大学数学系列规划教材

安徽省高等学校“十二五”规划教材

概率论与数理统计（理工类）

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主编 董毅

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

安徽省高等学校"十二五"规划教材
安徽省省级精品资源共享课程《概率论与数理统计》建设成果
安徽省《高等数学》教学团队项目建设成果
蚌埠学院《概率论与数理统计》重点课程项目建设成果
蚌埠学院《概率论与数理统计》精品课程项目建设成果

概率论与数理统计

（理工类）

主　　编　董　毅

参编人员　张迎秋　李声锋　赵玉梅
亓洪胜　熊洪斌　贾朝勇
孙西超　桂　云

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计:理工类/董毅主编. —合肥:安徽大学出版社,2014.8

大学数学系列规划教材

ISBN 978-7-5664-0808-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①董… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 182735 号

概率论与数理统计(理工类) **董 毅 主编**

出版发行:北京师范大学出版集团
安 徽 大 学 出 版 社
(安徽省合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
www.bnupg.com.cn
www.ahupress.com.cn

印　　刷:合肥远东印务有限责任公司

经　　销:全国新华书店

开　　本:184mm×260mm

印　　张:21.25

字　　数:510 千字

版　　次:2014 年 8 月第 1 版

印　　次:2014 年 8 月第 1 次印刷

定　　价:39.00 元

ISBN 978-7-5664-0808-2

策划编辑:李 梅 张明举

责任编辑:张明举

责任校对:程中业

装帧设计:李 军

美术编辑:李 军

责任印制:陈 如

前　言

本书立足于新建地方本科院校应用型人才的培养定位，根据应用型人才培养目标的要求，按照“以应用为目的，实现两个转变，形成三个层面，把握四个关系”的思路编著，力求适应新建本科院校学生实际，使得学生有兴趣、愿意学、学得会、会应用，真正成为应用型教材．“以应用为目的”就是根据应用型人才的培养需要，以问题为导入，以应用理论解决问题为目的．“实现两个转变”就是由重视体系完整的课程导向，向重视专业需求的应用导向转变，由重视数学理论的应试导向，向重视数学应用的能力导向转变．“形成三个层面”就是将整个课程的教学内容分成基本、应用和深化三个层面．基本部分内容包括基本概念、基本理论、基本思想方法；应用部分主要内容是利用数学软件分析计算实际问题；深化部分包括理论拓展与深化．“把握四个关系”就是在整个课程体系中，要处理好具体与抽象、整体与局部、知识与方法、结果与过程的关系，按照培养应用型人才的要求设计．

本书被立项为安徽省高等学校“十二五”规划教材（项目编号：2013ghjc297）、2013年蚌埠学院规划教材，是安徽省省级精品资源共享课程《概率论与数理统计》项目（项目编号：2013gxk099）建设成果之一，安徽省《高等数学》教学团队项目（项目编号：20101093）建设成果之一，也是蚌埠学院《概率论与数理统计》重点课程项目（项目编号：zdkc1101）、蚌埠学院《概率论与数理统计》精品课程项目（项目编号：2013jpc01）建设成果之一．

本书主要特点是：

第一，重视理论应用．全书贯穿应用主线，引导应用理论解决实际问题；

第二，重视思想方法．凸现数学思想，关注直观想法，加深对方法的理解；

第三，重视实验方法．注重演示实验，突出利用软件计算；

第四，重视纵横贯通．联系离散讲连续，联系一维讲多维，联系概率讲统计，联系检验讲估计，联系现实社会生活，联系学生所学专业；

第五，分层设计作业．方便教学，有利自学．作业按节号编排，题号带A的为只涉及本节内容题，带B的为涉及章内跨节内容作业，带C的为涉及跨章内容作业．其中带“*”的为较难或涉及拓展内容的作业．

本书可以作为应用型本科各专业的教材，也可作为高职高专相关专业教材使用．每章分教学要求、基本内容、串讲与答疑、软件计算、拓展提升、作业设计、自测题等7个部分，书后有附表、作业答案与提示等．带“*”的为选讲内容，可以作为有兴趣进行理论拓展与深化的同学自学．

本书是蚌埠学院《概率论与数理统计》教学团队集体智慧的结晶．由董毅教授设计、编写

初稿、统稿，软件计算部分由李声锋副教授编写. 多位老师参加讨论、修改完善工作，熊洪斌讲师负责第一章，赵玉梅副教授负责第二章，贾朝勇讲师负责第三章，孙西超讲师负责第四章和第五章，亓洪胜讲师负责第六章和第七章，桂云讲师负责第八章，李声锋副教授负责第九章.

张迎秋副教授、李声锋副教授分别审阅了全书.

非常感谢为本书的出版发行付出辛勤劳动的安徽大学出版社的同志们.

由于编写应用型教材是初次尝试，加之我们水平所限，拙作缺点和不当之处在所难免，恳请同行、读者批评指正.

编　者

2014 年 5 月

符号说明

本书部分符号可能与其他教材有所不同,现说明如下:

$B(n,p)$ 表示参数为 n , p 的二项分布.

$P(\lambda)$ 表示参数为 λ 的泊松分布.

$G(p)$ 表示参数为 p 几何分布.

$U(a,b)$ 表示 (a,b) 区间上的均匀分布.

$E(\lambda)$ 表示参数为 λ 的指数分布.

$N(\mu,\sigma^2)$ 表示均值为 μ 、方差为 σ^2 的正态分布.

$F(x)$ 表示随机变量 X 的分布函数 $F(x) = P\{X \leqslant x\}$.

$\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数.

$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 表示样本均值.

$S^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 表示样本方差.

$\cancel{S}^{\,2} = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 表示样本修正方差.

$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(n)}$ 表示数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 由小到大的重排.

z_α 表示标准正态分布的概率为 α 的上临界值.

$\chi_\alpha^2(n)$ 表示自由度为 n 的 χ^2 分布的概率为 α 的上临界值.

$t_\alpha(n)$ 表示自由度为 n 的 $t(n)$ 分布的概率为 α 的上临界值.

$F_\alpha(n,m)$ 表示自由度为 n 、m 的 F 分布的概率为 α 的上临界值.

$S_w^2 = \dfrac{1}{m+n-2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum\limits_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}^2)\right]$,其中 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $\overline{Y} = \dfrac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} Y_i$.

$i.i.d.$ 表示独立同分布.

$X \sim$ 表示 X 服从的分布.

$X \stackrel{\cdot}{\sim}$ 表示 X 近似服从的分布.

目　录

第1章

随机事件及其概率

概率论与数理统计是对随机现象的统计规律进行演绎和归纳的科学，是从数量上研究随机现象的客观规律的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分，也是很有特色的一个数学分支，是高等学校工科类本科各专业的一门重要的基础理论课. 它的理论与方法的应用几乎遍及所有科学技术领域. 本章通过随机试验介绍概率论中的基本概念——样本空间、随机事件及其概率，并进一步讨论随机事件的关系及其运算，概率的性质及其计算方法.

【教学要求】

- 理解样本空间、随机事件等概念，掌握事件之间的关系和运算.
- 熟练掌握概率的定义与性质、古典概型，理解频率与概率的关系.
- 理解条件概率概念，掌握乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式，并能灵活运用.
- 理解事件的相互独立的概念，会用事件的独立性进行运算.
- 掌握贝努里概型，能够将实际问题归结为贝努里概型并计算概率.

§1.1 随机事件及其运算

一、随机事件概念

自然界和社会中的现象有确定性现象和随机性现象.

确定性现象是在一定条件下，必定会导致某种确定结果的现象. 确定性现象事前可预言. 比如，在标准大气压下，水加热到100摄氏度，就必然会沸腾；在化学反应中，参加反应的各物质的质量总和等于反应后生成各物质的质量总和. 一般自然科学各学科就是为了寻求这类必然现象的因果关系.

随机性现象是在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象，即在相同条件下重复进行试验，每次结果未必相同. 随机性现象，也称为“随机现象”或“偶然现象”，其事前不可预言. 随机现象十分普遍. 比如，以同样的方式抛掷硬币时可能出现正面向上也可能出现反面向上的情况；走到某十字路口时，可能正好是红灯，也可能正好是绿灯.

从表面上看，随机现象似乎没有什么规律. 但实践证明，大量观察情况下，同类随机现

象会呈现出一定的规律性. 正如恩格斯所说的“偶然性背后隐藏着必然性”. 我们把这种由大量同类随机现象整体所呈现出来的规律性,叫作统计规律性. 概率论和数理统计就是研究随机现象统计规律性的数学学科.

1. 随机试验

具有下列三个特性的试验称为随机试验:

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但事先知道每次试验所有可能结果的范围;

(3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验常用 E 表示,简称为试验.

例 1 E_1 : 抛掷一枚硬币,观察正面(H)和反面(T)出现的情况;

E_2 : 抛掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_3 : 观察一天内访问百度百科的独立 IP 数;

E_4 : 记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

2. 随机事件

试验的结果,称为随机事件(简称“事件”). 常以 A 、B 、C … 大写英文字母表示事件. 一次试验中必然发生的事件称为必然事件,记作 Ω. 一次试验中不可能发生的事件称为“不可能事件”,记作 $\varnothing$. 通常把必然事件与不可能事件看作特殊的随机事件.

例 2 教师在课堂上随机选一个学号,请对应的学生回答问题,这个学生可以“是男生”,“是女生”,“是戴眼镜的学生”,“是穿红衣服的学生”,“是体重在 60 公斤以上的”,这些都是随机事件.

为了用集合来研究事件,我们引入样本空间的概念.

3. 样本空间

一个试验中直接产生的所有不同结果的集合称为这个试验的样本空间,用 Ω 表示. Ω 中的元素称为样本点,用 ω 表示, 即 $\Omega=\{\omega\}$. 样本点是试验中直接产生的不能再分解的结果.

例 3 (1) 投一枚硬币,观察朝上的面,$\Omega=\{正,反\}$. “正面朝上或反面朝上”是必然事件 Ω, “正面朝上并且反面朝上”是不可能事件 $\varnothing$.

(2) 从一副(去掉大小王,下同)扑克牌中任抽一张,观察抽出的牌, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{52}\}$. “抽到一张牌”是必然事件 Ω,“抽到一张电影票”是不可能事件 $\varnothing$.

4. 事件的集合表示

用集合的描述事件时,Ω 的子集表示事件,样本空间(全集)Ω 表示必然事件,空集 $\varnothing$ 表示不可能事件. 这也是我们将必然事件与样本空间都用 Ω 表示, 将不可能事件与空集都用 $\varnothing$ 表示的原因.

我们将只包含一个样本点的集合(单点集)表示的事件称为“基本事件”. 基本事件是试验中直接产生的不能再分解的“最简单”的事件. 常常将基本事件与样本点等同.

例 4 在 52 张扑克牌中,任取一张, $A=$“抽到方片”, $B=$“抽到 K”. A、B 都是事件, 可以分别用集合表示为

$A=\{$方片 A,方片 2,…,方片 Q,方片 K$\}$, A 包含了 13 个样本点,不是基本事件;

$B=\{$方片 K,红桃 K, 黑桃 K,梅花 K$\}$, B 包含了 4 个样本点,也不是基本事件.

而 $C=\{$方片 2$\}$ 只含了 1 个样本点,是基本事件.

5. 用集合表示的事件发生的含义

我们需要研究事件发生的可能性大小，因此，用集合表示事件后，必须明确其“发生”的含义：用集合 B 表示事件 B 时，事件 B 发生当且仅当试验中出现了集合 B 中的样本点. 比如，在例 4 中，抽到 B＝{方片 K，红桃 K，黑桃 K，梅花 K} 中任何一张，都属于事件 B 发生了.

类似地，由于试验中每次出现的结果都在样本空间 Ω 中，所以样本空间表示必然事件；由于试验中每次出现的结果都不在空集 $\varnothing$ 中，所以空集表示不可能事件.

二、事件的关系与运算

集合有关系与运算，所以用集合表示的事件也有相应的关系与运算.

1. 事件的包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A 或称事件 A 包含于事件 B，记作 $A \subset B$（或 $B \supset A$）. 比如，例 4 中，“抽到方片” ⊂ “抽到红牌”.

由集合表示的事件发生的含义容易得到，若集合 A 表示事件 A，集合 B 表示事件 B，则事件 A 发生必然导致事件 B 发生当且仅当 $A \subset B$.

下面事件之间的关系与运算，同样等价于表示它们的集合之间的关系与运算.

2. 事件的相等关系

若事件 A 与事件 B 相互包含，即 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 A 与 B 相等或等价，记作 $A = B$. 这时，从发生与否看，A 与 B 是同一个事件.

3. 事件的和运算

“事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”，这个事件称为 A 与 B 的和事件或并事件，记作 $A \cup B$；“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生”，这个事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和或并，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$（简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$）. 还可以定义一列事件的和：“$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生”，这个事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和或并，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$（简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$）.

比如，若某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，则“产品不合格”是“长度不合格”与“直径不合格”的和事件.

4. 事件的积运算

“事件 A 与事件 B 同时发生”，这个事件称为 A 与 B 的积事件或交事件，记作 $A \cap B$（简记为“AB”）；“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”，这个事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件或交事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$）.

比如，若某种产品的合格与否是由该产品的长度与直径是否合格所决定，因此“产品合格”是“长度合格”与“直径合格”的交或积事件.

5. 事件的互斥关系

若事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥；若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不能同时发生，即 $A_iA_j = \varnothing$，$(1 \leqslant i < j \leqslant n)$，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容或两两互斥.

6. 事件的对立关系

若事件 A 和事件 B 互不相容，且它们至少有一个发生是必然事件，即 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称事件 A 与事件 B 是对立的. 这时称 B 是 A 的对立事件或 B 是 A 的对立事件. 事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.

7. 事件的差运算

"事件 A 发生且事件 B 不发生"，这个事件称为事件 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$（或 $A\overline{B}$）.

例 5 加工 3 个零件，A_i 表示第 i 个零件是正品 $(i=1,2,3)$. 则

(1) $A_1A_2A_3$ 表示没有一个零件是次品，即 3 个零件全是正品；

(2) $\overline{A}_1A_2A_3$ 表示只有第一个零件是次品；

(3) 恰有一个是次品可表示为：$\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$（不是 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$）；

(4) 至少有一个是次品可表示为：$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$（或 $\overline{A_1A_2A_3}$）.

注意 不要混淆 $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3$ 和 $\overline{A_1A_2A_3}$.

8. 事件运算性质

事件运算的性质与集合的运算性质形式上完全相同. 比如，对任意事件 A,B,C 有：

交换律：$A\cup B=B\cup A,AB=BA$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

§1.2 随机事件的概率

一、频率与概率的定义

事件的频率与事件的概率关系密切，我们可以通过频率来认识概率.

1. 事件频率的定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则称 $\frac{n_A}{n}$ 为随机事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$.

(1) 频率的稳定性. 试验表明，虽然事件 A 在一次试验中是否出现是偶然的，但是在大量重复试验下，事件 A 发生的频率具有稳定性，其在某个常数附近摆动，而且随着试验次数的增加，摆动的幅度越来越小. 我们称此为频率的稳定性. 比如，在投均匀硬币实验中，如表 1-1 所示，随着实验次数增加，正面朝上频率稳定于 0.5.

表 1-1 历史上数学家投均匀硬币实验

实验者	实验次数	正面朝上次数	正面朝上频率
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

图 1-1

再如：人类出生性别比具有稳定性；英语字母使用频率具有稳定性，并按此频率安排键盘位置.

(2) 频率的性质. 设 A 是随机试验 E 的任一事件，容易得到：

① $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

② $f_n(\Omega) = 1$，$f_n(\varnothing) = 0$；

③ 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是两两互斥的事件，则

$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m)$.

2. 事件概率的统计定义

若当试验次数 n 很大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一个稳定的值 $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A) = p$.

思考 我们知道，事件的频率能反映事件发生的可能性大小. 那么，为什么还要引入概率来度量事件发生的可能性大小呢？因为同一事件的频率很多，不唯一. 比如，投均匀硬币中正面出现的频率有很多. 从事件的众多频率中抽象概括出事件的概率，它比用频率反映事件发生的可能性更本质且唯一.

概率是频率的稳定值，频率是概率的近似值. 从频率的性质可以抽象出概率的 3 条公理：

(1) 非负性：任何事件 A 的概率都非负，即 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：必然事件的概率为 1，即 $P(\Omega) = 1$；

(3) 完全可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ 是一列两两互斥的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_m) + \cdots.$$

二、概率的性质

由概率的 3 条公理可以推导出概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$.

证明 由 $\Omega = \Omega \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$ 及完全可加性得

$$P(\Omega) = P(\Omega) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

由规范性得

$$0 = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

再由非负性得

$$0 = P(\varnothing)$$

性质 2 (有限可加性)设 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明 令 $A_{n+k} = \varnothing$，$k = 1, 2, \cdots$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是一列两两互斥的事件，由完全可加性得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots.$$

由于 $A_{n+k} = \varnothing$，$P(A_{n+k}) = 0$，$k = 1, 2, \cdots$，故

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

即 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

性质 3 对于任意一个事件 A : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为 $\Omega = A \cup \overline{A}, A\overline{A} = \varnothing$, 由有限可加性及规范性得 $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$ 故 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4 若事件 A 与事件 B 满足 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A),\ P(A) \leqslant P(B).$$

证明 因 $A \subset B$, 故 $B = A \cup (B - A), A(B - A) = \varnothing$, 由此据有限可加性得

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

从而 $P(B - A) = P(B) - P(A)$, 并注意到 $P(B - A) \geqslant 0$. 得 $P(B) \geqslant P(A)$.

注意 $P(B - A) = P(B) - P(A)$ 必须要有条件 $A \subset B$.

思考 $A \subset B$ 表明 B 比 A 发生的可能性更大,这时 $P(B) \geqslant P(A)$. 性质 4 说明概率能度量事件发生的可能性大小:事件发生的可能性越大,其概率越大. 由此可知,必然事件发生的概率最大, 且 $P(A) \leqslant 1$.

性质 5 对于任意事件 A 和事件 B, $P(B - A) = P(B) - P(AB)$.

证明 由于 $B - A = B - AB, B \supset AB$, 据性质 4 得

$$P(B - A) = P(B - AB) = P(B) - P(AB).$$

性质 5 是性质 4 的推广.

性质 6 (加法公式) 对于任意事件 A 和事件 B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证明 由于 $A \cup B = A \cup (B - A), A(B - A) = \varnothing$, 据有限可加性及性质 5 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

多次使用性质 6 可得到:对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).$$

例 6 若 $P(B - A) = P(B)$, 求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 由性质 5 得 $P(B) = P(B - A) = P(B) - P(AB)$, 故 $P(AB) = 0$, 从而由性质 6 得 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 因此, 据性质 3 得

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B).$$

三、古典概型

古典概型是概率论发展初期研究的主要对象, 一般只运用初等数学计算概率,故称为古典概型. 其主要特征是“有限等可能”.

1. 古典概型概念

具有下列两个特征的随机试验称为古典概型:

(1) 试验的样本空间 Ω 是有限集,不妨设 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$;

(2) 在每次试验中,每个样本点 $\omega_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 出现的概率相同,即

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_n\}).$$

2. 古典概型的概率计算

在古典概型中，事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\frac{k}{n}.$$

证明　由 $P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$ 知

$$1=P(\Omega)=P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\})=nP(\{\omega_i\}),\ 1\leqslant i\leqslant n,$$

故 $P(\{\omega_i\})=\dfrac{1}{n},1\leqslant i\leqslant n$. 设 $\mathrm{A}=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_k}\}$，则

$$P(A)=P(\{\omega_{i_1}\})+P(\{\omega_{i_2}\})+\cdots+P(\{\omega_{i_k}\})=\frac{k}{n}.$$

例 7　袋内有 3 个白球和 2 个黑球，现从袋中任取 2 个球，求取出的 2 个球都是白球的概率.

解　设事件 $A=$"取出 2 个白球"，$P(A)=\dfrac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$.

注意　同时取 2 个球与无放回的先后取 2 个球，效果一样.

例 8　一批产品中有 9 件正品和 3 件次品，从中依次任取 5 件. 设 $A=$"恰有 2 件次品"，$B=$"至少有 1 件次品"，$C=$"至少有 2 件次品"，求事件 A、B、C 的概率.

解　$P(A)=\dfrac{C_9^3C_3^2}{C_{12}^5}=\dfrac{7}{22}$，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{C_9^5}{C_{12}^5}=\dfrac{37}{44}$.

$$P(C)=P(A)+P\{\text{恰有 3 件次品}\}=\frac{7}{22}+\frac{C_3^3C_9^2}{C_{12}^5}=\frac{4}{11}.$$

例 9　袋内有 a 个白球与 b 个黑球，现从袋中任取 $\alpha+\beta$ 个球，求恰好取出 α 个白球与 β 个黑球的概率（$a\geqslant\alpha$，$b\geqslant\beta$）.

解　这是例 7 和例 8 中 A 的一般化.

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点的个数}}{\Omega\text{ 中所含样本点的个数}}=\frac{C_a^\alpha C_b^\beta}{C_{a+b}^{\alpha+\beta}}.$$

例 10　（抽签问题）袋内有 a 个白球与 b 个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不放回，接连取 k（$k\leqslant a+b$）个球，求第 k 次取得白球的概率.

解　取球是讲究顺序的. 观察前 k 次取球情况. 样本点总数为 P_{a+b}^k. 要第 k 个取到白球发生，第 k 次可以从 a 个白球中任取，有 a 种取法，而其余 $k-1$ 个球可从其他 $a+b-1$ 个球中任取，有 P_{a+b-1}^{k-1} 种取法. 故所求概率为

$$P(A)=\frac{P_a^1P_{a+b-1}^{k-1}}{P_{a+b}^k}=\frac{a}{a+b}.$$

例 11　（生日问题）某班有 40 名同学. 求下列事件的概率：

(1) $A=$"某指定 30 天，每天恰有一位同学过生日"；

(2) $B=$"全班同学的生日各不相同"；

(3) $C=$"某指定日恰为某 2 人生日".

解　(1) $P(A)=\dfrac{P_{40}^{30}}{365^{40}}$；

(2) $P(B)=\dfrac{P_{365}^{40}}{365^{40}}$（注意 A,B 的区别!）；

(3) $P(C)=\dfrac{C_{40}^2\ 364^{38}}{365^{40}}$.