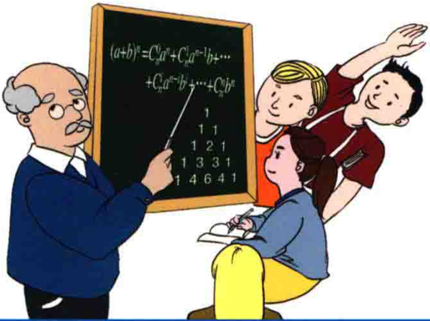


数林外传系列

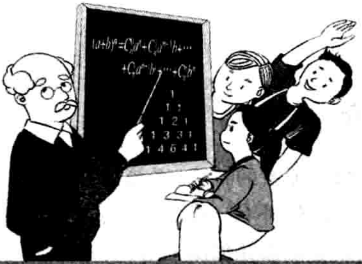
跟大学名师学中学数学

面积关系帮你解题

第2版

◎张景中 著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

面积关系帮你解题

第2版

◎ 张景中　著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书利用面积公式揭示平面图形数量关系的特点，系统地介绍了用面积关系来证明平面图形中的相等、不等、成比例、共点线、共线点等初等几何性质，以及用面积关系作几何图形等问题.书中介绍的证明方法比较简便，有的较为巧妙，颇有启发性，对开拓学生解题思路有一定的帮助.在此基础上还初步介绍了带号面积和面积坐标知识，将面积与解析几何联系起来，以适当扩展学生的数学知识.

图书在版编目(CIP)数据

面积关系帮你解题/张景中著.—2版.—合肥：中国科学技术大学出版社，2013.1

（数林外传系列：跟大学名师学中学数学）

ISBN 978-7-312-03141-0

Ⅰ.面… Ⅱ.张… Ⅲ.几何课—中学—题解

Ⅳ.G634.635

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第300227号

中国科学技术大学出版社出版发行

安徽省合肥市金寨路96号，230026

http://press.ustc.edu.cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本：880 mm×1230 mm 1/32 印张：3.75 字数：86千

1981年1月第1版 2013年1月第2版 2013年1月第2次印刷

定价：10.00元

目　　次

1　一个古老而年轻的方法

利用面积关系来说明数学中的某些恒等式、不等式，或证明某些定理，这是一个古老而又年轻的方法.

说它古老，是因为：早在三千多年前，在几何学还没有形成一门系统的学科时，人们已经会用这种方法来解决某些问题了.

说它年轻，是因为：直到今天，人们并没有给它足够的重视，因而，这种方法的潜力远没有得到发挥. 它广泛的、五花八门的用途，很少在教科书、教学参考书和各种学生读物中得到较系统的阐述.

几何学的产生，源于人们对土地面积测量的需要. 翻开任何一本关于数学史的通俗读物，差不多都记载着这样的故事. 在古埃及，尼罗河每年泛滥一次. 洪水给两岸的田地带来了肥沃的淤积泥土，但也抹掉了田地之间的界线标志. 洪水退后，人们要重新划出田地的界线，这就必须丈量和计算田地的面积. 年复一年，就积累了最基本的几何知识.

这样看来，从一开始，几何学便与面积结下不解之缘. 英语中的“几何”——“Geometry”，这个字的字头“geo-”便含有“土地”的意思.

但是，用面积关系来证明几何定理，最早的例子是勾股定理的证法. 所谓勾股定理，就是：

在直角三角形中，两直角边的平方之和等于斜边的平方.

我国古代数学家把直角三角形较短的直角边叫“勾”，较长的直角边叫“股”，而把斜边叫做“弦”.因而把这个定理叙述为“勾方加股方等于弦方”，勾股定理由此而得名.

下述勾股定理的精彩证明，是我国古代数学家智慧的结晶.

勾股定理证法之一：

如图1，四个同样大小的直角三角形的斜边围成一个正方形；它们的直角边围成了一个更大的正方形(为什么？请读者自证).

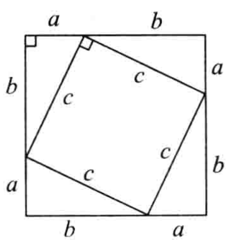


图1

设直角三角形两直角边分别为 a，b，斜边为 c.图1中大正方形面积

$$S_{大}=(a+b)^2,$$

小正方形面积

$$S_{小}=c^2,$$

直角三角形面积 $S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab$.显然有

$$S_{大}=S_{小}+4S_{\triangle},$$

也就是

$$(a+b)^2=c^2+2ab,$$

把等式的左边展开，两边消去 $2ab$，便得勾股定理

$$a^2+b^2=c^2.$$ □[①]

到目前，勾股定理常见的证明方法已有数十种了，但其中最简单的证法仍然是利用面积关系.

① □记号表示证毕的意思.

勾股定理证法之二：

作直角$\triangle ABC$斜边AB上的高CD，得到三个相似三角形(图 2)，即

$\triangle ABC \backsim \triangle ACD \backsim \triangle CBD$(为什么？请读者自证).

根据相似三角形的面积与对应边的平方成正比的定理，可得

$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle ACD} : S_{\triangle CBD} = AB^2 : AC^2 : BC^2$.

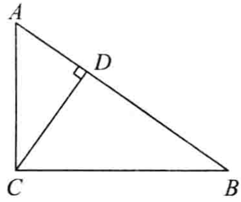


图 2

也就是

$$S_{\triangle ABC} = kAB^2, \quad S_{\triangle ACD} = kAC^2, \quad S_{\triangle CBD} = kBC^2;$$

这里 k 为正数. 但是

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD},$$

因而

$$kAB^2 = kAC^2 + kBC^2,$$

也就是

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \qquad \square$$

用面积关系说明一些基本的恒等式或不等式，也是早就被许多教科书所采用的方法. 例如，从图 3 便可看出恒等式①

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy,$$

由于$(x-y)^2 \geqslant 0$，从而得到不等式

$$(x+y)^2 \geqslant 4xy,$$

或者化简一下，得

$$x^2 + y^2 \geqslant 2xy.$$

① 请注意：阴影部分的面积是$(x-y)^2$.

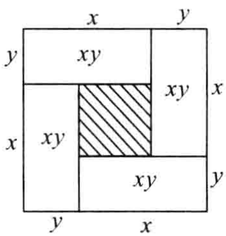


图 3

当且仅当 $x=y$ 时等号才成立.

生理学家和医学家们的研究发现:我们大脑的两个半球,左半球主要管抽象的东西——语言,逻辑,数学……,右半球主要管具体的东西——形象,图画,音乐…….把抽象的代数关系用具体的图形表示出来,便动员了两个半球同时工作,印象深、理解快、记得牢.用图形表示代数关系的重要方法之一,便是用面积关系来联系的.

这本小册子的目的,是试图较为系统地阐述用面积关系证明几何命题的基本技巧和方法.

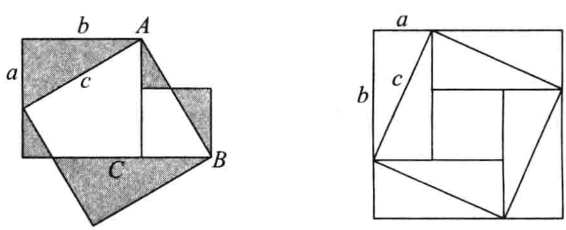
练 习 题 1

1. 用面积关系表示下列恒等式:

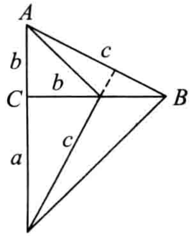
(1) $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$;

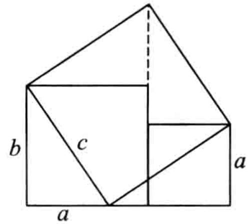
(2) $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$.

2. 利用下列图形,给出勾股定理的几种证法.



(第 2 题图)





(第2题图续)

3. 用面积关系表示阿贝尔恒等式：

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\&=a_1(b_1-b_2)+(a_1+a_2)(b_2-b_3)+\cdots\\&\quad+(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(b_{n-1}-b_n)\\&\quad+(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n.\end{aligned}$$

2　同一个面积的多种表示

上面介绍的勾股定理的古老证法一虽然简单，但它已体现了用面积关系证题的基本思想：用不同的方法计算同一块面积，从而得到一个等式——这样的等式我们把它叫做“面积方程”；再对这个“面积方程”进行整理或变换，以获得我们所要的结果.

为了能够列出各种各样的面积方程，就要熟悉面积的计算方法. 平面几何中许多图形，都可以分割成若干个三角形. 于是，我们应当熟悉三角形面积的各种表示法.

按习惯，用 a，b，c 分别表示$\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 所对的边，h_a，h_b，h_c 顺次表示 a，b，c 三边上的高. 我们最熟悉的三角形面积公式是

$$\text{三角形面积} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高},$$

以后，为方便起见，我们用记号“$S_{\triangle ABC}$”表示三角形 ABC 的面积. 上述公式便可清楚地记作

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c. \tag{2.1}$$

对公式(2.1)略加改变，利用关系式

$$h_a = b\sin C$$

等代入,便得到了与角、边都有联系的公式

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C. \qquad (2.2)$$

这个公式,往往不被人们重视.其实,它的用处很大.因为它把平面几何中三种最重要的度量——长度、角度、面积紧密地联系在一起了.下面,我们很快可以看到公式(2.2)的重要性.

还有一个大家所熟知的海伦公式,即已知三角形三边求面积的公式

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.^{①} \qquad (2.3)$$

我们利用勾股定理可从(2.1)导出这个公式.事实上,在图4中令 $BD = x$,那么 $DC = a - x$.由勾股定理列出方程

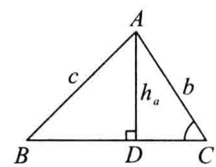


图 4

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2,$$

展开后解得

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

所以

$$h_a^2 = c^2 - x^2 = \frac{1}{4a^2}[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]$$

$$= \frac{1}{4a^2}(2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

---

① $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ 表示△ABC 的周长的一半.

$$=\frac{1}{4a^2}[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]$$

$$=\frac{1}{4a^2}(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$$

$$=\frac{4}{a^2}s(s-a)(s-b)(s-c).$$

由此即得公式(2.3). □

三角形的面积公式远远不止以上三个，还可以导出已知三条高、或三条中线、或三条角平分线、或两角一边、或一边及另两边上的高、或一角一对边及这边上的中线等等求面积的公式. 这样的公式至少也有几十种. 但是，在应用面积关系解题时，有了这三个，也就足够用了. 其他多种多样的三角形面积公式，都可以直接或间接地由这三个基本公式导出. 请看以下的两个例子：

【例 2.1】 已知$\triangle ABC$两边b,c上的高为h_b,h_c，及另一边a，求它的面积.

解 利用面积公式(2.1)，得到

$$b=\frac{2S}{h_b},\qquad c=\frac{2S}{h_c},$$

这里简记$S_{\triangle ABC}$为S，代入海伦公式，得

$$S=\frac{1}{4}\left[a+\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2S\right]^{\frac{1}{2}}\left[-a+\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)2S\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[a+\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)2S\right]^{\frac{1}{2}}\left[a-\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)2S\right]^{\frac{1}{2}}.$$

所以

$$16S^2=\left[\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)^2 4S^2-a^2\right]\left[a^2-\left(\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)^2 4S^2\right].$$

展开后得方程

$$16\left(\frac{1}{h_b^2}-\frac{1}{h_c^2}\right)^2 S^4-8\left[a^2\left(\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)-2\right]S^2+a^4=0.$$

解这个方程，它的唯一的正实数根即为$\triangle ABC$的面积. 以下从略. □

【例 2.2】 已知$\triangle ABC$的三条中线为m_a, m_b, m_c，求它的面积.

解 如图 5 所示，设三条中线 AD，BE，CF 交于P点，由于

$$AP=\frac{2}{3}AD,$$

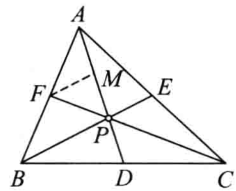


图 5

所以

$$S_{\triangle APF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABP}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}.$$

取 AP 的中点M，那么

$$MP=\frac{1}{3}m_a,\quad PF=\frac{1}{3}m_c,\quad FM=\frac{1}{3}m_b.$$

而

$$S_{\triangle MPF}=\frac{1}{2}S_{\triangle APF}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}.$$

于是由海伦公式可得

$$\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle MPF}=\frac{1}{9}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$$

$$\left(m=\frac{1}{2}(m_a+m_b+m_c)\right).$$

所以

$$S_{\triangle ABC}=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}. \qquad \square$$

在上面的解法中，用到了中线的性质. 这些性质也可以独立地由面积关系导出. 请读者参看例 9.1.

练 习 题 2

1. 已知 $\triangle ABC$ 的三条高为 h_a、h_b、h_c，求它的面积和三边.

2. 已知 $\triangle ABC$ 的周长和内切圆的半径，求它的面积.

3. 已知 $\triangle ABC$ 的 a 边及 B，C 两角，求它的面积.

3　一个公式表示多种面积

前面说过，面积公式(2.2)

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

用途最广，因为它把长度、角度和面积三种度量联系在一起了. 另外，它还有一个有趣的特点——"一身而兼多任"，可以表示好几种图形的面积.

本来，在公式

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$$

中，a，b 表示$\triangle ABC$ 中角 C 的两夹边. 但我们稍一留心，便可发现，完全能够给 a，b，C 以更广义的解释.

把这广义的解释写成：

命题 3.1　在$\triangle ABC$ 中，设 $BC=a$，在直线 BC 上任取一点 P，设 $AP=b^*$①，AP 与 BC 所成的角(锐角或钝角任取其一)为 C^*，那么有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

证明　如果点 P 与 B，C 之一重合，所要证的就是前面的公

---

① 我们把 AP 叫做$\triangle ABC$ 在 BC 边上的斜高.

式(2.2).如果不重合,不外有以下三种情形:

如图 6(1)的情形,直接用公式(2.2),有

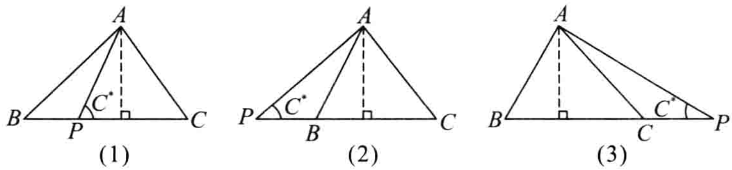


图 6

$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ABP} + S_{\triangle APC}\\ &= \frac{1}{2}AP \cdot BP\sin C^* + \frac{1}{2}AP \cdot CP\sin C^*\\ &= \frac{1}{2}AP \cdot (BP + CP)\sin C^*\\ &= \frac{1}{2}AP \cdot BC\sin C^*\\ &= \frac{1}{2}ab^*\sin C^*.\end{aligned}$$

如图 6(2)的情形,可以由

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} - S_{\triangle APB}.$$

以下作类似推导可以证得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

如图 6(3)的情形也可类似地证明,这里从略. □

显然,注意到图中虚线所表示的高,也可以由正弦的定义及公式(2.1)推证这个命题.

命题 3.1 通常也称为**斜高公式**.

进一步考虑:如果 P 点不在直线 BC 上,那么又有什么结

论呢?

命题 3.2 $ABPC$ 是四边互不相交的四边形,设 $BC=a$,$AP=b^*$,直线 AP 与 BC 相交所成的角及交点(锐角或钝角任取其一)都设为 C^*.那么四边形 $ABPC$ 的面积

$$S_{四边形ABPC}=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.$$

证明 四边形 $ABPC$ 可分凸四边形和凹四边形两种情形证明.

如图 7(1)所示的凸四边形情形:

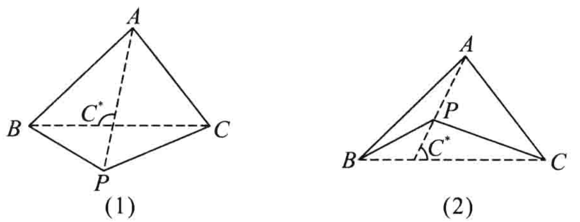


图 7

$$\begin{aligned}S_{四边形ABPC}&=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle PBC}\\&=\frac{1}{2}BC\cdot AC^*\sin C^*+\frac{1}{2}BC\cdot PC^*\sin C^*\\&=\frac{1}{2}BC\cdot(AC^*+PC^*)\sin C^*\\&=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.\end{aligned}$$

如图 7(2)所示的凹四边形情形:

$$S_{四边形ABPC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBC},$$

作类似的推导,可证得

$$S_{四边形ABPC}=\frac{1}{2}ab^*\sin C^*.\qquad\square$$