严格依据2015年考研数学考试大纲编写

高教版 2015

考研数学
冲刺模拟5套卷（数学一适用）

主 编 王 莉

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

登录中国教育考试在线www.eduexam.com.cn分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2015 KAOYAN SHUXUE
CHONGCI MONI 5 TAO JUAN (SHUXUE YI SHIYONG)

高教版
2015

考研数学
冲刺模拟5套卷（数学一适用）

主编 王莉

最佳搭配：数学考试大纲解析+大纲配套1000题+冲刺模拟5套卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

《2015 考研数学冲刺模拟 5 套卷（数学一适用）》供考生在复习的最后阶段使用。试卷严格以 2015 年版考研《数学考试大纲》规定的考试内容、试卷结构和考试要求及分值比例为参照标准，突出了试题的科学性、严谨性和预测性，同时书后附有详尽的解析，是考生复习备考必不可少的参考书。《2015 考研数学冲刺模拟 5 套卷（数学一适用）》具体特点如下：

第一，重视概念的总结和概念型问题的训练；第二，重视计算的总结和计算型问题的训练；第三，重视逻辑推理的思路总结和证明题的训练；第四，重视总结“边边角角”的知识点；第五，以传统题目为借鉴，重视传统题训练；第六，深挖知识点，适当训练新颖综合试题。

图书在版编目（C I P）数据

2015 考研数学冲刺模拟 5 套卷/王莉主编．--北京：高等教育出版社，2014.9

数学一适用

ISBN 978-7-04-040569-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 189890 号

策划编辑 张耀明　责任编辑 张耀明　封面设计 王 洋　版式设计 杜微言

责任校对 陈旭颖　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	河北新华第一印刷有限责任公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	6	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	130 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	15.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40569-00

目　录

2015年全国硕士研究生招生考试
数学(一)模拟试卷一

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号.
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效.
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔,圆珠笔或签字笔.
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回.

一、选择题(1~8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.请将所选项前的字母填在答题纸指定的位置上)

(1) 当$x\to0$时,$f(x)=\ln(1+x)-(ax^2+bx)$与$g(x)=x\tan x$是等价的无穷小,则常数a,b的取值为

(A) $a=-\dfrac{3}{2},b=1.$　　(B) $a=\dfrac{1}{2},b=1.$

(C) $a=\dfrac{3}{2},b=-1.$　　(D) $a=-\dfrac{1}{2},b=-1.$

(2) 使函数$f(x)=x^3+ax+b$在区间$(-\infty,+\infty)$内只有一个零点x_0(且$x_0<0$)的常数a,b的取值范围是

(A) $a<0,b<0.$　　(B) $a\geqslant0,b<0.$

(C) $a<0,b>0.$　　(D) $a\geqslant0,b>0.$

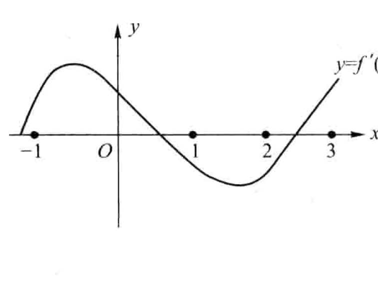
(3) 已知$f(x)$的导函数的图形如下图所示,记$I_1=f(1)-f(0)$,$I_2=f(2)-f(1)$,则必有

(A) $f(1)>f(2),I_1>I_2.$

(B) $f(1)<f(2),I_1>I_2.$

(C) $f(1)>f(2),I_1<I_2.$

(D) $f(1)<f(2),I_1<I_2.$



(4) 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<\pi,\end{cases}$ 它的正弦级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$,则等式 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 成立的区间是

(A) $[0,\pi]$.　　(B) $[0,\pi)$.　　(C) $(0,\pi]$.　　(D) $(0,\pi)$.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 矩阵,若矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解,则必有

(A) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性表示.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组可由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性表示.

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 的秩为 2,且矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$,则与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{bmatrix}$.

(7) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,X_1,X_2,X_3,X_4 是来自总体 X 的简单随机样本,$\overline{X}$ 为样本均值,若概率 $P\{|X-\mu|<a\}=P\{|\overline{X}-\mu|<b\}$,则 a,b 满足的关系为

(A) $a=b$.　　(B) $a=2b$.　　(C) $2a=b$.　　(D) $a=4b$.

(8) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$是取自总体 X 的简单随机样本,且 $DX=\sigma^2>0$,$\overline{X}$ 为样本均值,则 $X_n-\overline{X}$ 与 $\overline{X}$ 的相关系数为

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\dfrac{1}{1-n}$.　　(D) $\dfrac{1}{n-1}$.

二、填空题(9～14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\arcsin x}\displaystyle\int_0^x(1-\sin 2t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t=$________.

(10) 以 $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^{2x}$(其中 C_1,C_2 为任意常数)为通解的二阶线性常系数非齐次微分方程是________.

(11) 设 $z=f(xy,x^2-y^2)$,其中 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

(12) 设 xOy 面内曲线 L 为 $x=1-\sqrt{1-y^2}$,则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds=$________.

(13) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\lambda_1=1,\lambda_2=-2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值,且矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行列式 $|\boldsymbol{B}|=1$,则行列式 $|\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}|=$________.

(14) 在区间$[0,\pi]$上随机取两个数 X 与 Y,则概率 $P\{\cos(X+Y)<0\}=$________.

三、解答题(15~23 小题,共 94 分,请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

求 $z=x^2y(4-x-y)$在区域 $D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 6,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$上的最值.

(16)(本题满分 10 分)

已知 xOz 面曲线 L:$\begin{cases} z=x^2+1, \\ y=0. \end{cases}$

(Ⅰ) 写出曲线 L 绕 z 轴旋转一周所得的曲面 Σ 的方程,并说明 Σ 是何种曲面;

(Ⅱ) 求曲面 Σ 上点 $P(0,0,1)$处的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积.

(17)(本题满分10分)

设函数 $z=f(\ln\sqrt{x^2+y^2})$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{f(\ln\sqrt{x^2+y^2})+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-1$，试求 $f(x)$.

(18)(本题满分10分)

将函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，指出级数的收敛范围，并利用展开式求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$ 的和.

(19)(本题满分10分)

计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{4(x^2+z)+y^2}$,其中 Σ 为曲面 $4z=4(1-x^2)-y^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$的上侧.

(20)(本题满分11分)

已知两个向量组(Ⅰ):$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 与(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,2,\boldsymbol{k})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(4,1,5)^{\mathrm{T}}$,试问 k 取何值时(Ⅰ)与(Ⅱ)等价?并写出等价时(Ⅰ)与(Ⅱ)相互表示的线性表达式.

(21)(本题满分11分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为4,且某个特征值为2.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $(\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AP})$ 为对角矩阵.

(22)(本题满分11分)

设二维随机变量的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} k(x+y), & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(Ⅰ)求常数 k;

(Ⅱ)求关于 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$,并问 X 与 Y 是否独立?

(Ⅲ)计算 $P\{X+Y\leqslant 1\}$;

(Ⅳ)求 $Z=Y-X$ 的概率密度.

(23)(本题满分11分)

某人接连不断、独立地对同一目标射击,直到击中为止,以 X 表示命中时已射击的次数.假设他共进行了10轮这样的射击,各轮射击的次数分别为1,2,3,4,4,5,3,3,2,3,试求此人命中率 p 的矩估计和最大似然估计.

2015 年全国硕士研究生招生考试
数学(一)模拟试卷二

考生注意事项

1. 答题前,考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号.
2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内,写在其他地方无效.
3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔,圆珠笔或签字笔.
4. 考试结束,将答题纸和试题一并装入试题袋中交回.

一、选择题(1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求. 请将所选项前的字母填在答题纸指定的位置上)

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2), x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2}\cos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t, x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 可导但 $f'(0)\neq 0$.　　(D) 可导且 $f'(0)=0$.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 确定,则在 x 的变化区间 $(0,1)$ 内

(A) 函数 $y(x)$ 单调减小,曲线 $y=y(x)$ 是凹的.

(B) 函数 $y(x)$ 单调减小,曲线 $y=y(x)$ 是凸的.

(C) 函数 $y(x)$ 单调增加,曲线 $y=y(x)$ 是凹的.

(D) 函数 $y(x)$ 单调增加,曲线 $y=y(x)$ 是凸的.

(3) 累次积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{-1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-y}^{-1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{-1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(D) $\displaystyle\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^{-1-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(4) 设数列$\{u_n\}$,$\{v_n\}$满足$m<\frac{u_n}{v_n}<M$,其中m,M是大于零的常数,$v_n\neq 0(n=1,2\cdots)$.

考虑以下命题:

① 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必发散;

② 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛;

③ 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或发散;

④ 当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=1$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必收敛,且其和必介于$m$与$M$之间,

其中正确的个数是

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(5) 设$\boldsymbol{A}$是$n\times m$矩阵,$\boldsymbol{B}$是$m\times n$矩阵,且$m>n$,若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$,其中$\boldsymbol{E}$是$n$阶单位矩阵,则必有

(A) 矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关,矩阵$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(B) 矩阵$\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关,矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.

(C) 矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关,矩阵$\boldsymbol{B}$的行向量组线性相关.

(D) 矩阵$\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关,矩阵$\boldsymbol{B}$的列向量组线性相关.

(6) 设$\boldsymbol{A}$是任一n阶可逆矩阵$(n\geqslant 3)$,k为常数,且$k\neq 0,\pm 1$,则$(k\boldsymbol{A}^{-1})^*$等于

(A) $\frac{\boldsymbol{A}}{k^{n-1}|\boldsymbol{A}|}$. (B) $\frac{\boldsymbol{A}}{k^{n}|\boldsymbol{A}|}$. (C) $\frac{k^{n-1}\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$. (D) $\frac{k^{n}\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

(7) 设A,B为随机事件,且$B\subset A$.考虑下列式子

① $P(A+B)=P(A)$; ② $P(AB)=P(B)$;

③ $P(B-A)=P(B)-P(A)$; ④ $P(B|A)=P(B)$,

其中正确的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(8) 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自二项总体$B\left(5,\frac{1}{3}\right)$的简单随机样本,$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}X_j$是其样本均值,则

(A) $\operatorname{cov}(X_i,\overline{X})=\dfrac{5}{3n}$.　　(B) $\operatorname{cov}(X_i,\overline{X})=\dfrac{10}{9n}$.

(C) $D(X_i+\overline{X})=\dfrac{5(n+2)}{3n}$.　　(D) $D(X_i-\overline{X})=\dfrac{10(n+2)}{9n}$.

二、填空题(9～14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(9) 设当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $\beta(x)=\int_0^{1-\cos x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 是等价的无穷小,则常数 $a=$________.

(10) 微分方程 $\tan y\mathrm{d}x-(1+\mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$ 的特解为________.

(11) 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $y=xf(z)+\varphi(y,z)$ 确定,其中 f,φ 分别具有连续的导数和偏导数,且 $xf'+\varphi'_z\neq 0$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

(12) 设曲面 Σ 为 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$,则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2-3xyz)\mathrm{d}s=$________.

(13) 设三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,且向量 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$,则秩 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=$________.

(14) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从正态分布 $N(0,1)$,Y 在区间$[-1,3]$上服从均匀分布,则概率 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$________.

三、解答题(15～23小题,共94分,请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分10分)

求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}+x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$.

(16)(本题满分 10 分)

设 $x\in(0,1)$,证明:$(1-x)e^{x}<\left(1-\frac{x}{2}\right)^{x}$.

(17)(本题满分 10 分)

在曲面 $S:2x^2+y^2+z^2=1$ 上求一点,使函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在该点沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 的方向导数最大.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n3^n}$ 的收敛域与和函数.

(19)(本题满分11分)

(Ⅰ)设函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的区间 $[a,b]$ 内具有二阶导数,证明对 (a,b) 内任一点 x,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2;$$

(Ⅱ)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数,且 $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=-1$. 试证明:$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x)\geqslant 8$.

(20)(本题满分11分)

设齐次线性方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2+bx_3-x_4=0, \\ x_1+2x_2+ax_4=0. \end{cases}$ 又已知齐次线性方程组(Ⅱ)的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$. 试问 a,b 为何值时,(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解?并求出所有的非零公共解.

(21)(本题满分 11 分)

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵,若存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$,又已知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 有一个特征值为 $\lambda=1$,相应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(Ⅰ)求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$;

(Ⅱ)求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{x}$ 的表达式,并确定其正负惯性指数.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布,其中 D 是由 $x\pm y=1$ 与 $x=0$ 所围成的三角形区域.

(Ⅰ)求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(Ⅱ)求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(Ⅲ)求 $P\{X>Y\}$.