
2.3 广义拟变分原理	38
2.4 非完整非保守系统的拟变分原理和广义拟变分原理	39
2.5 算例	40
第 3 章 非保守分析力学初值问题的拟变分原理	43
3.1 分析力学初值问题的拟变分原理	43
3.2 卷积型广义拟变分原理	45
3.3 拟变分原理的检验	49
3.3.1 推导卷积拟势能原理的拟驻值条件	49

3.3.2 推导卷积型两类变量的广义拟变分原理的拟驻值条件	50
3.4 算例	52
3.5 讨论	53
第 4 章 刚体动力学的拟变分原理及其应用	54
4.1 刚体动力学的拟变分原理	54
4.2 刚体动力学的广义拟变分原理	58
4.3 应用举例	60
第 5 章 刚体动力学初值问题的拟变分原理及其应用	62
5.1 刚体动力学初值问题的拟变分原理	62
5.2 刚体动力学初值问题的广义拟变分原理	66
5.3 应用举例	68
参考文献	71

第二编 非保守线性弹性力学和塑性增量理论的 拟变分原理及其应用

第 6 章 应力分析和应变分析	77
6.1 应力分析	77
6.1.1 应力张量及其不变量	77
6.1.2 偏应力张量及其不变量	78
6.2 应变分析	79
6.2.1 应变张量及其不变量	79
6.2.2 偏应变张量及其不变量	80
6.3 与应力不变量和应变不变量有关的量	81
第 7 章 非保守弹性静力学的拟变分原理	83
7.1 引言	83
7.2 拟势能原理	84
7.3 拟余能原理	86
7.4 两类变量的广义拟变分原理	88
7.4.1 第一类两类变量广义拟变分原理	88
7.4.2 第二类两类变量广义拟变分原理	91
7.5 三类变量的完全广义拟变分原理	92
7.6 反映本构关系和几何条件的广义拟变分原理	94
7.7 反映本构关系和平衡条件的广义拟变分原理	95
7.8 应用举例	96

第 8 章 拟变分原理各类条件的完备性	104
8.1 引言	104
8.2 拟驻值条件	104
8.3 完备性的一种含义	107
8.4 完备性的另一种含义	107
8.5 拟变分原理各类条件完备性的应用	108
8.5.1 研究拟余能原理的驻值条件	108
8.5.2 研究广义拟变分原理	108
8.5.3 研究组合拟变分原理	110
第 9 章 非保守弹性动力学时域边值问题的拟变分原理	112
9.1 引言	112
9.2 拟 Hamilton 原理	113
9.3 拟余 Hamilton 原理	116
9.4 两类变量的广义拟变分原理	119
9.4.1 第一类两类变量广义拟变分原理	119
9.4.2 第二类两类变量广义拟变分原理	122
9.5 三类变量的完全广义拟变分原理	124
9.6 反映本构关系和几何条件的广义拟变分原理	126
9.7 反映本构关系和动态平衡方程的广义拟变分原理	127
9.8 反映本构关系的广义拟变分原理	128
9.8.1 反映应变能本构和速度本构的拟变分原理	128
9.8.2 反映余应变能本构和动量本构的拟变分原理	130
9.9 应用举例	132
第 10 章 非保守弹性动力学初值问题的拟变分原理	137
10.1 引言	137
10.2 卷积型拟势能原理	139
10.3 卷积型拟余能原理	141
10.4 卷积型两类变量的广义拟变分原理	143
10.4.1 第一类两类变量广义拟变分原理	143
10.4.2 第二类两类变量广义拟变分原理	147
10.4.3 应用举例	150
10.5 三类变量的完全广义拟变分原理	154
10.6 反映本构关系和几何条件的广义拟变分原理	157
10.7 反映本构关系和动态平衡方程的广义拟变分原理	159
10.8 反映本构关系的卷积型广义拟变分原理	160

10.8.1	反映应变能本构和速度本构的卷积型拟变分原理	160
10.8.2	反映余应变能本构和动量本构的卷积型拟变分原理	162
10.9	在原空间中建立各类卷积型拟变分原理	164
10.9.1	卷积型拟势能原理	164
10.9.2	卷积型拟余能原理	166
10.9.3	卷积型两类变量的广义拟变分原理	168
10.9.4	卷积型三类变量的广义拟变分原理	175
10.9.5	说明	178
第 11 章	非保守塑性增量理论的拟变分原理	179
11.1	一般加载规律的弹塑性本构关系	179
11.1.1	引言	179
11.1.2	一般加载规律简单模型的推广	180
11.1.3	应力空间中一般加载规律的弹塑性本构关系	182
11.1.4	应力空间中一般加载规律的热弹塑性本构关系	183
11.1.5	讨论	184
11.2	应变空间中一般加载规律的弹塑性本构关系	185
11.2.1	引言	185
11.2.2	等向强化材料一般加载规律的弹塑性本构关系	187
11.2.3	应变空间中一般加载规律的热弹塑性本构关系	188
11.2.4	讨论	189
11.3	非保守塑性增量理论的拟变分原理	191
11.3.1	虚速率原理和拟势能原理	191
11.3.2	虚应力率原理和拟余能原理	193
11.3.3	两类变量的广义拟变分原理	194
11.3.4	三类变量的广义变分原理	197
11.3.5	讨论	199
参考文献		200

第三编 非保守非线性弹性力学的拟变分原理及其应用

第 12 章	非线性弹性力学	207
12.1	引言	207
12.1.1	两种构形的描述	207
12.1.2	应变和应力张量	207
12.1.3	几何非线性	208
12.1.4	物理非线性	208

12.2	基面力	209
12.2.1	基面力的定义及功用	209
12.2.2	用基面力表示的弹性定律	211
12.2.3	用基面力表示的平衡方程和边界条件	212
12.2.4	位移梯度的确定	212
第 13 章	非保守非线性弹性静力学拟变分原理	214
13.1	引言	214
13.2	虚功原理和拟势能原理	215
13.3	余虚功原理和拟余能原理	218
13.4	两类变量的广义拟变分原理	220
13.4.1	第一类两类变量的广义拟变分原理	220
13.4.2	第二类两类变量的广义拟变分原理	224
13.5	三类变量的广义拟变分原理	227
13.6	拟驻值条件	230
13.6.1	拟势能原理的拟驻值条件	230
13.6.2	拟余能原理的拟驻值条件	232
13.6.3	广义拟变分原理的拟驻值条件	233
13.7	弹性静力学拟变分原理的检验	234
13.8	派生的两类变量的广义拟变分原理	237
13.9	非保守非线性弹性静力学系统拟变分原理的退化	242
13.10	算例	245
13.10.1	非线性 Leipholz 杆的静力学研究	245
13.10.2	非保守大挠度矩形薄板的广义拟变分原理	252
第 14 章	非保守非线性弹性动力学时域边值问题的拟变分原理	259
14.1	引言	259
14.2	拟 Hamilton 原理	260
14.3	拟余 Hamilton 原理	264
14.4	两类变量的广义拟变分原理	269
14.4.1	第一类两类变量广义拟变分原理	269
14.4.2	第二类两类变量广义拟变分原理	273
14.5	三类变量的广义拟变分原理	276
14.6	非保守非线性弹性动力学系统时域边值问题拟变分原理的退化	280
14.7	算例	281
14.7.1	非线性 Leipholz 杆的动力学研究	281
14.7.2	非保守大挠度矩形薄板的广义拟 Hamilton 原理	288

14.8	裂隙函数问题	295
第 15 章	基于基面力的非保守非线性弹性动力学初值问题的拟变分原理	299
15.1	引言	299
15.2	卷积型拟势能原理	300
15.3	应用 Lagrange 乘子法推导卷积型拟势能原理的拟驻值条件	302
15.4	卷积型拟余能原理	304
15.5	应用 Lagrange 乘子法推导卷积型拟余能原理的拟驻值条件	306
15.6	卷积型两类变量广义拟变分原理	309
15.6.1	第一类卷积型两类变量广义拟变分原理	309
15.6.2	第二类卷积型两类变量广义拟变分原理	312
15.6.3	反映本构关系和几何条件的卷积型广义拟变分原理	314
15.6.4	反映本构关系和动态平衡方程的卷积型广义拟变分原理	316
15.6.5	反映应变能本构和速度本构的卷积型广义拟变分原理	317
15.6.6	反映余应变能本构和动量本构的卷积型广义拟变分原理	318
15.7	应用 Lagrange 乘子法建立卷积型两类变量广义拟变分原理	319
15.7.1	基于卷积型拟余能原理的卷积型两类变量的广义拟变分原理	319
15.7.2	基于卷积型拟势能原理的卷积型两类变量的广义拟变分原理	324
15.8	卷积型三类变量广义拟变分原理	328
15.9	应用 Lagrange 乘子法建立卷积型三类变量广义拟变分原理	331
15.9.1	应用 Lagrange 乘子法建立卷积型三类变量广义拟势能原理	331
15.9.2	应用 Lagrange 乘子法建立卷积型三类变量广义拟余能原理	336
第 16 章	非保守非线性弹性力学拟变分原理在有限元素法中的应用	339
16.1	有限元素法的基本概念	339
16.2	修正的拟势能原理	340
16.2.1	拟势能原理	340
16.2.2	修正的拟势能原理	341
16.3	修正的拟余能原理	343
16.3.1	拟余能原理	343
16.3.2	修正的拟余能原理	343
16.4	修正的两类变量广义拟变分原理	345
16.4.1	适用于有限元计算的两类变量广义拟余能原理	345
16.4.2	关于应力协调的说明	346
16.4.3	修正的两类变量广义拟余能原理	347
16.4.4	适用于有限元计算的两类变量广义拟势能原理	349
16.4.5	关于位移协调的说明	349

16.4.6	修正的两类变量广义拟势能原理	350
16.5	修正的三类变量广义拟变分原理	352
16.5.1	三类变量广义拟势能原理	352
16.5.2	关于位移协调的说明	353
16.5.3	修正的三类变量广义拟势能原理	354
16.5.4	适用于有限元计算的三类变量广义拟余能原理	356
16.5.5	关于应力协调的说明	356
16.5.6	修正的三类变量的广义拟余能原理	357
参考文献		360
索引		364

绪 论

我国学者十分重视连续介质力学中变分原理的研究. 文献 [1] 研究余能原理, 从理论上和应用上为研究广义变分原理奠定了基础. 文献 [2] 和 [3] 建立了弹性力学和塑性力学的广义变分原理, 为后来发展起来的混合有限元素法提供了理论依据, 并获得重要的应用. 文献 [4] 和 [5] 从流体力学的基本方程出发, 对内流、外流等一般的黏性流动建立了更为普遍的变分原理, 对不可压缩流体和可压缩流体分别建立了最大功率消耗原理. 并以运动方程为基础, 用 Lagrange 乘子法消除诸如物态方程、连续性方程及边界条件等变分约束条件, 建立了无约束条件的广义变分原理. 从而把固体力学中变分原理方法推广到黏性流体力学, 奠定了流体力学中有限元方法的基础. 在国外, Reissner 开创了研究广义变分原理的先河 [6], Washizu [7] 与胡海昌各自独立地建立了弹性力学和塑性力学的广义变分原理, Oden J T 和 Reddy J N 以及 Абовский, Н. П 也作出了重要贡献 [8,9]. 在这些开创性研究成果的指导和带动下, 我国一大批学者在这一学科领域做出了重要贡献. 梁立孚和胡海昌 [10] 及其他学者一起, 将广义变分原理的研究推广到一般力学. 这些工作大部分是研究保守系统的变分原理和广义变分原理.

对于非保守系统, 国外以 Leipholz 为代表, 提出广义自共轭的概念, 建立了广义的 Hamilton 原理, 给出了著名的 Leipholz 杆模型 [11,12]. Leipholz 仅研究非保守系统的势能原理, 我国学者在文献 [13] 中, 通过发展 Leipholz 的研究, 并发扬国内对广义变分原理研究的优势, 在伴生力系统的前提下, 建立了非保守系统的余能原理, 进而建立了关于弹性理论非保守系统的一般变分原理. 文献 [14] 建立了非保守系统自激振动的拟固有频率变分原理. 文献 [15] 建立了非保守系统的两类变量的广义拟变分原理, 并且给出同时求解一个典型的伴生力非保守系统的内力和变形两类变量的计算方法. 文献 [16] 建立了应用于薄壁结构的广义余能原理, 并且应用于航空航天薄壁结构中. 文献 [17] 将非保守系统的拟变分原理推广到刚体动力学中去, 并且举例说明了这种推广的意义. 文献 [18] 和 [19] 将非保守系统的拟变分原理推广到柔体动力学中去, 实现了质点、刚体力学与变形体力学的耦合, 能够解决航天动力学中的许多重要问题. 以上工作都是研究边值问题的相关内容.

对于初值问题, 1964 年 Gurtin 利用卷积理论, 提出了与弹性动力学初值-边值问题等价的变分原理 [20], 这种 Gurtin 型变分原理为建立弹性动力学初值-边值问题的各种近似解法奠定了可靠的理论基础. 近十多年来, 罗恩对线性变形体动力学的初值-边值问题的变分原理进行了比较全面深入的研究, 系统地建立与发展了一

些线性变形体动力学的 Gurtin 型变分原理^[21]. 最近, 罗恩解决了 Gurtin 型变分原理不能适用于非线性变形体动力学的难题, 提出了有限变形弹性动力学的非传统 Gurtin 型变分原理^[22]. 文献 [23] 和 [24] 将初值问题的变分原理和广义变分原理的理论推广到一般力学中去. 以上工作都是研究初值问题的保守系统的变分原理.

关于初值问题的非保守系统, 尚未见国外有这方面的研究报道. 文献 [25] 研究了非保守弹性动力学初值问题的 Gurtin 型拟变分原理, 文献 [26] 研究了非保守刚体动力学初值问题的卷积型拟变分原理, 文献 [27] 研究了非保守柔体动力学初值问题的卷积型拟变分原理.

在变分原理这个重要的研究领域, 国内外著名变分原理学家们, 曾经撰写多部优秀的变分原理专著^[7-9, 11, 28, 29], 科学地总结了这些变分原理研究的先驱者们对变分原理及其应用方面做出的重要贡献.

物质运动的规律, 可以用时空坐标的函数, 以微分方程形式描述; 也可以用这些函数的积分泛函, 以其取极值或驻值的变分形式描述. 由于有限元素法的发展及其在工程上的广泛应用, 变分原理作为其理论基础, 显示出重要性, 因此, 变分原理和广义变分原理的研究不仅在力学中受到重视, 而且已经延拓到自然科学的其他领域. 《变分原理及其应用》的内容的特点是主要研究保守系统和线性系统的变分原理及其应用. 在自然科学领域中, 非保守系统的研究涵盖了许多学科, 是一个相当重要的研究领域, 其中, 非保守系统的拟变分原理和广义拟变分原理的研究是一个重要的课题. 本书命名为非保守系统的拟变分原理及其应用, 主要研究非保守系统和非线性系统的变分原理及其应用, 是《变分原理及其应用》的研究内容的继续和发展.

本书分为以下三部分.

第一编主要研究变分和变积方法, 作者将首创的变积方法推广应用于非保守系统; 研究非保守分析动力学的拟变分原理和非保守分析动力学初值问题的拟变分原理. 正如学术界在非保守系统的研究领域引入拟变分原理的概念一样, 本书作者倡导引入拟驻值条件的概念. 研究刚体动力学的拟变分原理和刚体动力学初值问题的拟变分原理, 这部分内容的引入, 一方面是适应理论研究的需要, 另一方面是适应航天器动力学研究的需要.

第二编研究非保守线性弹性力学和塑性增量理论的拟变分原理及其应用, 内容包括、应力分析和应变分析、非保守弹性静力学的拟变分原理、拟变分原理各类条件的完备性、非保守弹性动力学时域边值问题的拟变分原理、非保守弹性动力学初值问题的拟变分原理、非保守塑性增量理论的拟变分原理. 另外, 还论述了非保守系统拟变分原理的各类条件的完备性.

第三编主要研究非保守非线性 (包括几何非线性和物理非线性) 弹性力学的拟变分原理及其应用, 内容涉及非线性弹性力学概述和基面力理论、非保守非线性弹

性静力学拟变分原理、非保守非线性弹性动力学时域边值问题的拟变分原理、基于基面力的非保守非线性弹性动力学初值问题的拟变分原理、非保守非线性弹性力学拟变分原理在有限元素法中的应用.

第一编 基础理论