2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（一）

真题精讲与热点分析（2006~2015）

考研辅导名师 陈启浩 编著

名师权威解析

高频考点强化

考必做真题

真题都一样，解答真不一样

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学（一）

真题精讲与热点分析

（2006～2015）

考研辅导名师　陈启浩　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是全国硕士研究生入学统一考试备考用书. 主要内容包括2006年到2015年十年的考研数学一的真题及其精讲，以及对考试热点问题的分析.

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学一”的同学阅读，也可作为教师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（一）真题精讲与热点分析：2006～2015/陈启浩编著. —2版. —北京：机械工业出版社，2015.3

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-49525-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第044701号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉

封面设计：路恩中 责任印制：乔 宇

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2015年4月第2版第1次印刷

184mm×260mm · 16.5印张 · 407千字

标准书号：ISBN 978-7-111-49525-3

定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88361066	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-68326294	机工官博：weibo.com/cmp1952
010-88379203	金书网：www.golden-book.com
封面无防伪标均为盗版	教育服务网：www.cmpedu.com

全国硕士研究生入学统一考试备考用书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由考研辅导名师陈启浩教授编写的全国硕士研究生入学统一考试备考用书.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学一考试的包括四本书，分别是：

《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》（简称《真题精讲》）

《2016 考研数学（一）典型题 660》（简称《典型题 660》）

《2016 考研数学（一）高分突破 135》（简称《高分突破》）

《2016 考研数学（一）名师精选全真模拟冲刺题 10 套》（简称《全真模拟》）

本套系列丛书是在陈启浩教授对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　　言

参加考研的同学，一定要认真练习近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题. 因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息.

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2006 年至 2015 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2016 考研数学（一）真题精讲与热点分析（2006 ~ 2015）》一书. 本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精讲

C. 热点分析

"十年真题精讲"是对每一道真题通过"分析""精讲"和"附注"三部分进行精细、完整的解析，特别在"精讲"中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**.

"热点分析"是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的经常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试.

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起作用. 在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精讲和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力.

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

目　　录

B　十年真题精讲

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题精讲

一、选择题

(1)　**C**

分析　从$f''(x)$的零点与不存在点入手，确定曲线$y=f(x)$的拐点个数.

精解　由于$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，且$f''(x)$仅有两个零点x_1和x_2(其中$x_1<0<x_2$)以及$f''(0)$不存在，所以$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$和$(0, f(0))$都是曲线$y=f(x)$的可能拐点.

由于在点$x=x_1$的两侧邻近，$f''(x)$不变号；在点$x=x_2$与点$x=0$的两侧邻近，$f''(x)$都变号，故曲线$y=f(x)$有且仅有拐点$(x_2, f(x_2))$和$(0, f(0))$.

因此本题选(C).

附注　设函数$f(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$上连续，则曲线$y=f(x)$的拐点可按以下步骤计算：

(1) 计算$f''(x)$，并寻找$f''(x)$的零点与不存在点，设为x_1，x_2，…，x_n.

(2) 如果在点x_i两侧邻近，$f''(x_i)$变号，则$(x_i, f(x_i))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点；否则不是曲线$y=f(x)$的拐点$(i=1, 2, \cdots, n)$.

(2)　**A**

分析　先由$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$确定

$$y''+ay'+by=0 \tag{1}$$

的两个线性无关的特解，由此算出a，b. 此外$y=xe^x$是

$$y''+ay'+by=ce^x \tag{2}$$

的一个特解，由此可算出c.

精解　由$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{3}e^x+xe^x$知，式(1)有两个线性无关特解$e^{2x}$与$e^x$，即$\lambda=2$，1是式(1)的特征方程

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{3}$$

的两个根，从而$a=-(2+1)=-3$，$b=2\times1=2$.

将$a=-3$，$b=2$代入式(2)得

$$y''-3y'+2y=ce^x \tag{4}$$

由于xe^x是式(4)的一个特解，所以有

$$(xe^x)''-3(xe^x)'+2(xe^x)=ce^x,$$

即

$$(x+2)e^x-3(x+1)e^x+2xe^x=ce^x.$$

由此得到　$c=-1$.

因此本题选(A).

附注　由$y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$知，$e^{2x}$，$e^x$或$xe^x$都有可能是式(1)的两个线性无关的特解. 如果$e^x$，$xe^x$是式(1)的两个特解，则$\frac{1}{2}e^{2x}$是式(2)的特解，这是不可能的. 故题解中首

先确定式(1)有两个线性无关特解 e^{2x}，e^{x}.

(3)　**B**

分析　从考虑幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛区间入手.

精解　引入幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$. (1)

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在点 $x=2$ 处条件收敛，可知式(1)的收敛半径为 $|2-1|=1$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}a_n(x-1)^n \tag{2}$$

收敛半径为 1. 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 在(0，2)内收敛，在[0，2]外发散. 由此可知 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 分别是式(2)的收敛点与发散点.

因此本题选(B).

附注　应记住以下结论：

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径为 $R>0$，则其逐项求导或逐项积分后的幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 R.

(4)　**B**

分析　先画出 D 的概图，然后用极坐标(先 r 后 θ)表示 $\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma$.

精解　D 如图 B-15-1 的阴影部分所示，所以在极坐标系下，

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr.$$

因此本题选(B).

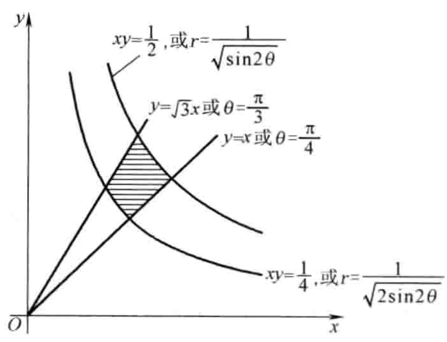

图　B-15-1

附注　对于二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$，如果 D 是角域的一部分，通常都利用极坐标计算这个二重积分，即

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

这里特别要注意的是 $dxdy = rdrd\theta$，而不是 $dxdy = drd\theta$.

(5) **D**

分析 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$，因此对 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换即可得到正确选项.

精解
$$\overline{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&3&a^2-1&d^2-1\end{array}\right)$$
$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{array}\right).$$

由此可知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<3$，即为 $a=1$ 或 $a=2$，并且 $d=1$ 或 $d=2$.

因此本题选(D).

附注 应记住非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$(其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 m 维列向量，增广矩阵为 $\overline{\boldsymbol{A}}$)关于解的结论：

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})<n$;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=n$;

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是 $r(\overline{\boldsymbol{A}})>r(\boldsymbol{A})$.

(6) **A**

分析 设 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$(其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵)，则由 $\boldsymbol{Ae}_1=2\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{Ae}_2=\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{Ae}_3=-\boldsymbol{e}_3$ 即可算出对角矩阵 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$，从而得到在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形.

精解 由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，所以有

$$\boldsymbol{Ae}_1=2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{Ae}_2=\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{Ae}_3=-\boldsymbol{e}_3$$

从而
$$\boldsymbol{Ae}_1=2\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{e}_3)=-(-\boldsymbol{e}_3),\ \boldsymbol{Ae}_2=\boldsymbol{e}_2.$$ 因此

$$(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}，即\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

因此本题选(A).

附注 本题也可解答如下：

由于 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$，此外，

$$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\xrightarrow{\text{互换第2、3列}}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)\xrightarrow{\text{第2列乘以}(-1)}(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2),$$

即$(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$,

所以，
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}&=(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\ -\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2)\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此，在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下，$f(x_1,\ x_2,\ x_2)$的标准形为$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

(7) **C**

分析 利用$P(AB)\leqslant P(A)$，$P(AB)\leqslant P(B)$即可得正确选项.

精解 由于 $P(AB)\leqslant P(A)$，$P(AB)\leqslant P(B)$，所以

$$2P(AB)\leqslant P(A)+P(B)，即\ P(AB)\leqslant\frac{P(A)+P(B)}{2}.$$

因此本题(C).

附注 由上解答已证明选项(D)是不正确的. 下面用例子说明选项(A)，(B)也是不正确的.

例1 设$A=B$，且$P(A)=\frac{1}{2}$，则$P(AB)=P(A)=\frac{1}{2}$，但$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$，所以选项(A)不正确.

例2 设$AB=\varnothing$，$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$，则$P(AB)=0$，而$P(A)P(B)=\frac{1}{9}$，所以选项(B)也不正确.

(8) **D**

分析 首先算出$E(XY)$，然后利用随机变量数字特征的性质，计算$E[X(X+Y-2)]$.

精解 由于X与Y不相关，所以$\mathrm{Cov}(X,\ Y)=0$，即

$$E(XY)=EX\cdot EY=2\times1=2,$$

所以
$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2EX\\&=DX+(EX)^2+E(XY)-2EX\\&=3+2^2+2-2\times2=5.\end{aligned}$$

因此本题选(D).

附注　设 X，Y 是随机变量，则 X 与 Y 不相关时，$Cov(x, y)=0$，但 X 与 Y 未必相互独立.

二、填空题

(9)　$-\frac{1}{2}$

分析　对分子 $\ln\cos x$ 用等价无穷小代替，即可得所给极限的值.

精解　由于 $x\to 0$ 时，

$$\ln\cos x=\ln[1+(\cos x-1)]\sim\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2,$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}.$

附注　本题也可用洛必达法则计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

(10)　$\frac{\pi^2}{4}$

分析　利用奇、偶函数在对称区间上的积分性质计算所给的定积分.

精解　由于 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 是奇函数，$|x|$ 是偶函数，所以

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

附注　应记住以下公式：对 $a>0$，有

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & f(x)\text{ 是奇函数},\\ 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & f(x)\text{ 是偶函数}.\end{cases}$$

如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则以上公式对 $a=+\infty$ 也成立.

(11)　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz+1-\sin x}{xy+e^z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xz}{xy+e^z}$

分析　首先算出 $z\big|_{(0,1)}\xlongequal{\text{记}}z_0$，然后对所给方程两边求全微分，并将 $x=0$，$y=1$ 及 $z=z_0$ 代入即得 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}$.

精解　将 $x=0$，$y=1$ 代入所给方程得

$$e^{z(0,1)}+0\times 1\times z(0,1)+0+\cos 0=2,$$

即　$e^{z(0,1)}=1$，所以 $z(0,1)=0$.

对所给方程两边求全微分得

$$e^z\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}x=0,$$

于是　$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}z\big|_{(0,1,0)}=\mathrm{d}x.$

附注 $z=z(x,y)$是隐函数. 由题解中的计算可知,

$$\mathrm{d}z=-\frac{yz+1-\sin x}{xy+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}x-\frac{xz}{xy+\mathrm{e}^z}\mathrm{d}y,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz+1-\sin x}{xy+\mathrm{e}^z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xz}{xy+\mathrm{e}^z}$.

(12) $\dfrac{1}{4}$

分析 利用积分区域的对称性可得 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由此可以快捷算出 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

精解 $$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad (1)$$

由于 $\iiint\limits_{\Omega}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的积分区域 Ω 关于平面 $x=y$ 对称, 在对称点处 $x-y$ 的值互为相反数, 所以 $\iiint\limits_{\Omega}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 从而 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 同样可知, $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

将它们代入式(1)得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=6\iiint z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=6\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z\ (\text{其中 } D_{xy}=\{(x,y)\mid x+y<1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}\\&\qquad\text{是 }\Omega\text{ 在 }xOy\text{ 平面上的投影})\\&=\iint\limits_{D_{xy}}3(1-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}3(1-x-y)^2\mathrm{d}y\\&=\int_0^1-(1-x-y)^3\Big|_{y=0}^{y=1-x}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}(1-x)^4\Big|_0^1\\&=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

附注 题解中有两点值得注意:

(Ⅰ)利用积分区域的对称性将 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化简为 $6\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 通常有以下公式:

设积分区域 Ω 有某种对称性, 则

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 在对称点处的值互为相反数},\\ 2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, & \text{当 } f(x,y,z) \text{ 在对称点处的值彼此相等},\end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 按其对称性划分成的两部分之一.

（Ⅱ）题解中的 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 按"先一后二"计算的，它也可按"先二后一"计算：

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$（其中，$D_z=\{(x,\ y)\mid x+y\leqslant 1-z,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 是 Ω 的立坐标为 $z\in[0,\ 1]$ 的截面在 xOy 平面的投影）.

$$= \int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_0^1 (z-2z^2+z^3)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

（13）　$\mathbf{2^{n+1}-2}$

分析　记 $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$，将 D_n 按第一行展开得到一个递推式.
由此即可得到 D_n 的值.

精解　将 D_n 按第一行展开得

$$D_n = 2D_{n-1} + 2\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1} = 2D_{n-1}+2 .$$

由此递推式得

$$\begin{aligned} D_n &= 2(2D_{n-2}+2)+2 = 2^2D_{n-2}+2^2+2 \\ &= 2^2(2D_{n-3}+2)+2^2+2 = 2^3D_{n-3}+2^3+2^2+2 \\ &= \cdots = 2^{n-3}D_3+2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots+2^3+2^2+2 \\ &= 2^n+2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots+2^3+2^2+2 \\ &= \frac{2^{n+1}-2}{2-1} = 2^{n+1}-2 \end{aligned}$$

附注　D_n 也可以用数学归纳法计算.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2^3+2^2+2 = 2^4-2,$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2^4+2^3+2^2+2 = 2^5-2,$$

由此可得　$D_n = 2^n+2^{n-1}+2\cdots+2 = \dfrac{2^{n+1}\cdot 2}{2-1} = 2^{n+1}-2.$

现用数学归纳法证明式(1).

当 $n=3$，4 时，式(1)正确.

设 $n=m$ 时，式(1)正确，即 $D_m=2^{m+1}-1$，则将 D_{m+1} 按第一行展开得

$$D_{m+1}=2D_m+2\cdot(-1)^{m+2}\cdot(-1)^m=2D_m+2$$
$$=2(2^{m+1}-2)+2=2^{(m+1)+1}-2,$$

即 $n=m+1$ 时，式(1)正确. 因此对 $n=3,4,\cdots$，式(1)正确.

(14) $\frac{1}{2}$

分析 由(X,Y)的概率密度为$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]}$知

$$P(XY-Y<0)=P((X-1)Y<0)=\iint\limits_{(x-1)y<0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}[(x-1)^2+y^2]}dxdy$$

由此即可算得这个概率.

精解 $P(XY-Y<0)=\iint\limits_{(x-1)y<0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}((x-1)^2+y^2)}dxdy$

$$=\iint\limits_{x_1y_1<0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)}dx_1dy_1\left(令\begin{cases}x_1=x-1\\y_1=y\end{cases}\right)$$
$$=P(X_1Y_1<0)(其中(X_1,Y_1)\sim N(0,0;1,1;0))$$
$$=P((X_1,Y_1)\in 第\text{II}象限)+P((x_1,y)\in 第\text{IV}象限). \quad (1)$$

容易知道(X_1,Y_1)落在x_1Oy_1平面的各个象限的概率彼此相等，所以 $P((X_1,Y_1)\in$ 第Ⅱ象限$)=P((X_1,Y_2)\in$ 第Ⅳ象限$)=\frac{1}{4}$. 将它们代入式(1)得

$$P(XY-Y<0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

附注 本题也可以按以下方法计算

由$(X,Y)\sim N(1,0;1,1;0)$知，X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim N(1,1),\ Y\sim N(0,1),$$

故 $X-1\sim N(0,1)$，且 $X-1$ 与 Y 相互独立，因此

$$P(XY-Y<0)=P((X-1)Y<0)$$
$$=P(X-1<0,Y>0)+P(X-1>0,Y<0)$$
$$=P(X-1<0)P(Y>0)+P(X-1>0)P(Y<0)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题

(15) $\boldsymbol{a=-1,\ b=-\frac{1}{2},\ k=-\frac{1}{3}}$

分析 写出 $f(x)$ 的带佩亚诺型余项的 3 阶麦克劳林公式，即可由 $f(x)\sim kx^3\ (x\to 0)$ 求出 a，b，k 的值.

精解　由于$f(x)=x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]+bx[x+o(x^2)]$

$$=(1+a)x+\left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2+\frac{1}{3}ax^3+o(x^3)\quad(x\to0),$$

所以由　$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{kx^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2+\frac{1}{3}ax^3+o(x^3)}{kx^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+\left(-\frac{1}{2}a+b\right)x^2}{kx^3}+\frac{a}{3k}$$

得 $\begin{cases}1+a=0,\\ -\frac{1}{2}a+b=0,\\ a=3k,\end{cases}$　即 $a=-1$，$b=-\frac{1}{2}$，$k=-\frac{1}{3}$.

附注　本题也可以按以下方法计算：

由　$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{kx^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}\tag{1}$$

得 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x\right)=0$，即 $1+a=0$，所以 $a=-1$.

将 $a=-1$ 代入式(1)得

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{-1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+(1+x)(b\sin x+bx\cos x)}{(1+x)\cdot3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+b\sin x+bx\cos x+bx\sin x+bx^2\cos x}{3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}+\lim_{x\to0}\frac{b(x\sin x+x^2\cos x)}{3kx^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}+\frac{2b}{3k}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{1+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}+\frac{2b}{3k}\qquad(2)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+2b\cos x}{6kx}+\frac{2b}{3k}.\end{aligned}$$

由此可知　$\lim\limits_{x\to0}(1+2b\cos x)=0$，即 $b=-\frac{1}{2}$. 将它代入式(2)得

$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6kx}-\frac{1}{3k}=-\frac{1}{3k}$，即 $k=-\frac{1}{3}$.