金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

理工社

2014 考研数学终极决胜篇

考研数学 数学一

大题满分技巧揭秘

金榜考研数学命题研究组 · 编

便携记忆版

实用分析思 题范例

典型解答题 评分标准 阅卷人评析

让想放弃的同学得高分
让能得高分的同学得满分
抓住攻克考研数学最后一次机遇
Yes, we can!

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

理工社

2014考研数学终极决胜篇

考研数学大题满分技巧揭秘

数学一

金榜考研数学命题研究组 · 编

便携记忆版

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学一 / 金榜考研数学命题研究组编. —北京 ：北京理工大学出版社，2013.10

ISBN 978-7-5640-8405-9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①金… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 241427 号

出版发行/北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(总编室)
　　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张/6.5
字　　数/175 千字
版　　次/2013 年 11 月第 1 版　2013 年 11 月第 1 次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价/25.80 元　　责任印制/边心超

前　言

2014年考研的最后冲刺阶段已经开始，这最后的宝贵时间是提高数学答题能力最关键的时候。数学是考研中的重中之重，而考研数学解答题94分，占超过总分的一半。这些题目高度抽象，解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从以往考生的成绩来看，考生在解答题部分得分差距很大，直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说，很想做好解答题，但就是做题无从下笔，或者做了也这错那错。

因此，我们为大家编写了这本《考研数学大题满分技巧揭秘》，以使同学们在考试中会解大题，能得高分，会做的题目力求不失分，部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典，解答规范，适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下：

[读题联想]　如果目前为止同学们还对题中的基本概念、方法和原理不清楚，解题时肯定会碰到各种各样的问题，容易丢失一些基本分，所以同学们务必在最后完全吃透基础理论知识，深入理解基本概念、公式、定理和图表，掌握知识点。

[解题范例]　拓展解题方法，提高解题能力，规范答题格式。同学们要提高做题质量，每做完一题，就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型，做到举一反三。希望同学们认真领会解题方法及其实质，并做到活学活用。同时，也要注意答题的方式、步骤，关键内容要写出来，一些简单过程可省略。

[阅卷者按]　帮助同学们寻找考试的感觉，使同学们保持清晰的复习思路，做题的同时感受真实考场上的氛围，尽快进入临考状态。

由于编者水平有限，本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利！

编　者

2013年11月

目　录

高等数学

1 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

读题联想 本题是求"1^∞"型未定式数列的极限.除利用极限的四则运算法则、洛必达法则以及等价无穷小代换外,还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

解题范例

【解】 设函数 $f(x)=(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}$ 和数列 $x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$,

则

$$f(x_n)=\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}(n=1,2,3,\cdots),\text{且}\lim_{n\to\infty}x_n=0^+.$$

计算可得

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}}=e^J,$$ 1 分

其中

$$J=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-3\tan x-1}{x^2}$$ 3 分

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-\sec^2x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}\cos^2x-1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}(3e^{3x}\cos^2x-2e^{3x}\cos x\sin x)=\frac{9}{2}.$$ 8 分

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

$$=\lim_{x\to0^+}f(x)=e^J=e^{\frac{9}{2}}.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分,难度不大.

（Ⅰ）一般来说,对于 1^∞ 型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小代换$\ln f(x)\sim f(x)-1$ 化为求极限 $e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$,常能简化计算.

（Ⅱ）利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则对任何数列$\{x_n\}$,只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,就有

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则对任何数列$\{x_n\}$，只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$且$x_n \neq x_0$，就有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

左脑休息室

20个影响你一生的小改变(一)

Small, simple life changes can be powerful. Implementing some of these changes can literally change your entire life.

How do you change? Take on one change at a time, and go slowly. Implement each change consistently so that it becomes a habit. Don't do too much too fast. What follows is a list of changes that are simple, yet incredibly powerful. Some are obvious and some aren't. I hope they serve as reminders of useful changes.

生活中一些细微简单的改变有着不可低估的作用。一些改变甚至可以改变你的整个生活。

如何改变呢?一次做出一种改变，慢慢来，并始终如一地坚持，形成一种习惯。不要贪多求快。下面列出一些改变，虽然简单，作用却难以置信。有些作用明显，而有的不易觉察。我希望下列条目能提醒你去做一些有益身心的改变。

1. *Walk daily* / 每天散步

We humans aren't supposed to be sedentary human beings. We are born to run, but even more so to walk.

人类不适于久座。我们生来善跑，走路更不在话下。

Walking every day is good for your physical health. But more importantly, it's good for your mind. Walking is a joy. You are outside without distractions. You may even see people. And there's few better ways to boast your mood.

每天散步有益于身体健康。更重要的是，它还有助于心理健康。在室外散步，令人愉快，远离烦恼，还可以接触人群。没有什么更好的方法比散步更能带给你好心情。

2 设常数 $p>0$，求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

并证明：当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$\left|\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

读题联想 n 项和的数列极限要注意考虑定积分的定义，

注意 I 与 $\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 之间的差别.

解题范例

【解】

$I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\dfrac{1}{n}$，

其中 $f(x)=x^p$. 1 分

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p\dfrac{1}{n}$ 可以看成是函数 $f(x)=x^p$ 在区间[0,1]被 n 等分，并取 $\xi_k=\dfrac{k}{n}(k=1,2,\cdots,n)$ 时的积分和. 由函数 $f(x)=x^p$ 在区间[0,1]上连续知 $f(x)=x^p$ 在区间[0,1]上可积，故

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p=\int_0^1x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.\ p>0$$ 3 分

又因

$$\begin{aligned}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\int_0^1x^p\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$ 5 分

且对于 $k=1,2,3,\cdots,n$，有

$$0\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p \right] \mathrm{d}x$$

$$= \left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p \right] \frac{1}{n}, \qquad 7\text{ 分}$$

故

$$0 \leqslant \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p \right] \frac{1}{n}$$

$$= \left[(\frac{n}{n})^p - (\frac{0}{n})^p \right] \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \qquad 9\text{ 分}$$

即当 $n = 1,2,3,\cdots$ 时，对任何常数 $p > 0$，下面的不等式成立：

$$\left| \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I \right| \leqslant \frac{1}{n}. \qquad 10\text{ 分}$$

阅卷者按 本题满分 10 分，有一定难度.极限的计算比较基础，积分的定义是常用方法.难度在于对 I 和 $\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ 之间区别的理解，一般来说，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则把 $[a,b]$ 作 n 等分时有

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x,$$

其中 ξ_k 在小区间 $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$ 中任意取定.而给定的 n 项和 $\sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(\xi_k)$，$\xi_k$ 一般取区间 $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$ 中的端点值.

左脑休息室

《念奴娇 西子》

若耶溪畔，恨春暮，啼鸟声声明灭。
解佩凌波，人不见，漫说馆娃宫阙。
百尺琼楼，千人歌乐，纵使肌如雪。
俱归黄土，而今只剩明月。
堪叹伍相鸥夷，忠言孤胆，难抵眉心结。
西子多情怀袖里，霸主英雄气竭。
越甲三千，佳人一笑，山河空泣血。
五湖舟上，寻芳不待佳节。

3 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

读题联想 这是一个 n 项和的数列极限，常用的方法有两种：夹逼原理和定积分的定义，有时需要两种方法结合使用.

解题范例

【解】 由于当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，则 1 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$ 3 分

又

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$ 6 分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$ 8 分

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1,$ 9 分

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$=\ln(1+\sqrt{2}).$$

故 $I=\ln(1+\sqrt{2})$. 10分

阅卷者按 本题满分10分，难度不大，主要考查利用夹逼原理和定积分定义求极限.本题的关键是要将这两种方法结合起来问题才能得到解决.

左脑休息室

20个影响你一生的小改变(二)

2. *Wake early* / 早起

If you asked me what's the best change you can make this instance, I would say "wake early." The early morning is peaceful – there are no interruptions and no noise. You can wakeup and go for a walk. You can meditate. And you can create.

如果你问我什么是最好的改变，我会说"早起"。早晨是那样宁静——没人打扰，没有噪音。起床后，散散步，你还可以冥思，或是创作。

And waking early is the most productive thing I've ever done. I often get more work done in a couple hours in the morning than during the entire day.

早起是我做的最富有成效的改变。在早晨的几个小时里，我做的事情常常比一整天做的都多。

3. *Eat less* / 少吃

Many of us overeat. Let's stop. Eat slowly, and eat until you're full. Eat so that your belly doesn't bulge.

我们中的很多人都饮食过量。可别吃太多。细嚼慢咽，吃饱为止。这样才不会吃起将军肚。

4. *Stop watching, start doing* / 不做旁观者

Watching is easy. Anyone can watch someone. Spectating isn't inherently bad, but I believe we do too much of it. Instead of watching, do something. Or better yet, create something great.

看容易，每个人都可以看别人。做个观众本身并不坏，但我认为，我们看得太多。不要做旁观者，自己去做。如果不小心搞出个伟大创造，岂不更好。

4 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 与 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

读题联想 类似形如 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$，$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 的三角函数，应该把 $\pi\sqrt{n^2+1}$，$\pi\sqrt{n^2+n}$ 转化到原点附近研究其变化情况.

解题范例

【解】 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$ 1 分

记 $\alpha_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 可知 $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 且

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\alpha_n)$$ 4 分

$$=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\alpha_n+\cos n\pi\sin\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\alpha_n.$$ 5 分

由于 $|(-1)^n\sin\alpha_n|\leqslant\alpha_n$，故 $I=0$.

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi).$$ 6 分

记 $\beta_n=(\sqrt{n^2+n}-n)\pi=\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{\pi}{2}$，故 8 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(n\pi+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\beta_n+\cos n\pi\sin\beta_n)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\beta_n=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，有一定难度. 关键在于用 $n\pi$ 把 $\pi\sqrt{n^2+1}$ 转化到原点附近研究其性质.

左脑休息室

蝶恋花

雪浪银涛云漫舞。
月影玲珑，碧草迷春路。
莫了轻忧颦百蹙，蝶心一瞬还芳妒。

梦卷雨帘风暗顾。
柳影朦胧，粉絮粘花雾。
莫了新愁嗔万数，眸明一盼留情驻。

5 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$.

读题联想 这是一个"$\dfrac{0}{0}$"型的极限，事实上，$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$，同样，$\lim\limits_{x\to0^+}(\sin x)^x=1$，但本题中出现了幂指函数 x^x 和 $(\sin x)^x$，如果直接用洛必达法则运算，则较为烦琐，这种类型极限往往先将幂指函数改写成指数函数，用等价代换 $e^x-1\sim x$，结合洛必达法则较为方便.

解题范例

【解】

$$I=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^x\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1\right]}{x^2\ln(1+x)} \qquad 1\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x-1}{x^3}\qquad (\lim_{x\to0^+}x^x=1) \qquad 2\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln\frac{\sin x}{x}}-1}{x^3} \qquad 3\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln\frac{\sin x}{x}}{x^3} \qquad 5\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)}{x^2} \qquad 6\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x^3} \qquad 8\text{ 分}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2} \qquad 9\text{ 分}$$

$$=\frac{1}{6} \qquad 10\text{ 分}$$

阅卷者按 本题满分 10 分，较为简单，题中涉及幂指函数，不宜直接用洛必达法则，求解的关键在于将幂指函数改写成指数函数，然后利用等价代换 $e^x-1\sim x$，这是求带有幂指函数极限常用且有效的方法.

6 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

读题联想 这是一个"$\infty-\infty$"型极限，一种方法是先做变量代换 $x=\dfrac{1}{t}$，然后用洛必达法则；另一种方法是将 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 用泰勒公式展开.

解题范例

【解法一】 令 $x=\dfrac{1}{t}$，则

$$I=\lim_{t\to0}\left(\frac{\ln\dfrac{1+t}{1-t}}{t^3}-\frac{2}{t^2}\right)$$ 2 分

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}$$ 4 分

$$=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}-2}{3t^2}$$ 6 分

$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-t)+(1+t)-2(1-t^2)}{3t^2(1-t^2)}$$ 8 分

$$=\lim_{t\to0}\frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)}=\frac{2}{3}$$ 10 分

【解法二】

$$I=\lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}-2x^2\right)$$ 2 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x^3\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]-2x^2\right\}$$ 4 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x^3\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right]-2x^2\right\}$$ 8 分

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x^3\left[\frac{2}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]\right\}=\frac{2}{3}$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，较为容易，两种解法均为基本解法.

本题解法二中应注意，不能直接用泰勒公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

因为本题中的 $x\to\infty$ 而不是 $x\to0$. 因此，要改写成 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 后再用泰勒公式.

7 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}$.

读题联想 这种抽象函数极限问题常用的方法两种,一种是利用已知极限,凑出所要求的极限,利用极限四则运算时要确认两端的极限均存在;另一种是利用泰勒公式将 $\sin x$ 展开.

解题范例

【解法一】 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$知

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}\right)\cdot x=0$$ 2 分

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6},$$ 6 分

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{f(x)}=-6$. 7 分

【解法二】 由泰勒公式知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)$$ 2 分

则

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+f(x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)+f(x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{6}+f(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{6}+\dfrac{f(x)}{x^3}}{x}$$ 5 分

从而有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}+\frac{f(x)}{x^3}\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=-\frac{1}{6},$$ 6 分

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{f(x)}=-6,$$ 7 分

阅卷者按 本题满分 7 分，较为容易，解法一中用到一个常用结论：若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

证明如下：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \lim_{x \to x_0} g(x).$$

左脑休息室

20 个影响你一生的小改变（三）

5. *Go slowly* / 放慢脚步

Our culture tells us to go fast, to sprint and win the race. Problem is, the race never ends.

When you choose to go slowly, you are choosing peace and happiness.

我们的文化鼓励我们勇往直前、冲刺、赢得比赛。问题是生活这场比赛没有终点。当把脚步放慢，你就选择了宁静与快乐。

6. *Declutter* / 清理

Clutter whether mental, physical, or virtual takes a toll. The only way to get rid of clutter is to get rid of stuff.

Deal with bad thoughts and be done with them. Delete unneeded files. And get rid of unnecessary items.

Then when you feel like adding something, ask yourself if it's necessary.

For the most part, it will just contribute to clutter.

不论何物，物质的，还是精神的，一旦它们杂乱无章就会产生负面影响。

摆脱混乱的唯一办法就是甩掉没有价值的东西。

筛出消极想法，远离它们。删除不需要的文件。剔除不必要的项目。

然后，当你想进行补充的时候，先问自己是否有必要。因为多数情况下，这只会导致混乱。

8 求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,|\,x+1\,|}{\ln|\,x\,|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 的间断点并指出类型.

读题联想 首先找出间断点(没有定义的点)和可疑间断点(分段函数分界点),然后再做进一步判定.

解题范例

【解】 显然 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\,|\,x+1\,|}{\ln|\,x\,|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 仅在 $x=\pm 1$ 两点处没定义, 1 分

$x=\pm 1$ 均为间断点.

在 $x=1$ 处,由于

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x\,|\,x+1\,|}{\ln|\,x\,|}=\infty$$

则 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点. 3 分

在 $x=-1$ 处,由于

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{-(x+1)}{\ln|\,x\,|}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{-1}{\frac{1}{x}}\quad(\text{洛必达法则})$$

$$=1$$ 4 分

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{(x+1)}{\ln|\,x\,|}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$=-1$$ 5 分

则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. 6 分

在 $x=0$ 处,由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\,|\,x+1\,|}{\ln|\,x\,|}=0$$

而 $f(0)=1$

则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 9 分

阅卷者按 本题满分 10 分,是求间断点的基本题型,关键在于确定可疑间断点,其验证过程就是求极限的问题.