面向“十二五”高等院校人才培养规划教材

主　编 / 吴炳烨
主　审 / 黄玉笙
副主编 / 郭　晶　孙　锋　郑书富

高等数学

GAODENG SHUXUE

（上册）

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

面向"十二五"高等院校人才培养规划教材

高等数学（上册）

主　编　吴炳烨

主　审　黄玉笙

副主编　郭　晶　孙　锋　郑书富

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书以教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委会新制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"为指导，结合普通高等学校理工类专业数学教学的特点，以严密、通俗的语言，较系统地介绍了高等数学的知识.全书分为上、下册两册.上册共分六章，内容包括函数、极限与连续，导数和微分，微分中值定理和导数的应用，不定积分，定积分及空间解析几何概要；下册共分四章，内容包括多元函数微分法及其应用，多元函数积分学，无穷级数及常微分方程.

本书体系完备，详略得当，例题丰富，难度适中，可作为普通高等学校理工类专业高等数学教材使用，也可作为非数学类专业学生考研的参考材料，还可供相关专业人员和广大教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/吴炳烨主编. —杭州：浙江大学出版社，2014.5

ISBN 978-7-308-12885-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①吴…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第021686号

高等数学(上册)

主　编　吴炳烨

责任编辑　邹小宁

文字编辑　沈巧华　曹明浩

封面设计　王聪聪

出　　版　浙江大学出版社

(杭州市天目山路148号　邮政编码310007)

(网址：http://www.zjupress.com)

排　　版　杭州教联文化发展有限公司

印　　刷　浙江国广彩印有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　16.5

字　　数　381千

版 印 次　2014年5月第1版　2014年5月第1次印刷

书　　号　ISBN 978-7-308-12885-8

定　　价　35.80元

编 委 名 单

主　　编　吴炳烨
主　　审　黄玉笙
副 主 编　郭　晶　孙　锋　郑书富
编　　委　(按照姓氏笔画排序)
孙　锋　吴丽萍　吴炳烨
范振成　郑书富　郭　晶
赖军将

前言

高等数学是理、工科专业一门重要的基础课程，是非数学类理工科专业学生的必修数学课，对于提高文科类专业学生的综合素质也有重要作用. 作为一门基础学科，数学有其固有的特点，这就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性. 数学的高度抽象性及严密的逻辑性在很大程度上造成了非数学类专业学生学习数学的困难. 随着高等教育的大众化，这一问题显得越来越突出. 高等数学课程教学如何适应应用型人才培养的需要，是当前普通本科高校教学改革与研究的一个重要课题.

本书就是在这一背景下，结合编写者多年的教学实践和教改成果，以教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会新制定的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"为基础而编写的，以满足普通高等学校理工类专业高等数学课程教学的需要，同时在教材内容与习题编排上兼顾非数学类专业学生考研的需求.

与其他同类教材相比，本书有以下特色:

1. 体系完备清晰，知识叙述循序渐进，难度适中. 内容编排上，引入数学概念时注重介绍相应的数学或物理等的背景，并围绕基本内容构造了丰富的例题. 此外，几何图形对于学生理解与掌握数学概念与方法起到十分重要的作用，与同类教材相比，本书配有丰富的插图，有利于学生理解与掌握数学知识.

2. 一定量的习题训练是学生学习与掌握数学知识不可或缺的重要环节. 本书根据教学内容精心编制习题，在习题编排上分为 A 题与 B 题两类. A 题为基础题，以帮助学生掌握基础知识与基本方法为目的，可作为课后书面作业选用; B 题为提高题，其中包含部分历年来非数学类专业的考研真题，适合对数学有兴趣的学生进一步学习及考研的需求. 与目前同类教材通常附有习题解答或参考答案的做法不同，本书没有附上习题解答，目的在于培养学生独立思考的能力.

3. 全书书稿用数学编辑软件 LATEX 编写而成，使得版面看起来更专业、更美观. 因为书稿用 LATEX 编写而成，处理数学公式是它的专长，生成的数学公式符合国际标准格式，规范美观; 同时LATEX 自带的 PGF 宏包具有强大的作图功能，全书的插图均由该宏包精确绘制而成，使得图形标准且富于变化，有利于提高教学效果.

4. 与全书配套的教学课件也用LATEX 编制而成，在形式上模拟"黑板+粉笔"的传统教学模式，具备"擦黑板"、标注、打草稿、按步骤作图、图文交替演示等功能，同时充分体现多媒体课件书写规范美观、富于变化、图形准确、动态演示形象直观等特点，十分适合教师教学及学生学习的需要.

本书上、下册由吴炳烨主编，由黄玉笙担任主审. 参加上册编写的专业教师为: 郭晶(第1、2、3章)、孙锋(第4、5章)、吴炳烨和郑书富(第6章). 本书在编写过程中参考了国

内有关著作、教材，主要参考书目已列在书末，在此表示感谢. 本书完成过程中还得到了杨焕章、潘国琪、赖军将、吴丽萍、范振成、吴军、高培旺、吴亭、侯杰、方灵云、金甦、董淑华、李超、陈晓云、陈小诗、余虹、章浩、吴紫嫣、余致恭、高敏芳等同志的大力支持与帮助，在此一并致谢. 本书的编写还得到编者单位及浙江大学出版社的大力支持与热情帮助，在此谨致谢意. 限于编者的水平，本书难免存在错漏之处，敬请专家和读者批评指正.

编 者

2014 年 2 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

高等数学是关于变量的数学, 函数的关系就是变量之间的依赖关系, 而极限的方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念与基本性质, 为讨论函数的微分与积分作准备.

1.1　函　数

1.1.1 集合、常量和变量

集合是数学中的一个重要概念, 现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上. 为今后学习的需要, 本节从介绍微积分所涉及的有关集合论的一些基本知识开始.

1. 集合的概念

定义 1.1.1 具有某种特定性质的事物的全体, 称**集合**, 或简称**集**. 组成这个集合的事物, 称为该集合的**元素**.

通常用大写字母 A、B、X、Y $\cdots$ 表示集合, 用小写字母 a、b、x、y $\cdots$ 表示元素. 若集合不含任何元素, 称为**空集**, 记为 $\varnothing$. 仅含有限个元素的集合称为**有限集**, 否则称为**无限集**.

若元素 x 在集合 A 中, 则称 x **属于** A, 记为 $x \in A$. 若元素 x 不在集合 A 中, 则称 x **不属于** A, 记为 $x \notin A$.

设 A、B 是两个集合, 若集合 A 中的元素都是集合的 B 的元素, 则称 A 是 B 的**子集**, 记为 $A \subset B$ (读为 A 包含于 B), 或 $B \supset A$ (读为 B 包含 A).

若集合 A 和 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 和 B **相等**, 记为 $A = B$. 若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的**真子集**, 记为 $A \subsetneq B$.

例如, 我们一般用字母 $\mathbf{N}^+$ 表示全体正整数集合, $\mathbf{Z}$ 表示全体整数集合, $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数集合和 $\mathbf{R}$ 表示全体是实数集合, 则 $\mathbf{N}^+ \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. 另外通常 $\mathbf{R}^*$ 表示非零的实数的集合, $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数的集合.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种, 一种是枚举法, 即把集合中的元素一一列举出来. 如 $\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$, $\mathbf{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$.

另一种是描述法, 即把元素的特性描述出来. 例如

$$\mathbf{R}^+ = \{x > 0\};$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质} \right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A、B 是两个集合, 由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**), 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 一般地, n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x|x \in A_1 \text{ 或 } x \in A_2 \cdots \text{ 或 } x \in A_n\}.$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**), 记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

一般地, n 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, 即

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x|x \in A_1 \text{ 且 } x \in A_2 \cdots \text{ 且 } x \in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合, 称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**), 记为 $A \backslash B$, 即

$$A \backslash B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

有时我们仅把问题限于某一个确定的集合 X 中进行, 所研究的其他集合 A 是它的子集, 这时称集合 X 为**全集**或**基本集**, 称 $X \backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**, 记为 A^C, 即

$$A^C = \{x|x \in X \text{ 且 } x \notin A\}.$$

集合的并、交、差三种运算满足下列法则. 设 A, B, C 为任意三个集合, 则有

(1) 交换率: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(4) 对偶律: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

以上法则都可根据集合相等的定义验证.

此外我们还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A、B 是任意两个集合, 在集合 A 中任意取一个元素 x, 在集合 B 中任意取一个元素 y, 它们组成一个有序对 (x, y), 把这样的有序对作为新元素, 它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**笛卡儿乘积**或**直积**, 记为 $A \times B$, 即

$$A \times B = \{(x, y)|x \in A \text{ 且 } y \in B\}.$$

例如, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x\in\mathbf{R}$ 且 $y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合. 设 a 和 b 为实数, 且 $a<b$.

数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**, 记为 (a,b), 即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$.

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**, 记为 $[a,b]$, 即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$.

数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 均称为**半开区间**, 分别记为 $(a,b]$ 和 $[a,b)$.

a,b 称为上述各区间的**端点**, 数 $b-a$ 称为**区间长度**. 由于 a,b 是有限的实数, 故上述各区间均称为**有限区间**.

此外引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大)和 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间. 例如 $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$ 和 $(-\infty,b)=\{x|x\leqslant b\}$ 等均为无限区间. 全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$, 它也是无限区间.

以后在不需要明确所论区间是否包含端点, 以及是有限还是无限区间时, 就简称为“区间”, 且常用字母 I 表示.

邻域也是常用到的一类集合. 设 $\delta>0$, 则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为 a 的一个 δ **邻域**, 记为 $U(a,\delta)$, 即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的**中心**, δ 称为邻域的**半径**(见图 1-1). $U(a,\delta)$ 也可以表示为 $\{x||x-a|<\delta\}$.

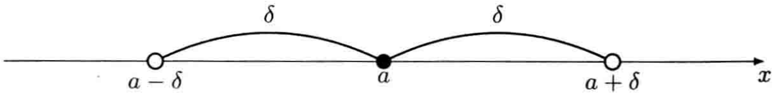

图 1-1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 例如由于 $0<|x-a|$ 隐含 $x\neq a$, 故集合 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 不包含点 a, 称为点 a 的**去心邻域**, 记为 $\mathring{U}(a,\delta)$, 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{0<|x-a|<\delta\}.$$

另外, 把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左** δ **邻域**, 把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右** δ **邻域**. 有时, 不关心 δ 的大小时, 就将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

5. 常量和变量

我们在研究各种自然现象和实际问题时, 会遇到许多量, 这些量一般分为两种: 一种是在考察过程中保持不变的量, 即保持一定的数值, 称为**常量**; 另一种是在这一过程中会起变化的量, 即可以取不同的数值, 称为**变量**. 例如自由落体的下降时间和距离是变量, 而重力加速度则可以看成是常量. 一个量是常量还是变量, 要根据具体的情况作出分析.

通常用字母 a,b,c 等表示常量, 用字母 x,y,z,t 等表示变量.

在变化过程中, 我们发现有些变量是连续变化的. 例如时间、路程等; 而有些变量则不是连续变化的, 例如溶液的浓度, 等等. 变量的变化范围就是变量的取值范围, 如果变量是连续的, 当变量取实数值时, 常用区间表示它的变化范围.

1.1.2 函 数

1. 函数概念

在研究实际问题时, 常常有几个量同时变化, 它们的变化往往不是彼此独立, 而是相互联系着, 其间的关系复杂. 为了便于研究, 我们先考察两个变量之间的关系. 下面是一些具体的例子.

例 1 自由落体运动中, 下降的距离 s 取决于下降的时间 t, 它们的关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 确定. 这里重力加速度 g 是常量, 距离 s 和时间 t 为变量. 当 t 取任一个值时, 按变量间的依赖关系, 就有一个唯一确定的值 s 与之对应.

例 2 实验室动物所用药物在血液中的浓度(用每百万个中占多少个来度量)随着时间在递减, 下表 1-1 列出了浓度和时间的关系.

表 1-1

时间	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
浓度	853	587	390	274	189	130	97	67	50	40	31

这里时间和浓度均为变量, 对于时间 0, 1, 2, $\cdots$, 10 中的每一个值, 由表格可定出它的对应浓度.

例 3 人在奔跑后心博率会回复到正常, 图 1-2 中曲线描绘了某人锻炼后几分钟心博率与时间这两个变量的对应关系. 在时间的变化范围内每取一个值, 由图 1-2 就有一个确定的心博率与之对应.

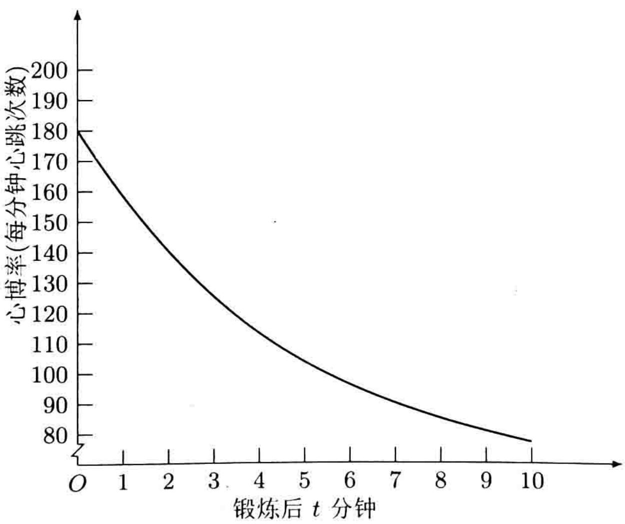

图 1-2

从数学的角度看, 以上例子变量间对应关系的共同特征, 可以得到如下的函数概念:

定义 1.1.2 设 D 是一个给定的非空数集, x 和 y 是两变量. 若存在对应关系 f, 使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时, 变量 y 按照对应关系 f, 总会取到唯一确定的数值和 x 对应, 则称 f 是定义在 D 上的**函数**, 记为

$$f: D \to \mathbf{R}.$$

此时 x 称为**自变量**, y 的值由它所依赖的变量 x 所确定, 故称 y 为**因变量**. 数 x 对应的数 y 称为函数 f 在 x 处的**函数值**, 记为 $y=f(x)$. 数集 D 称为函数 f 的**定义域**, 函数值的集合 $\{f(x)|x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**, 用 $f(D)$ 或 R_f 表示. 即

$$R_f = f(D) = \{f(x)|x \in D\}.$$

由此可见例 1, 例 2 和例 3 中变量之间的关系都是函数关系.

注 (1) 在定义中, 我们用符号 $f: D\to\mathbf{R}$ 表示按对应关系 f 建立数集 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数关系, "$x\mapsto y$" 表示两个数集中元素的对应关系. 为叙述方便, 我们省略上面两种记号, 直接用符号 $y=f(x), x\in D$ 表示定义在数集 D 上的函数 f. 当不需要指明函数的定义域时, 又简写为 $y=f(x)$.

(2) 函数的定义中有两个基本要素: 一是定义域, 一是对应关系. 若两个函数的定义域相同, 对应关系也相同, 则这两个函数是相同的函数, 否则就是不同的函数. 例如

$$y = x-1 \text{ 与 } y = \frac{x^2-1}{x+1}$$

表达式(对应关系)相同, 但定义域不同, 前者的定义域是 $\mathbf{R}$, 后者的定义域是 $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$, 因此是不同的函数; 但有时相同的函数其对应关系有不同的表达形式, 如

$$y=|x|, x\in\mathbf{R} \text{ 与 } y=\sqrt{x^2}, x\in\mathbf{R}.$$

(3) 函数定义域的确定通常有两种方式: 一是对有实际背景的函数, 根据它的实际意义来确定定义域. 如例 2 中的定义域为 $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, 例 3 中的定义域为 $[0,10]$. 另一种是对于用数学式子表示的函数, 不考虑实际意义, 自变量取使数学式子有意义的一切实数值, 这种定义域称为函数的**自然定义域**. 例如函数 $y=\sqrt{\sin x}$ 的自然定义域是 $[2n\pi,(2n+1)\pi](n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 一般说来, 给出一个函数的具体表达式的同时, 应指出它的定义域, 否则默认它的定义域是自然定义域.

(4) 函数的图形. 如图 1-3, 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 对于任意取定的 $x\in D$, 对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样, 以 x 为横坐标, y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定了一点 (x,y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值时, 就得到点 (x,y) 的一个集合 C, 即 $C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$. 则点集 C 称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形, 图中的 R_f 表示函数的值域.

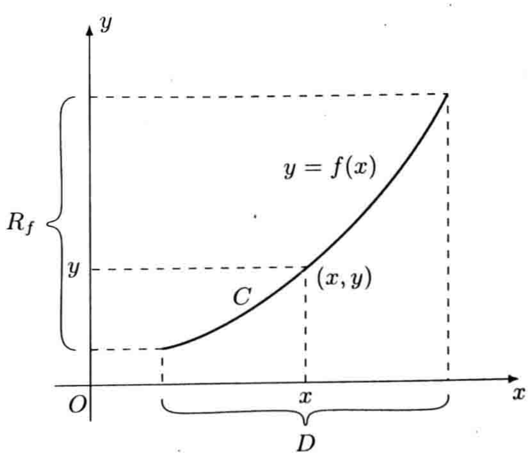

图 1-3

2. 函数的表示法

一般地, 并不是所有的变量间的函数关系都可以用公式表示出来, 熟知的函数的表示法有三种: 表格法、图形法和解析法.

表格法, 即变量间的函数关系用列表的方法来表示. 这种方法有利于查找函数值. 例如火车的时刻表, 银行的外汇兑换表, 等等.

图形法, 即在坐标平面上把函数的图形描绘出来.

解析法, 即把变量间的函数关系用方程给出, 这些方程通常称为函数的解析表达式. 具体地, 又分为四种情形:

(1) 显函数, 即因变量 y 可由自变量 x 的解析式直接表示出来. 如例 1 的函数关系 $s=\frac{1}{2}gt^2$.

(2) 分段函数, 即一个函数在其定义域的不同范围内用不同的解析表达式表示.

(3) 隐函数, 即 x 和 y 的对应关系由方程给出, 但 y 不能由 x 的解析式直接表示出来. 例如天体力学中著名的开普勒(Kepler)方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

(这里 ε 为常数, $0<\varepsilon<1$) 中, 就确定了 y 是 x 的隐函数. 隐函数是函数更一般的形式.

(4) 由参数方程所确定的函数.

隐函数和参数方程所确定的函数将在第 2 章 2.4 中介绍.

例 4 一辆汽车从甲城驶往乙城, 上高速公路前的车速是 50km/h, 行驶 48 min. 上高速公路后车速是 100km/h, 行驶 3 h, 最后到达乙城. 求汽车行驶的路程 s 和时间 t 的函数关系, 并求行驶 30 min 和 2 h 时所走的路程.

解 依题意得

$$s(t)=\begin{cases}50t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{4}{5},\\ 40+100(t-\frac{4}{5}), & \frac{4}{5}<t\leqslant 3\frac{4}{5}.\end{cases}$$

当 $t=\frac{1}{2}$ 时,

$$s\left(\frac{1}{2}\right)=50\times\frac{1}{2}=25(\text{km});$$

当 $t=2$ 时,

$$s(2)=40+100\left(2-\frac{4}{5}\right)=160(\text{km}).$$

下面给出几个常用的分段函数的例子, 以及它们的图形表示.

例 5 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

称为**符号函数**, 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$, 它的图形如图 1-4 所示.

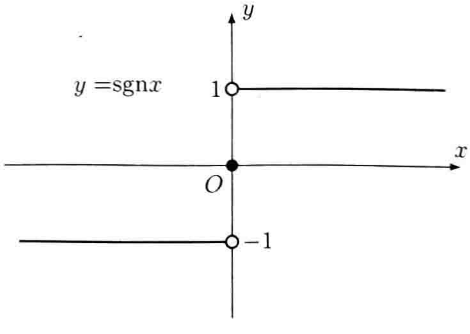

图 1-4